

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
ИНСТИТУТ КОСМИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
(ИКИ РАН)
НАУЧНО - ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР

А. С. Петросян

**ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ
ТЕОРИИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ.
СПИРАЛЬНАЯ ТУРБУЛЕНТНОСТЬ**

Серия «Механика, управление и информатика»

**МОСКВА
2013**

**Дополнительные главы теории турбулентности.
Спиральная турбулентность**

А. С. Петросян

Данный материал основан на курсе лекций, читаемом для студентов кафедры космической физики Московского физико-технического института (Государственного университета), и может служить им учебным пособием. В книге содержатся главы курса гидродинамики, не нашедшие отражения в существующих учебниках. Обсуждается роль спиральности однородного турбулентного течения в генерации крупномасштабных структур. Изложен метод среднего поля для течений турбулентной жидкости с твёрдыми частицами, турбулентных течений с пузырьками газа, турбулентных сдвиговых течений и турбулентных течений при распространении в них звуковых волн. Основное внимание уделено физическим эффектам, вызванным спиральностью турбулентного течения. Показано, что наличие спиральности приводит к генерации крупномасштабных вихревых структур в многофазных и сдвиговых течениях. Спиральность также может привести к трансформации звуковых волн в вихревые.

Книга может быть полезна студентам и аспирантам, специализирующимся в области гидродинамики.

Ключевые слова: гидродинамика, турбулентность, спиральность, многофазные среды, звук, сдвиговое течение.

Петросян Аракел Саркисович — доктор физико-математических наук, заведующий теоретическим сектором ИКИ РАН, профессор кафедры космической физики МФТИ.

Complimentary chapters of turbulence theory. Helical turbulence

A. S. Petrosyan

The textbook is based on the lectures for students of the department of the space physics at Moscow Institute of Physics and technology (State University). The manual includes chapters which are not covered in existing textbooks. The role of helicity. The textbook is useful for students and postgraduates who are major in hydrodynamics. Role of helicity of homogeneous turbulent flow in generation of large scale structures is discussed. Mean-field hydrodynamics for turbulent flows suspended with solid particles or gas bubbles, for turbulent shear flows and in turbulent flows with propagating sound waves is described. Main attention is given to physical phenomena initiated by helicity of turbulent flow. It is shown that presence of helicity in turbulent flow lead to generation of large scale structures in multi-phase and shear flows. Helicity may lead to transformation of sound waves in vertical flows when propagating in turbulence.

The textbook is useful for students and postgraduates who are major in hydrodynamics.

Keywords: hydrodynamics, turbulence, helicity, multi-phase flows, sound waves, shear flow.

ВВЕДЕНИЕ

В последнее время большое внимание уделяется проблемам возникновения структур в неравновесных средах. Особый интерес вызывают крупномасштабные вихри, появляющиеся в турбулентной жидкости, — когерентные структуры. Такие структуры наблюдаются экспериментально [Hussain, 1983, 1988]. Когерентные структуры наблюдаются также и в природных условиях: вихри Россби в атмосфере Земли и Юпитера, тропические циклоны [Интенсивные..., 1985; Незлин, Снежкин, 1990; Петвиашвили, Похотелов, 1989]. При изучении явления турбулентности важную роль играет модель однородной изотропной и стационарной турбулентности. Возникает вопрос, может ли такая турбулентность усиливать крупномасштабные возмущения. В магнитной гидродинамике развита теория усиления и поддержания магнитных полей мелкомасштабной турбулентностью [Вайнштейн и др., 1980; Краузе, Рэдлер, 1984; Моффат, 1980; Паркер, 1982; Zeldovich et al., 1983]. Ф. Краузе и К.-Х. Рэдлер [Краузе, Рэдлер, 1984] показали, что исходно однородная, изотропная и зеркально-симметричная турбулентность не может усиливать крупномасштабные магнитные поля. Однако если зеркальная симметрия турбулентности нарушена, то такая среда может усиливать крупномасштабное магнитное поле. Это явление получило название магнитного динамо. Простейший пример нарушения зеркальной симметрии представляет собой поле скоростей, в котором величина средней спиральности отлична от нуля. Такое турбулентное поле скоростей характерно тем, что правовинтовые и левовинтовые вихри наблюдаются с разной вероятностью, т. е. вихрей одного знака больше, чем другого.

Хорошо известно, что уравнение для завершённости подобно уравнению индукции магнитного поля [Эльзассер, 1958; Moffatt, 1981], поэтому вполне естественно желание изучать эволюцию крупномасштабных вихревых возмущений, тем более что существование инварианта спиральности в невязкой гидродинамике обеспечивает ограничение потока энергии от крупных масштабов к меньшим [Brissand et al., 1973; Kraichnan, 1973]. Действительно, дробление масштабов определяется нелинейным слагаемым уравнения гидродинамики. В работе [Frisch et al., 1975] показано, что увеличение спиральности уменьшает слагаемое, определяющее взаимодействие мод в гидродинамических уравнениях. Важную роль спиральности в возникновении крупномасштабных вихревых структур в атмосфере отмечают авторы [Levich, Tzvetkov, 1985]. Однако, несмотря на отмеченную выше аналогию между уравнением для завершённости и индукции магнитного поля, в работе [Krause, Rudiger, 1974] Ф. Краузе и Дж. Рюдигер в корреляционном приближении второго порядка исследовали напряжения Рейнольдса для случая однородной изотропной и спиральной турбулентности и показали, что в усреднённых уравнениях мелкомасштабная турбулентность модифицирует вязкость. Этот результат является следствием симметрии напряжений Рейнольдса в несжимаемой жидкости. Тем не менее, обратный энергетический каскад в спиральной турбулентности возможен. Для этого требуется дополнительное нарушение симметрии напряжений Рейнольдса.

В работе [Моисеев и др., 1987] (см. также [Tur et al., 1984; Saggdeev et al., 1984]) впервые получена генерация крупномасштабных вихрей в сжимаемой жидкости и получено осреднённое уравнение, описывающее эволюцию завершённости. В статье [Khomenko et al., 1988] подробно исследуется влияние сжимаемости среды на генерационные свойства турбулентности, а в [Гварамадзе, Чхетиани, 1988] изучается усиление вихревых возмущений в сжимаемой самогравитирующей среде. Для описания крупномасштабных процессов в атмосфере представляет интерес эволюция вихрей в несжимаемой жидкости. В работе [Гварамадзе и др., 1988] исследована возможность генерации вихрей в спиральной турбулентности с неоднородным потоком и показано, что добавления потенциального потока уже достаточно для появления нетривиальных слагаемых в усреднённых уравнениях. Для бессдвигового и линейного по координатам потока найдено решение, описывающее растущие вихревые возмущения поля скорости. В работах [Моисеев и др., 1986, 1988; Moiseev et al., 1987] исследовано вихревое динамо

в конвективной среде со спиральной турбулентностью и показано, что её учёт приводит к существенному изменению характера конвекции и к положительной обратной связи тороидальных и полоидальных полей. В результате при значениях спиральности выше критических возникает неустойчивость. Теория, изложенная в работах [Моисеев и др., 1986, 1988; Moiseev et al., 1987], имеет прямое отношение к зарождению тайфунов в атмосфере Земли. Для применения этой теории к описанию возникновения тропических циклонов в работе [Моисеев и др., 1989] изучается процесс зарождения крупномасштабной неустойчивости в конвективной турбулентности с учётом фазовых переходов влаги. Показано, что процесс развития при влажной конвекции существенно отличается от случая сухой конвекции. Учёт фазовых переходов влаги уменьшает порог неустойчивости, т.е. это эквивалентно появлению дополнительного источника энергии.

В гл. 1 изучается несжимаемая жидкость, заполненная твёрдыми частицами. Такая система может описывать процессы при пылевых бурях в атмосферах планет, покрытых пылью (например, на Марсе большая часть поверхности покрыта пылью). В случае, когда слабым ветром песок поднимается в атмосферу, могут создаваться условия для возникновения вихрей, более интенсивных, чем окружающие мелкомасштабные турбулентные потоки.

В случаях, когда размеры твёрдых частиц во много раз больше молекулярно-кинетических и масштабы рассматриваемых возмущений таковы, что твёрдые частицы образуют сплошную среду, пользуются уравнениями двухфазной гидродинамики. При выводе усреднённых уравнений, существенно используется факт, что относительный объём, занимаемый частицами, мал, это позволяет пренебречь столкновениями частиц между собой. Используя гипотезу двухмасштабности, получаем замкнутые уравнения Рейнольдса в линейном по средней скорости приближении. Показано, что в замкнутых уравнениях возникает генерационный член из-за ненулевой дивергенции в результате обтекания твёрдых частиц жидкостью. По существу, такая двухфазная среда ведёт себя как сжимаемая.

Аналогичный механизм генерации вихревых структур исследуется в гл. 2 для жидкости с распределёнными газовыми пузырьками. В такой среде асимметрия напряжения Рейнольдса обеспечивается колебаниями пузырька. Основное отличие изучаемой в этой главе модели состоит в том, что теперь будем считать, что дополнительная фаза вморожена в основную жидкость и ненулевая

дивергенция обеспечивается обтеканием этой жидкости сферически колеблющегося пузырька. Модель такой газожидкостной смеси может иметь непосредственное отношение к процессам, происходящим в приповерхностном слое океана, и её можно использовать для анализа переноса импульса и энергии через поверхность раздела вода — воздух и для описания турбулентности в верхних слоях океана. Изучаемые в данной главе явления могут иметь отношение к гидродинамическим процессам в невесомости.

Проблема распространения звука в турбулентной среде обсуждается в гл. 3, где изучаются рассеянное звуковое поле и его статистические характеристики для идеального газа в адиабатическом приближении. В такой среде, как хорошо известно, могут существовать и вихревые движения. В однородной и стационарной сжимаемой жидкости в линейном приближении потенциальные и вихревые моды не связаны и, более того, завершённость не может возникнуть без внешних источников. Таким образом, если в такой ситуации в начальный момент времени создано потенциальное возмущение, то оно распространяется в виде звуковой волны. При наличии же турбулентной области в газовой среде потенциальные и вихревые движения в линейном приближении связаны и поэтому следует ожидать трансформации падающей звуковой волны в рассеянное звуковое поле и вихревые движения. Изучаются вихревые движения, которые возникают при рассеянии акустических волн в турбулентной области. Рассматриваются также гиротропные свойства таких возмущений и их связь со спиральностью исходной турбулентности.

Устойчивость однородного турбулентного сдвигового течения по отношению к крупномасштабным возмущениям скорости рассмотрена в первом порядке теории возмущений и изучается в гл. 4 (далее будем называть это течение турбулентным течением Куэтта). Рассмотрен следующий, довольно часто встречающийся анизотропный фактор — существование наряду с турбулентностью крупномасштабного сдвигового течения и эволюция вихревых возмущений исследуется на фоне этого течения, при наличии мелкомасштабной спиральности (отражающей, к примеру, глобальное вращение всей системы).

Спиральность, как выясняется, ведёт к интенсивному росту возмущений на начальной стадии. Растут даже те моды, которые в отсутствие спиральности только затухали. На больших временах все возмущения затухают, т. е. на мелкомасштабном турбулентном фоне вспыхивают и исчезают трёхмерные вихревые образования.

Время жизни подобной структуры зависит от средних характеристик турбулентного потока.

Данный материал основан на курсе лекций, читаемом доктором физико-математических наук, заведующим теоретическим сектором Института космических исследований Российской академии наук (ИКИ РАН), профессором Московского физико-технического института (Государственного университета) (МФТИ) А.С. Петросяном для студентов кафедры космической физики и может служить для них учебным пособием, в котором содержатся главы курса гидродинамики, не нашедшие отражение в существующих учебниках. Изложенный материал может быть полезен студентам и аспирантам, специализирующимся в области гидродинамики.

Автор благодарен О.Г. Чхетиани за многочисленные обсуждения проблем спиральной турбулентности и сотрудничество.

Глава 1. КРУПНОМАСШТАБНЫЕ СТРУКТУРЫ В ЖИДКОСТИ С ТВЁРДЫМИ ЧАСТИЦАМИ

В данной главе изучаются свойства спиральной турбулентности в несжимаемой жидкости, заполненной твёрдыми частицами.

Ограничиваясь случаями, когда размеры твёрдых частиц во много раз больше молекулярно-кинетических и масштабы рассматриваемых возмущений таковы, что твёрдые частицы образуют сплошную среду, пользуются уравнениями двухфазной гидродинамики. При выводе усреднённых уравнений существенно используется факт, что относительный объём, занимаемый частицами, мал, это позволяет пренебречь столкновениями частиц между собой. Используя гипотезу двухмасштабности, получаем замкнутые уравнения Рейнольдса в линейном по средней скорости приближении. Показано, что в замкнутых уравнениях возникает генерационный член из-за ненулевой дивергенции в результате обтекания твёрдых частиц жидкостью. По существу, такая двухфазная среда ведёт себя как сжимаемая.

1.1. Уравнения среднего поля для жидкости с твёрдыми частицами

Движение вязкой несжимаемой жидкости с твёрдыми частицами будем описывать следующей системой уравнений:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div}(n\bar{V}_S) = 0, \quad (1.1)$$

$$\operatorname{div}(\bar{V}) = -\frac{4}{3}\pi a^3 \operatorname{div}(n)(\bar{V}_S - \bar{V}), \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial \bar{V}_S}{\partial t} + \beta(\bar{V}_S - \bar{V}) + (\bar{V}_S \nabla) \bar{V}_S + \frac{1}{\rho_S} \nabla P = 0, \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + \gamma n(\bar{V}_S - \bar{V}) + (\bar{V} \nabla) \bar{V} + \frac{1}{\rho} \nabla P = \nu \Delta \bar{V}. \quad (1.4)$$

Здесь \bar{V}_S и \bar{V} — гидродинамические скорости жидкой и твёрдой фаз соответственно; ρ_S и ρ — их плотности; n — концентрация твёрдых частиц с радиусом a ; ν — кинематическая вязкость; P — давление в среде.

В модели (1.1)–(1.4) частицы твёрдой фазы предполагаются невзаимодействующими между собой. Коэффициенты

$$\gamma = \frac{4}{3} \pi a^3 \beta \frac{\rho_S}{\rho}; \quad \beta = \frac{9}{2} \frac{\nu}{a^2} \frac{\rho}{\rho_S} \quad (1.5)$$

описывают стоксовское трение между компонентами каждой фазы.

В приведённой системе уравнений соотношение (1.1) является уравнением непрерывности для концентрации частиц, (1.2) описывает вытеснение жидкости твёрдой фазой, что обеспечивает наличие дивергенции в несжимаемой жидкости. Два оставшихся уравнения представляют собой закон сохранения импульса для каждой из фаз, связанных стоксовским трением.

В системе (1.1)–(1.4) в выражении для силы межфазного взаимодействия учитываем только стоксовское трение и пренебрегаем силой Бассе и эффектами, связанными с присоединённой массой. Это предположение справедливо, если характерные времена рассматриваемых процессов больше, чем установления квазистационарного стоксовского поля скоростей в несущей фазе вокруг частицы, и меньше, чем время установления равновесия фаз по скоростям [Нигматулин, 1987].

Двухмасштабный метод, который далее используется, основывается на предположении, что возмущённое среднее поле скоростей имеет характерные масштабы L и T и мало меняется на масштабах l_0 и t_0 турбулентного поля. Будем, в основном, интересоваться эволюцией усреднённого по ансамблю поля на пространственном и временном масштабах, много больших масштабов, характеризующих энергосодержащие вихри исходной турбулентности.

Представим переменные исходной системы уравнений в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \bar{V} &= \langle \bar{V} \rangle + \bar{V}', \\ \bar{V}_S &= \langle \bar{V}_S \rangle + \bar{V}'_S, \\ n &= \langle n \rangle + n', \\ P &= \langle P \rangle + P', \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

где $\langle \cdot \rangle$ — усреднённое по ансамблю турбулентных пульсаций, штрихом обозначена турбулентная компонента.

Уравнения для средних движений

$$\frac{\partial \langle n \rangle}{\partial t} + \operatorname{div} \langle \langle n \rangle \bar{V}_S \rangle + \operatorname{div} (n' \bar{V}'_S) = 0, \quad (1.7)$$

$$\operatorname{div} \langle \langle \bar{V} \rangle \rangle = \frac{4}{3} \pi a^3 \frac{\partial \langle n \rangle}{\partial t} + \frac{4}{3} \pi a^3 \operatorname{div} \langle \langle \bar{V} \rangle \rangle \langle n \rangle + \frac{4}{3} \pi a^3 \operatorname{div} \langle \langle \bar{V} n' \rangle \rangle, \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle \bar{V}_S \rangle}{\partial t} + \beta \langle \langle \bar{V}_S \rangle - \langle \bar{V} \rangle \rangle + \langle \langle \bar{V}_S \rangle \nabla \rangle \langle \bar{V}_S \rangle + \\ + \langle \langle \bar{V}'_S \nabla \rangle \bar{V}'_S \rangle + \frac{1}{\rho_0} \nabla \langle P \rangle = 0, \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle \bar{V} \rangle}{\partial t} + \gamma \langle n \rangle \langle \langle \bar{V}_S \rangle - \langle \bar{V} \rangle \rangle + \gamma \langle n' (\bar{V}' - \bar{V}'_S) \rangle + \\ + \langle \langle \bar{V} \rangle \nabla \rangle \langle \bar{V} \rangle + \langle \langle \bar{V}' \nabla \rangle \bar{V}' \rangle + \frac{1}{\rho} \nabla \langle P \rangle = \nu \Delta \langle \bar{V} \rangle \end{aligned} \quad (1.10)$$

содержат неизвестные напряжения Рейнольдса и дополняются соответствующими им уравнениями пульсационных компонент:

$$\frac{\partial n'}{\partial t} + \operatorname{div} (n' \langle \bar{V}_S \rangle + \langle n \rangle \bar{V}'_S) + \operatorname{div} (n' \bar{V}'_S - \langle n' \bar{V}'_S \rangle) = 0, \quad (1.11)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} (\bar{V}') = \frac{4}{3} \pi a^3 \frac{\partial n'}{\partial t} + \frac{4}{3} \pi a^3 \operatorname{div} (\bar{V}' n' - \langle \bar{V}' n' \rangle) + \\ + \frac{4}{3} \pi a^3 \operatorname{div} \langle \langle \bar{V} \rangle n' + \bar{V}' \langle n \rangle \rangle, \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{V}'_S}{\partial t} + \beta \langle \bar{V}'_S - \bar{V}' \rangle + \langle \langle \bar{V}_S \rangle \nabla \rangle \bar{V}'_S + (\bar{V}'_S \nabla) \langle \bar{V}_S \rangle + \\ + \langle (\bar{V}'_S \nabla) \bar{V}'_S - \langle (\bar{V}'_S \nabla) \bar{V}'_S \rangle \rangle + \frac{1}{\rho_S} \nabla P' = 0, \end{aligned} \quad (1.13)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \bar{V}'}{\partial t} + \gamma \langle n \rangle \left(\bar{V}' - \bar{V}'_S \right) + \gamma n' \left(\langle \bar{V}'_S \rangle - \langle \bar{V}' \rangle \right) + \\
& + \left(\langle \bar{V}' \rangle \nabla \right) \bar{V}' + (\bar{V}' \nabla) \langle \bar{V}' \rangle + \left\{ (\bar{V}' \nabla) \bar{V}' - \langle (\bar{V}' \nabla) \bar{V}' \rangle \right\} + \\
& + \left\{ \gamma n' (\bar{V}' - \bar{V}'_S) - \gamma \langle n' (\bar{V}' - \bar{V}'_S) \rangle \right\} + \frac{1}{\rho} \nabla P' = \nu \Delta \bar{V}', \quad (1.14)
\end{aligned}$$

Уравнения (1.11)–(1.14) будут использованы ниже для получения замкнутых уравнений, описывающих средние движения.

Всюду ниже в этой главе полагается выполненным требуемое условие эргодичности, которое позволит заменить усреднение по ансамблю локальным усреднением по объёму и тем самым поставить для уравнений (1.7)–(1.14) задачу эволюции возмущений на фоне исходного состояния.

1.2. Усреднённые уравнения для возмущений в жидкости с твёрдыми частицами

Пусть в исходном состоянии жидкости задана концентрация n_0 , а также мелкомасштабное поле скоростей жидкости \bar{V}'_0 и твёрдых частиц \bar{V}'_{S0} . Относительно гидродинамических полей сделаем следующие предположения.

А. Турбулентность жидкой фазы предполагается однородной изотропной и спиральной. Корреляционный тензор мелкомасштабной турбулентности можно представить в виде [Монин, Яглом, 1965]:

$$\left. \begin{aligned}
\langle \bar{V}'_i(\bar{r}_1, t_1) \bar{V}'_j(\bar{r}_2, t_2) \rangle &= A(\bar{r}, \tau) \delta_{ij} + B(\bar{r}, \tau) r_i r_j + H(\bar{r}, \tau) \varepsilon_{ijk} r_k, \\
\bar{r} &= \bar{r}_1 - \bar{r}_2; \quad \tau = t_1 - t_2.
\end{aligned} \right\} \quad (1.15)$$

В выражении (1.15) величина $B(\bar{r}, \tau)$ связана с $A(\bar{r}, \tau)$; $H(\bar{r}, \tau)$ — спиральность; δ_{ij} — символ Кронекера; ε_{ijk} — антисимметричный единичный тензор третьего ранга. Влияние кососимметричной части корреляционного тензора изучалось в работе [Krause, Rudiger, 1974], где показано, что она приводит к дополнительной вязкости турбулентностью, что проявляется лишь в изменении коэффициента перед лапласианом:

$$\nu = \nu_0 + \frac{16}{15} \pi \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_0^{+\infty} dk k^2 \frac{2\nu_0 k^2 - i\omega}{(\nu_0 k^2 - i\omega)^2} D(k, \omega). \quad (1.16)$$

В выражении (1.16) $D(k, \omega)$ определяется скалярным коэффициентом фурье-образа коррелятора невозмущённых однородных турбулентных пульсаций [Krause, Rudiger, 1974]:

$$\left. \begin{aligned} \langle V'_i(\bar{k}_2, \omega_2) V'_j(\bar{k}_1, \omega_1) \rangle &= Q_{ij}(\bar{k}_2, \omega_2) \delta(\bar{k}_1 + \bar{k}_2) \delta(\omega_1 + \omega_2), \\ Q_{ij}(\bar{k}, \omega) &= D(\bar{k}, \omega) \left\{ \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right\} - iG(\bar{k}, \omega) \varepsilon_{ijl} k_l. \end{aligned} \right\} \quad (1.17)$$

Всюду ниже в этой главе основное внимание будет уделяться вкладу в усреднённые уравнения спиральной части коррелятора, а под вязкостью будем подразумевать турбулентную вязкость из-за влияния симметричной части коррелятора; поэтому запишем корреляционные свойства исходной турбулентностью основного состояния в следующем виде:

$$\langle V'_{i0}(\bar{r}, t) V'_{i0}(\bar{r} + \bar{\xi}, t + \tau) \rangle = H(\bar{\xi}, \tau) \varepsilon_{ijl} \xi_l. \quad (1.18)$$

Б. Такое спиральное турбулентное поле скоростей, безусловно, вызывает случайные гидродинамические движения твёрдой фазы. Однако наши сделанные выше предположения о стоковском взаимодействии частиц в жидкости, а также пренебрежение непосредственным взаимодействием частиц между собой даёт основание пренебречь взаимной корреляцией турбулентного поля скоростей жидкости с гидродинамическим полем твёрдой фазы. На этом же основании пренебрежём корреляцией гидродинамических скоростей твёрдых частиц. Это соответствует невмороженности твёрдых частиц в жидкость.

В рамках предложенной двухмасштабной модели рассмотрим эволюцию возмущений на фоне описанного основного состояния, удовлетворяющего уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} \langle n \rangle &= n_0, \\ \langle \bar{V}' \rangle &= \langle \bar{V}'_S \rangle = 0, \\ \text{div}(\bar{V}'_0) &= \text{div}(\bar{V}'_{S0}) = 0, \\ \frac{\partial \bar{V}'_{S0}}{\partial t} + \beta(\bar{V}'_{S0} - \bar{V}'_0) + (\bar{V}'_{S0} \nabla) \bar{V}'_{S0} + \frac{1}{\rho_{S0}} \nabla P'_0 &= 0, \\ \frac{\partial \bar{V}'_0}{\partial t} + \gamma n_0 (\bar{V}'_{S0} - \bar{V}'_0) + (\bar{V}'_0 \nabla) \bar{V}'_0 + \frac{1}{\rho} \nabla P'_0 &= \nu \Delta v'_0. \end{aligned} \right\} \quad (1.19)$$

Далее произведём линеаризацию исходных уравнений и получим замкнутые уравнения, описывающие поведение средних возмущений. Представим возмущённые мелкомасштабные движения в виде:

$$\left. \begin{aligned} \bar{v}' &= \bar{v}^0 + \bar{v}' \\ \bar{v}'_S &= \bar{v}_S^0 + \bar{v}'_S \\ n' &= n_1 \\ P' &= P^0 + P^1, \end{aligned} \right\} \quad (1.20)$$

опустив везде ниже штрихи у возмущённых величин.

Опуская в (1.7)–(1.10) нелинейные слагаемые, получаем:

$$\frac{\partial \langle n \rangle}{\partial t} + \operatorname{div} \{ n_0 \langle \bar{v}_S \rangle \} + \operatorname{div} (\bar{N}_S) = 0, \quad (1.21)$$

$$\operatorname{div} \langle \bar{v} \rangle = \frac{4}{3} \pi a^3 \frac{\partial \langle n \rangle}{\partial t} + \frac{4}{3} \pi a^3 \operatorname{div} (n_0) \langle \bar{v} \rangle + \frac{4}{3} \pi a^3 \operatorname{div} (\bar{N}), \quad (1.22)$$

$$\frac{\partial \langle \bar{v}_S \rangle}{\partial t} + \beta \{ \langle \bar{v}_S \rangle - \langle \bar{v} \rangle \} + Q_S + \frac{1}{\rho_S} \nabla \langle P \rangle = 0, \quad (1.23)$$

$$\frac{\partial \langle \bar{v} \rangle}{\partial t} + \gamma \langle n \rangle \{ \langle \bar{v}_S \rangle - \langle \bar{v} \rangle \} + \gamma (\bar{N} - \bar{N}_S) + Q + \frac{1}{\rho} \nabla \langle P \rangle = \nu \Delta \langle \bar{v} \rangle. \quad (1.24)$$

Здесь $\langle n \rangle$ — средние возмущения концентрации частиц; $\langle \bar{v} \rangle$ и $\langle \bar{v}_S \rangle$ — средние возмущения гидродинамических скоростей.

В приведённой выше системе уравнений содержатся неизвестные слагаемые:

$$\left. \begin{aligned} \bar{Q} &= \langle (\bar{v}^1 \nabla) \bar{v}^0 \rangle + \langle (\bar{v}^0 \nabla) \bar{v}^1 \rangle, \\ \bar{Q}_S &= \langle (\bar{v}_S^1 \nabla) \bar{v}_S^0 \rangle + \langle (\bar{v}_S^0 \nabla) \bar{v}_S^1 \rangle, \\ \bar{N} &= \langle n^1 \bar{v}^0 \rangle, \\ \bar{N}_S &= \langle n^1 \bar{v}_S^0 \rangle, \end{aligned} \right\} \quad (1.25)$$

при вычислении которых опустим симметричную по индексам часть как обращающуюся в нуль для спиральной турбулентности:

$$\left. \begin{aligned} \bar{Q} &= \left\langle \frac{\partial}{\partial x_k} (V_k^1 V_i^0 + V_i^1 V_k^0) \right\rangle - \left\langle V_i^0 \frac{\partial V_k^1}{\partial x_k} \right\rangle, \\ \bar{Q}_S &= \left\langle \frac{\partial}{\partial x_k} (V_{Sk}^1 V_{Si}^0 + V_{Si}^1 V_{Sk}^0) \right\rangle - \left\langle V_{Si}^0 \frac{\partial V_{Sk}^1}{\partial x_k} \right\rangle. \end{aligned} \right\} \quad (1.26)$$

Для вычисления несимметричных частей корреляторов воспользуемся методикой работы [Krause, Rudiger, 1974]; для этого уравнения (1.11)–(1.14) представим в виде

$$\frac{\partial n^1}{\partial t} + \operatorname{div}(\langle n \rangle \bar{V}_S^0) + n_0 \operatorname{div}(\bar{V}_S') = 0, \quad (1.27)$$

$$\operatorname{div}(\bar{V}^1) = \frac{4}{3} \pi a^3 \frac{\partial n^1}{\partial t} + \frac{4}{3} \pi a^3 \operatorname{div}(\bar{V}^0 \nabla) \langle n \rangle, \quad (1.28)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle \bar{V}_S^1 \rangle}{\partial t} + \beta (\bar{V}_S^1 - \bar{V}^1) + (\langle \bar{V} \rangle \nabla) \bar{V}_S^0 + \\ + (\bar{V}_S^0 \nabla) \langle \bar{V}_S \rangle + \frac{1}{\rho_S} \nabla P^1 = 0, \end{aligned} \quad (1.29)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{V}^1}{\partial t} - \gamma n_0 (\bar{V}^1 - \bar{V}_S^1) + \gamma \langle n \rangle (\bar{V}^0 - \bar{V}_S^0) + \\ + (\langle \bar{V} \rangle \nabla) \bar{V}^0 + (\bar{V}^0 \nabla) \langle \bar{V} \rangle + \frac{1}{\rho} \nabla P^1 = \nu \Delta \bar{V}^1. \end{aligned} \quad (1.30)$$

В системе уравнений (1.27)–(1.30) опущены слагаемые, которые при дальнейших вычислениях приведут к появлению в уравнениях корреляционных моментов выше второго порядка. Это позволяет осуществить замыкание линеаризованной системы для средних движений и соответствует случаю, когда число Рейнольдса турбулентности в исходном невозмущенном состоянии.

Сделанное предположение о малости числа Рейнольдса относится к параметрам реализации турбулентного течения и его не следует путать с числом Рейнольдса, при котором турбулентность возникает из ламинарного потока. Поскольку рассматривается эволюция именно мелкомасштабной, развитой турбулентности, возникшей в результате первичной неустойчивости исходно ламинарного потока, наше предположение не сильно обедняет физическую ситуацию.

Прежде чем перейти к процедуре замыкания уравнений, дадим физическую интерпретацию систем (1.21)–(1.24) и (1.27)–(1.30). По существу, рассматривается ансамбль несжимаемых жидкостей, каждая реализация которой удовлетворяет исходной системе уравнений (1.1)–(1.4) инварианта относительно пространственных переменных, и поэтому можно задать характеристики турбулентности однородными.

Возмущая в некоторый момент времени каждую реализацию одинаковым крупномасштабным возмущением, представляем такие поля в системе (1.1)–(1.4) в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \bar{V} &= \langle \bar{V} \rangle + \bar{V}^0 + \bar{V}^1, \\ \bar{V}_S &= \langle \bar{V}_S \rangle + \bar{V}_S^0 + \bar{V}_S^1, \\ n &= \langle n \rangle + n_0 + n_1, \\ P &= \langle P \rangle + P^0 + P^1, \\ \langle \bar{V}^0 \rangle &= \langle \bar{V}^1 \rangle = 0, \\ \langle \bar{V}_S^0 \rangle &= \langle \bar{V}_S^1 \rangle = 0, \\ \langle P^0 \rangle &= \langle P^1 \rangle = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.31)$$

Можно интерпретировать \bar{V}^1 , \bar{V}_S^1 и P^1 как неоднородные добавки, возникающие при взаимодействии средних полей с исходно однородной мелкомасштабной турбулентностью. Эти добавки возникают из-за того, что невозможно в системе (1.1)–(1.4) разделить средние крупномасштабные движения на мелкомасштабные пульсации таким образом, чтобы последние удовлетворяли исходной системе уравнений из-за появления дополнительных напряжений Рейнольдса. Введение же \bar{V}^1 , \bar{V}_S^1 и P^1 позволяет в пульсационной компоненте разделить турбулентное поле основного невозмущённого состояния и рейнольдсовские напряжения, возникающие из-за возмущений.

Полные поля (1.31) удовлетворяют уравнениям двухфазной среды, поэтому уравнения для средних возмущений (1.21)–(1.24) могут быть получены подстановкой (1.31) в (1.1)–(1.4) с последующим усреднением и линеаризацией, так как средние поля много меньше величины невозмущённого состояния, по крайней мере на начальной стадии.

1.3. Замыкание уравнений для возмущений среднего поля в жидкости с твёрдыми частицами

Следуя [Krause, Rudiger, 1974], из (1.27)–(1.30) получим уравнения, описывающие (1.25), для чего подставим (1.2) в (1.28) и получим:

$$\frac{\partial V_k^1}{\partial x_k} = -\frac{4}{3}\pi a^3 \left(V_{Sk}^0 - V_k^0 \right) \frac{\partial \langle n \rangle}{\partial x_k} - \frac{4}{3}\pi a^3 n_0 \frac{\partial V_{Sk}^1}{\partial x_k}. \quad (1.32)$$

Произведём в уравнении (1.32) сдвиг аргументов $\bar{x} + \bar{\xi}$ и $t + \tau$, возьмём производные по $\bar{\xi}$ и τ , умножим затем на $V_i^0(\bar{x}, t)$ и произведём операцию усреднения:

$$\begin{aligned} \left\langle V_i^0(\bar{x}, t) \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}_k} V_k^1(\bar{x} + \bar{\xi}, t + \tau) \right\rangle &= \frac{4}{3}\pi a^3 \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}_k} \bar{n}(\bar{x} + \bar{\xi}, t + \tau) \times \\ &\times \left\langle \left(V_{Sk}^0(\bar{x} + \bar{\xi}, t + \tau) V_i^0(\bar{x}, t) \right) \right\rangle - \left\langle V_i^0(\bar{x}, t) V_k^0(\bar{x} + \bar{\xi}, t + \tau) \right\rangle - \\ &- \frac{4}{3}\pi a^3 n_0 \left\langle V_i^0(\bar{x}, t) \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}_k} V_{Sk}^1(\bar{x} + \bar{\xi}, t + \tau) \right\rangle. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Используя гипотезу двухмасштабности, запишем:

$$\bar{n}(\bar{x} + \bar{\xi}, t + \tau) = \bar{n}(\bar{x}, t) + \bar{\xi}_k \frac{\partial}{\partial x_k} \bar{n}(\bar{x}, t). \quad (1.34)$$

Перейдём в (1.33) к фурье-образам:

$$\begin{aligned} \hat{Q}_{ik}^0(\bar{k}, \omega) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \iint d\bar{\xi} d\tau \exp(-i(\bar{k} \bar{\xi} - \omega t)) Q_{ik}^0(\bar{\xi}, \tau), \\ \hat{Q}_{ik}^{0S}(\bar{k}, \omega) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \iint d\bar{\xi} d\tau \exp(-i(\bar{k} \bar{\xi} - \omega t)) Q_{ik}^{0S}(\bar{\xi}, \tau), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} Q_{ik}^0(\bar{\xi}, \tau) &= \left\langle V_i^0(\bar{x}, t) V_k^0(\bar{x} + \bar{\xi}, t + \tau) \right\rangle, \\ Q_{ik}^{0S}(\bar{\xi}, \tau) &= \left\langle V_i^0(\bar{x}, t) V_{Sk}^0(\bar{x} + \bar{\xi}, t + \tau) \right\rangle. \end{aligned}$$

Интегрируя полученные уравнения по \bar{k}, ω , учитывая, что $Q_{ik}^{0S}(\bar{\xi}, \tau) = 0$, а коррелятор $\hat{Q}_{ik}^0(\bar{k}, \omega)$ имеет вид $iH(\bar{k}, \omega)\epsilon_{ikl}k_l$ и при интегрировании по углам будет равен нулю вследствие изотропии исходной турбулентности, получим:

$$\left\langle V_i^0(\bar{x}, t) \frac{\partial}{\partial x_k} V_k^1(\bar{x}, t) \right\rangle = -\frac{4}{3} \pi a^3 \left\langle V_i^0(\bar{x}, t) \frac{\partial}{\partial x_k} V_{Sk}^1(\bar{x}, t) \right\rangle. \quad (1.35)$$

Используя аналогичную методику для (1.29) и (1.30), запишем для (1.29):

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial \tau} + \beta \right) \left\langle V_i^0(\bar{x}, t) \frac{\partial}{\partial x_k} V_{Sk}^1(\bar{x} + \bar{\xi}, t + \tau) \right\rangle - \\ & - \beta \left\langle V_i^0(\bar{x}, t) \frac{\partial}{\partial \xi_k} V_k^1(\bar{x} + \bar{\xi}, t + \tau) \right\rangle = \\ & = -\frac{1}{\rho_S} \nabla_{\xi}^2 \left\langle V_i^0(\bar{x}, t) P(\bar{x} + \bar{\xi}, t + \tau) \right\rangle \end{aligned} \quad (1.36)$$

и аналогично для (1.30):

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial \tau} + \nu \Delta_{\xi} + \gamma n_0 \right) \left\langle V_i^0(\bar{x}, t) \frac{\partial}{\partial x_k} V_k^1(\bar{x} + \bar{\xi}, t + \tau) \right\rangle = \\ & = -\gamma n_0 \left\langle V_i^0(\bar{x}, t) \frac{\partial}{\partial x_k} V_{Sk}^1(\bar{x} + \bar{\xi}, t + \tau) \right\rangle + \\ & + 2 \frac{\partial}{\partial x_k} \left\langle V_p \right\rangle \frac{\partial}{\partial \xi_p} Q_{ik}^{00}(\bar{\xi}, \tau) - \frac{1}{\rho_S} \nabla_{\xi}^2 \left\langle V_i^0(\bar{x}, t) P(\bar{x} + \bar{\xi}, t + \tau) \right\rangle. \end{aligned} \quad (1.37)$$

В двух предыдущих выражениях мы использовали тот факт, что $\operatorname{div}(\bar{V}_S^0) = 0$; $\operatorname{div}(\bar{V}^0) = 0$. Введём следующие обозначения:

$$g_i^{0S}(\bar{x}, \bar{\xi}, t, \tau) = \left\langle V_i^0(\bar{x}, t) \frac{\partial}{\partial x_k} V_{Sk}^1(\bar{x} + \bar{\xi}, t + \tau) \right\rangle,$$

$$g_i^{00}(\bar{x}, \bar{\xi}, t, \tau) = \left\langle V_i^0(\bar{x}, t) \frac{\partial}{\partial x_k} V_k^1(\bar{x} + \bar{\xi}, t + \tau) \right\rangle,$$

$$P(\bar{x}, \bar{\xi}, t, \tau) = \left\langle V_i^0(\bar{x}, t) P(\bar{x} + \bar{\xi}, t + \tau) \right\rangle.$$

Тогда уравнения (1.36)–(1.37) можно переписать в следующем виде:

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau} + \beta \right) g_i^{0S} - \beta g_i^{00} = -\frac{1}{\rho_S} \nabla_{\xi}^2 P_i, \quad (1.38)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau} + v \Delta_{\xi}^2 + \gamma n_0 \right) g_i^{00} = -\gamma n_0 g_i^{0S} + 2 \frac{\partial}{\partial x_k} \langle V_p \rangle \frac{\partial}{\partial \xi_p} Q_{ik}^{00} - \frac{1}{\rho} \nabla_{\xi}^2 P_i. \quad (1.39)$$

На основании (1.35), (1.36) и (1.39) имеем:

$$V \left(vk^2 + \frac{\rho_S}{\rho} \right) g_i^{00} + \gamma n_0 g_i^{00} + \frac{\rho_S}{\rho} (-i\omega + \beta) g_i^{00} = 2 \frac{\partial}{\partial x_k} \langle V_p \rangle \frac{\partial}{\partial \xi_p} Q_{ik}^{00} V, \quad (1.40)$$

где $V = \frac{4}{3} \pi a^3 n_0$.

Из уравнения (1.40) после интегрирования по углам получим для g_i^{00} в координатном выражении:

$$g_i^{00}(\bar{x}, t) = \gamma \operatorname{rot} \left\{ \langle \bar{V}(\bar{x}, t) \rangle \right\}, \quad (1.41)$$

$$\gamma = \frac{2}{3} V \int \frac{k^4 A(k, \omega) dk d\omega}{V \left(vk^2 + \frac{\rho_S}{\rho} \right) + \gamma n_0 + \frac{\rho}{\rho_S} (\beta - i\omega)}. \quad (1.42)$$

Аналогичными вычислениями из (1.28) получим соотношение:

$$g_i^{00}(\bar{x}, \bar{\xi}, \tau, t) = \frac{4}{3} \pi a^3 \frac{\partial}{\partial \tau} N_i(\bar{x}, \bar{\xi}, \tau, t) + \frac{4}{3} \pi a^3 Q_{ik}^{00}(\bar{\xi}, \tau) \frac{\partial}{\partial x_k} \langle n(\bar{x}, t) \rangle. \quad (1.43)$$

Отсюда находим:

$$N_i(\bar{x}, t) = \beta \operatorname{rot} \left\{ \langle \bar{V}(\bar{x}, t) \rangle \right\}, \quad (1.44)$$

$$\beta = -\frac{2}{3} V \frac{1}{2\pi a^3} i \int \frac{k^4}{\omega} \frac{A(k, \omega) dk d\omega}{V \left(vk^2 + \frac{\rho_S}{\rho} \right) + \gamma n_0 + \frac{\rho_S}{\rho} (\beta - i\omega)}. \quad (1.45)$$

Конструируя уравнения для остальных дополнительных слагаемых, мы обнаруживаем, что они обращаются в нуль вследствие равенства нулю $Q^{0S}(\bar{x}, \bar{\xi}, \tau, t)$, $Q^{SS}(\bar{x}, \bar{\xi}, \tau, t)$.

Итак, из уравнений (1.27)–(1.30) после достаточно громоздких вычислений получаем следующую замкнутую систему уравнений для средних возмущений:

$$\frac{\partial \langle n \rangle}{\partial t} + n_0 \operatorname{div} \left\{ \langle \bar{V}_S \rangle \right\} = 0, \quad (1.46)$$

$$\operatorname{div}(\langle \bar{V} \rangle) = \frac{4}{3} \pi a^3 \frac{\partial}{\partial t} \langle n \rangle, \quad (1.47)$$

$$\frac{\partial \langle \bar{V}_S \rangle}{\partial t} + \beta (\langle \bar{V}_S \rangle - \langle \bar{V} \rangle) + \frac{1}{\rho_S} \langle P \rangle = 0, \quad (1.48)$$

$$\frac{\partial \langle \bar{V} \rangle}{\partial t} - \gamma n_0 (\langle \bar{V} \rangle - \langle \bar{V}_S \rangle) + \alpha \operatorname{rot}(\langle \bar{V} \rangle) + \frac{1}{\rho} \nabla P = \nu \Delta \langle \bar{V} \rangle. \quad (1.49)$$

1.4. Вихревая неустойчивость жидкости с твёрдыми частицами

В предыдущей главе получена система уравнений, описывающая средние возмущения спиральной турбулентности. Эти уравнения содержат слагаемые, которые могут привести к неустойчивости. Легко видеть, что для потенциальных движений эти новые слагаемые исчезают из уравнений и тем самым потенциальные движения затухают.

Интересуясь эволюцией вихревых возмущений, перейдём от (1.46)–(1.49) к соответствующим уравнениям для завершённости:

$$\bar{\Omega} = \operatorname{rot}(\langle \bar{V} \rangle), \quad \bar{\Omega}_S = \operatorname{rot}(\langle \bar{V}_S \rangle),$$

$$\frac{\partial \bar{\Omega}_S}{\partial t} + \beta (\bar{\Omega}_S - \bar{\Omega}) = 0, \quad (1.50)$$

$$\frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial t} + \gamma n_0 (\bar{\Omega}_S - \bar{\Omega}) + \alpha \operatorname{rot}(\langle \bar{V} \rangle) = \nu \Delta \bar{\Omega}. \quad (1.51)$$

Полученные уравнения содержат слагаемое, которое описывает генерацию вихрей в результате неустойчивости. Дисперсионное уравнение малых возмущений

$$-\frac{1}{\beta} (-i\omega)^2 - i\omega \left(\frac{\gamma n_0 + \nu k^2 \pm \alpha k}{\beta} + 1 \right) + (\nu k^2 \pm \alpha k) = 0 \quad (1.52)$$

имеет решение, описывающее неустойчивость с инкрементом:

$$-i\omega = -\frac{1}{2} (\gamma n_0 + \nu k^2 - \alpha k + \beta) \pm \sqrt{(\gamma n_0 + \nu k^2 + \beta - \alpha k)^2 - 4\beta(\nu k^2 - \alpha k)}. \quad (1.53)$$

Перейдём в (1.52) к пределу однофазной среды. Для этого устремим радиус частиц a к нулю. Тогда коэффициенты α , γ и $1/\beta$ также устремятся к нулю. В этом предельном случае получим:

$$-i\omega = -\nu k^2,$$

что соответствует затуханию возмущений в несжимаемой вязкой жидкости.

Глава 2. ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЙ α -ЭФФЕКТ В ЖИДКОСТИ С ОСЦИЛЛИРУЮЩИМИ ПУЗЫРЬКАМИ ГАЗА

Аналогичный механизм генерации вихревых структур, изученный в предыдущей главе, исследуется в данной главе для случая жидкости с распределёнными газовыми пузырьками. В такой среде асимметрия напряжения Рейнольдса обеспечивается колебаниями пузырька. Основное отличие изучаемой в этой главе модели состоит в том, что будет считаться, что дополнительная фаза встроена в основную жидкость и ненулевая дивергенция обеспечивается обтеканием этой жидкостью сферически колеблющегося пузырька. Модель такой газожидкостной смеси может иметь непосредственное отношение к процессам, происходящим в приповерхностном слое океана, может быть использована для анализа переноса импульса и энергии через поверхность раздела вода – воздух и для описания турбулентности в верхних слоях океана. Изучаемые в данной главе явления могут иметь отношение к гидродинамическим процессам в невесомости.

2.1. Модель жидкости с пузырьками газа. Исходные уравнения

Будем изучать процессы в жидкости с распределёнными пузырьками. При этом будем пренебрегать схлопыванием пузырьков, считая, что в жидкости поддерживается постоянное количество пузырей, совершающих радиальные колебания.

Для изучения турбулентных движений такой смеси воспользуемся следующей системой уравнений гидродинамики смеси жидкости с пузырьками:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho V_i) = 0, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} V_i + (V_k \nabla_k) V_i = -\frac{\nabla p}{\rho} + \frac{\nu}{\rho} \Delta^2 V_i, \quad (2.2)$$

дополненной уравнением Рэлея для одиночного пузырька:

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2} \dot{R}^2 = \frac{1}{\rho_o} (p_r - p). \quad (2.3)$$

В соотношениях (2.1)–(2.3) ρ — плотность газожидкостной смеси; p — давление; V_i — скорость среды; R — радиус пузырька; ρ_o — плотность жидкости; p_r — давление газа в пузырьке.

Уравнение (2.3) эквивалентно следующему уравнению для объёма пузырька:

$$U = \frac{4}{3} \pi R^3, \quad (2.4)$$

$$\alpha U^{-1/3} \ddot{U} - \frac{\alpha}{6} U^{-4/3} \dot{U}^2 + \frac{3}{2} \dot{R}^2 = p_r - p,$$

$$\alpha = \left(\frac{\rho_o}{3} \right)^{1/3} (4\pi)^{2/3}.$$

Рассмотрим отклонение давления от равновесного значения и соответствующие отклонения малых пульсаций пузырька:

$$p = p_0 + p^1, \quad U = U_0 + U^1.$$

При условии $p/p_0 < 1$, $U^1/U_0^1 < 1$ адиабатического уравнения состояния для пузырька

$$p_r = p_0 \left(\frac{V_0}{V} \right)^\gamma$$

всюду ниже будем использовать уравнение для колебаний пузырька, полученное Заболоцкой (штрихи опускаем):

$$\ddot{U} + w_0^2 U - \alpha U^2 - \beta (2\ddot{U}U + \dot{U}^2) + \mu U^2 + \nu (\ddot{U}U^2 + \dot{U}^2 U) = -\varepsilon p,$$

$$w_0 = \frac{3\gamma p_0}{\rho_0 R_0^2}, \quad \varepsilon = \frac{4\pi R_0}{\rho_0}, \quad f = \frac{w_0}{Q}, \quad \alpha = \frac{(\gamma+1)w_0^2}{2U_0},$$

$$\beta = \frac{1}{6}U_0, \quad \nu = \frac{2}{9U_0^2}, \quad (2.5)$$

$$\mu = \frac{(\gamma + 2)(\gamma + 1)w_0^2}{6U_0^2}.$$

Для замыкания системы уравнений (2.1)–(2.5) воспользуемся выражением для плотности смеси, полученным в соотношении

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 - \chi p + nU}, \quad (2.6)$$

где n — концентрация пузырьков; $\chi = \frac{1}{U} \frac{\partial U}{\partial p}$ характеризует сжимаемость с изменением радиуса пузырька.

Упростим систему уравнений (2.1)–(2.6). Будем интересоваться достаточно медленными движениями, которые не являются резонансными по отношению к колебаниям пузырьковой полости, поэтому для упрощения дальнейших выкладок пренебрежём нелинейными слагаемыми в уравнении колебаний пузырька и будем считать, что определяющей нелинейностью является гидродинамическая нелинейность. Это, по сути, означает пренебрежение звуковыми движениями в основной фазе жидкости, т. е. пренебрежение собственной сжимаемостью жидкости. Будем также пренебрегать нелинейностью в уравнении (2.6), описывающем плотность газожидкостной смеси, что накладывает ограничения на концентрацию пузырьков.

Таким образом, в последующем анализе эволюции возмущений в турбулентной среде будем использовать следующую систему уравнений:

$$\rho = \rho_0(1 - nU + \chi p), \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho_0 V_i) = 0, \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} V_i + (V_k \nabla_k) V_i = -\frac{\nabla p}{\rho_0} + \frac{\nu}{\rho_0} \Delta V_i, \quad (2.9)$$

$$\ddot{U} + w_0^2 U = -\varepsilon p. \quad (2.10)$$

Записанная в виде (2.7)–(2.10), упрощённая система газожидкостной среды особенно интересна для исследований, поскольку в ней можно в качестве основного невозмущённого состояния рассматривать случайное вихревое поле скоростей при $\rho = \rho_0$.

2.2. Вывод замкнутых уравнений для завершённости

Воспользуемся системой уравнений (2.7)–(2.10) для исследования эволюции возмущения на фоне мелкомасштабной турбулентности. Для этого представим переменные задачи в следующем виде:

$$V_i = \bar{V}_i + V_i', \quad (2.11)$$

$$\rho = \bar{\rho} + \rho', \quad (2.12)$$

$$p = \bar{p} + p', \quad (2.13)$$

$$U = \bar{U} + U', \quad (2.14)$$

где черта сверху означает рейнольдсовское усреднение, а штрихованные величины обозначают пульсационные компоненты, средние от которых равны нулю.

Тогда из соотношений (2.7)–(2.10), подставляя в них (2.11)–(2.14) с последующим усреднением, получим следующую систему, описывающую среднее движения:

$$\bar{\rho} = \rho_0(1 - n\bar{U} + \chi\bar{p}), \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho_0 \bar{V}_i) = 0, \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{V}_i + (\bar{V}_k \nabla_k) \bar{V}_i + \overline{(V'_k \nabla_k) V'_i} = -\frac{\nabla p}{\rho_0} + \frac{\nu}{\rho_0} \Delta \bar{V}_i, \quad (2.17)$$

$$\ddot{\bar{U}} + w_0^2 \bar{U} = -\varepsilon \bar{p}. \quad (2.18)$$

Вычитая из соотношений (2.7)–(2.10) уравнения (2.15)–(2.18) с последующим усреднением и используя (2.11)–(2.14), получим следующую систему уравнений, описывающую пульсационные компоненты:

$$\rho' = \rho_0(1 - nU' + \chi p'), \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho_0 V'_i) = 0, \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \bar{V}_i + (V'_k \nabla_k) V'_i - \overline{(V'_k \nabla_k) V'_i} + (V'_k \nabla_k) \bar{V}_i + \\ + (\bar{V}_k \nabla_k) V'_i = -\frac{\nabla p'}{\rho_0} + \frac{\nu}{\rho_0} \Delta V', \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\ddot{U}' + w_0^2 U' = -\varepsilon p'. \quad (2.22)$$

Будем изучать эволюцию средних возмущений на фоне мелко-масштабной спиральной турбулентности (см. гл. 3), для чего представим переменные задачи в виде

$$V'_i = V_i^t + V^1, \quad p' = p^t + p^1, \quad \rho' = \rho^1, \quad U' = U^t + U^1$$

и удержим слагаемые, линейные по возмущениям на масштабах средних полей и пульсационных движений. Уравнения для крупномасштабных возмущений плотности и объёма будут совпадать с (2.15), (2.16) и (2.18), а для скорости запишутся в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{V}_i + \overline{(V_k^t \nabla_k) V_i^1} + \overline{(V_k^1 \nabla_k) V_i^t} = -\frac{\nabla p}{\rho_0} + \frac{v}{\rho_0} \Delta V_i. \quad (2.23)$$

При вычислении напряжений Рейнольдса опустим симметричную по индексам часть, поскольку она обращается в нуль для спиральной турбулентности:

$$\bar{Q}_i = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_k} (V_k^t V_i^1 + V_k^1 V_i^t) \right\rangle - \left\langle V_i^t \frac{\partial}{\partial x_k} V_k^1 \right\rangle, \quad (2.24)$$

и будем интересоваться только последним слагаемым в (2.24).

Уравнения для неоднородных добавок относительно U^1 , p^1 , ρ^1 совпадают с точностью до обозначений с уравнениями (2.19), (2.20) и (2.22), а уравнение для V_i^1 примет следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} V_i^1 + (V_k^t \nabla_k) \bar{V}_i + (\bar{V}_k \nabla_k) V_i^t = -\frac{\nabla p^1}{\rho_0} + \frac{v}{\rho_0} \Delta V_i^1. \quad (2.25)$$

В уравнении (2.25), как и в предыдущей главе, опустим слагаемые, приводящие к моментам третьего порядка, что соответствует корреляционному приближению второго порядка. Это приближение применимо либо при малых числах Струхала, либо при малых числах Рейнольдса. Введём в уравнении (2.25) обозначения $\nabla_i V_i^1 = \Phi$ и, пользуясь (2.19) и (2.20), перепишем систему уравнений для мелкомасштабных возмущений в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi + \nabla_i (V_k^t \nabla_k) \bar{V}_i + \nabla_i (\bar{V}_k \nabla_k) V_i^t = \frac{\Delta p^1}{\rho_0} + \frac{v}{\rho_0} \Delta \Phi, \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\chi p^1 - n U^1) - \nabla_i (V_k^t \nabla_k) \bar{V}_i^t - \nabla_i (\bar{V}_k \nabla_k) V_i^t &= \\ = \frac{\Delta p^1}{\rho_0} + \frac{v}{\rho_0} \Delta \frac{\partial}{\partial t} (\chi p^1 - n U^1), & \quad (2.27) \end{aligned}$$

$$\ddot{U}^1 + w_0^2 U^1 = -\varepsilon p. \quad (2.28)$$

Произведём в уравнениях (2.26)–(2.28) сдвиг в аргументах $x_i + \xi_i$ и $t + \tau$, домножим на $V_m^t(x, t)$ и усредним, получим следующую систему уравнений:

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\nu}{\rho_0} \Delta_{\xi} \right) \left\langle V_m^t(\bar{x}, t) \varphi(\bar{x} + \bar{\xi}, t + \tau) \right\rangle + 2 \frac{\partial}{\partial x_i} \langle V_k \rangle \frac{\partial}{\partial \xi_k} Q_{im}^{00}(\bar{\xi}, \tau) =$$

$$= \frac{1}{\rho_0} \Delta_{\xi} \left\langle V_m^t(\bar{x}, t) p^1(\bar{x} + \bar{\xi}, t + \tau) \right\rangle, \quad (2.29)$$

$$\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \frac{\nu}{\rho_0} \Delta_{\xi} \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \times$$

$$\times \left(\chi \left\langle V_m^t(\bar{x}, t) p^1(\bar{x} + \bar{\xi}, t + \tau) \right\rangle - n \left\langle V_m^t(\bar{x}, t) U^1(\bar{x} + \bar{\xi}, t + \tau) \right\rangle \right) -$$

$$- 2 \frac{\partial}{\partial x_i} \langle V_k \rangle \frac{\partial}{\partial \xi_k} Q_{im}^{00}(\bar{\xi}, \tau) = \frac{1}{\rho_0} \Delta_{\xi} \left\langle V_m^t(\bar{x}, t) p^1(\bar{x} + \bar{\xi}, t + \tau) \right\rangle, \quad (2.30)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \left\langle V_m^t(\bar{x}, t) U^1(\bar{x} + \bar{\xi}, t + \tau) \right\rangle + w_0^2 \left\langle V_m^t(\bar{x}, t) U^1(\bar{x} + \bar{\xi}, t + \tau) \right\rangle =$$

$$= -\varepsilon \left\langle V_m^t(\bar{x}, t) p^1(\bar{x} + \bar{\xi}, t + \tau) \right\rangle. \quad (2.31)$$

В выражениях (2.29)–(2.31) уже учтена двухмасштабность задачи:

$$\bar{V}_k(\bar{x} + \bar{\xi}, t + \tau) = \bar{V}_k(\bar{x}, t) + \xi_i \frac{\partial \bar{U}_k(x, t)}{\partial x_i}.$$

Введём следующие обозначения:

$$Q_m = \left\langle V_m^t(\bar{x}, t) \varphi(\bar{x} + \bar{\xi}, t + \tau) \right\rangle,$$

$$p_m = \left\langle V_m^t(\bar{x}, t) p^1(\bar{x} + \bar{\xi}, t + \tau) \right\rangle,$$

$$U_m = \left\langle V_m^t(\bar{x}, t) U^1(\bar{x} + \bar{\xi}, t + \tau) \right\rangle$$

и перепишем (1.29)–(1.31) в виде:

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\nu}{\rho_0} \Delta_{\xi} \right) Q_m + 2 \frac{\partial}{\partial x_i} \langle V_k \rangle \frac{\partial}{\partial \xi_k} Q_{im}^{00}(\bar{\xi}, \tau) = -\frac{1}{\rho_0} \Delta_{\xi} P_m, \quad (2.32)$$

$$\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \frac{\nu}{\rho_0} \Delta_{\xi} \frac{\partial}{\partial \tau} \right) (\chi p_m - n U_m) -$$

$$- 2 \frac{\partial}{\partial x_i} \langle V_k \rangle \frac{\partial}{\partial \xi_k} Q_{im}^{00}(\bar{\xi}, \tau) = \frac{1}{\rho_0} \Delta p_m, \quad (2.33)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} U_m + w_0^2 U_m = -\varepsilon p_m. \quad (2.34)$$

Осуществляя преобразования Фурье по переменным τ и ξ , получим из (2.32)–(2.34) следующие уравнения:

$$\left(w - \frac{\nu}{\rho_0} K^2 \right) Q_m + 2 \frac{\partial}{\partial x_i} \langle V_k \rangle K_k Q_{im}^{00}(\bar{K}, w) = -\frac{1}{\rho_0} K^2 P_m, \quad (2.35)$$

$$\frac{1}{\rho_0} \left(w^2 - \frac{\nu}{\rho_0} K^2 w \right) (\chi p_m - n U_m) - 2 \frac{\partial}{\partial x_i} \langle V_k \rangle K_k Q_{im}^{00}(\bar{K}, w) = \frac{K^2 P_m}{\rho_0}, \quad (2.36)$$

$$w^2 U_m + w_0^2 U_m = -\varepsilon p_m, \quad (2.37)$$

откуда после несложных вычислений найдём:

$$Q_m(\bar{x}, t, \bar{K}, w) = \frac{2 \frac{\partial}{\partial x_i} \langle V_k \rangle K_k Q_{im}^{00} \left(x + \frac{n\varepsilon}{w^2 + w_0^2} \right)}{\left(w - \frac{\nu}{\rho_0} K^2 \right) \left(x + \frac{n\varepsilon}{w^2 + w_0^2} \right) - K^2}.$$

Чтобы найти $Q_m(\bar{x}, 0, \bar{K}, 0)$, которое входит в уравнения Рейнольдса для усреднённых уравнений, необходимо проинтегрировать $Q_m(\bar{x}, t, \bar{K}, w)$ для всех \bar{K} и w , откуда получим:

$$Q_m(\bar{x}, t) = \alpha \operatorname{rot} \langle V_k(x, t) \rangle,$$

где

$$\alpha = \frac{8\pi}{3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{K^2 \left(\chi + \frac{n\varepsilon}{w^2 + w_0^2} \right) A(K, w) dK dw}{\left(w - \frac{\nu}{\rho_0} K^2 \right) \left(\chi + \frac{n\varepsilon}{w^2 + w_0^2} \right) - K^2}.$$

При интегрировании была использована формула

$$\int K_i K_j d\Omega = \frac{4\pi}{3} K^2 \delta_{ij}.$$

Таким образом, осуществлено замыкание уравнения (2.23) и получен член невязкой природы.

2.3. Генерация вихрей спиральной турбулентностью в жидкости с пузырьками газа

Итак, получена система уравнений, описывающих эволюцию средних движений на фоне мелкомасштабной спиральной турбулентности в жидкости с пульсирующими пузырьками газа:

$$\frac{\partial \bar{V}_i}{\partial t} = \alpha \operatorname{rot} \bar{V}_i - \frac{\nabla_i \bar{p}}{\rho_0} + \frac{\nu}{\rho_0} \Delta^2 \bar{V}_i, \quad (2.38)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{V}_i \rho_0) = 0, \quad (2.39)$$

$$\bar{\rho} = \rho_0 (1 - n \bar{U} + \chi \bar{p}), \quad (2.40)$$

$$\frac{d^2 \bar{U}}{dt^2} + w_0^2 \bar{U} = -\varepsilon \bar{p}. \quad (2.41)$$

Заметим, что новое слагаемое для потенциальных возмущений исчезает, поэтому потенциальные движения в такой системе затухают. Для вихревых же движений уравнение для завершённости отщепляется от (2.39)–(2.41) и принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{\Omega} + \alpha \operatorname{rot} \bar{\Omega} = \nu' \Delta \bar{\Omega}, \quad (2.42)$$

где ν' — суммарная кинематическая и турбулентная вязкость.

Уравнение (2.42) известно в теории α^2 -динамо магнитного поля. Заметим, что в отсутствие пузырьков коэффициент α обращается в нуль, что соответствует затуханию вихревых возмущений в несжимаемой жидкости. Заметим также, что при отсутствии спиральности в корреляторе мелкомасштабного поля скоростей крупномасштабные структуры также затухают.

Будем искать решение (2.42) в виде $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_k \exp(i\omega t - i(\bar{K} \bar{r}))$ и получим обычным способом [Краузе, Рэдлер, 1984] дисперсионное соотношение $(\omega - i\nu' K^2)^2 = -\alpha^2 K^2$, и инкремент неустойчивости: $\gamma = i\omega$, $\gamma = -\nu' K^2 + \alpha K$, $K_m = |\alpha| / 2\nu'$ достигает максимума $\gamma_m = \alpha^2 / 4\nu'$. Характерный размер образующейся при этом структуры — K_m .

Глава 3. РАССЕЯНИЕ ЗВУКА СПИРАЛЬНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТЬЮ

В данной главе обсуждается проблема распространения звука в турбулентной среде. Изучаются рассеянное звуковое поле и его статистические характеристики для идеального газа в адиабатическом приближении. В такой среде, как хорошо известно, могут существовать и вихревые движения. В однородной и стационарной сжимаемой жидкости в линейном приближении потенциальные и вихревые моды не связаны и, более того, завершённость не может возникнуть без внешних источников. Таким образом, если в такой ситуации в начальный момент времени создано потенциальное возмущение, то оно распространяется в виде звуковой волны. При наличии же турбулентной области в газовой среде потенциальные и вихревые движения в линейном приближении связаны и поэтому следует ожидать трансформации падающей звуковой волны в рассеянное звуковое поле и вихревые движения. Будем изучать вихревые движения, которые возникают при рассеянии акустических волн в турбулентной области [Belyan et al., 1991]. Рассмотрим также гиротропные свойства таких возмущений и их связь со спиральностью исходной турбулентности.

3.1. Исходные уравнения идеального газа

Проблема распространения звука в турбулентной среде обсуждалась в работах [Обухов, 1943; Татарский, 1953, 1981; Lighthill, 1953], где изучалось рассеянное звуковое поле и его статистические характеристики для идеального газа в адиабатическом приближении. В настоящем параграфе, в отличие от статьи [Kraichnan, 1953],

изучаются вихревые движения, которые возникают при рассеянии акустических волн в турбулентной области.

Для описания рассеяния звука в турбулентной среде воспользуемся системой уравнений гидродинамики идеального газа:

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{v} = -(\bar{v} \nabla) \bar{v} - \frac{1}{\rho} \nabla p, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \operatorname{div}(\rho \bar{v}) = 0, \quad (3.2)$$

$$\frac{d}{dt} s = \frac{\partial}{\partial t} s + (\bar{v} \nabla) s = 0, \quad (3.3)$$

$$s = C_V \ln p - C_p \ln \rho. \quad (3.4)$$

где \bar{v} , ρ , p — соответственно гидродинамическая скорость, плотность и давление; s — энтропия; C_V и C_p — теплоёмкости при постоянном объёме и давлении. Из системы (3.1)–(3.4) можно получить замкнутую систему уравнений относительно P и V :

$$\frac{1}{\gamma} \frac{d}{dt} \ln p = -\operatorname{div} \bar{v}, \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{v} = -(\bar{v} \nabla) \bar{v} - \frac{c^2}{\gamma} \nabla \ln p, \quad (3.6)$$

где $\gamma = C_p/C_V$, $c^2 = \gamma RT = \gamma(p/\rho)$ — адиабатическая скорость звука.

Пусть имеется турбулентная область, характеризующаяся скоростью \bar{v} и давлением p , удовлетворяющими системе уравнений (3.5), (3.6). Будем изучать поведение линейных возмущений на фоне такого заданного гидродинамического поля. Суммарное возмущённое поле скоростей и давлений

$$\left. \begin{aligned} \bar{v} &= \bar{\xi} + \bar{U}, \\ p &= p_a + p_0 \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

также удовлетворяет уравнениям (3.5), (3.6) и, после линеаризации этих уравнений, получим:

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{\xi} = -c_0^2 \nabla \Pi - \frac{T'}{T_0} \nabla \Pi - (\bar{U} \nabla) \bar{\xi} - (\bar{\xi} \nabla) \bar{U}, \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \Pi = -\operatorname{div}(\bar{\xi}) - (\bar{U} \nabla) \Pi, \quad (3.9)$$

где $\Pi = p_a / \gamma p_0$ — потенциал давления. При выводе (3.8), (3.9) учитывалось, что $\operatorname{div} \bar{U} = 0$.

3.2. Уравнения для вихревых возмущений, вызываемых звуком в турбулентной среде

В рамках полученной системы уравнений будем изучать распространение звуковой волны в турбулентной области, причём предполагается, что частота звуковой волны много больше, чем характерная частота турбулентного течения. Такое предположение соответствует гипотезе о несжимаемости невозмущённой турбулентности, т. е. при исследовании одного акта рассеяния звука рассматриваемая область полностью характеризуется её мгновенным снимком. Для решения системы (3.8), (3.9) в виде монохроматических волн

$$\bar{\xi}(t, x) = \bar{\xi}(x) \exp(-i\omega t),$$

$$\Pi(t, x) = \Pi(x) \exp(-i\omega t)$$

получим следующие уравнения для линейных величин [Kraichnan, 1953]:

$$i\omega \bar{\xi} = -c_0^2 \frac{T'}{T_0} \nabla \Pi - c_0^2 \nabla \Pi - (\bar{U} \nabla) \bar{\xi} - (\bar{\xi} \nabla) \bar{U}, \quad (3.10)$$

$$i\omega \Pi = \operatorname{div} (\bar{\xi}) + (\bar{U} \nabla) \Pi. \quad (3.11)$$

В работах [Обухов, 1943; Татарский, 1953, 1981; Kraichnan, 1953; Lighthill, 1953] в рамках уравнений (3.10), (3.11) изучались потенциальные движения, связанные с рассеянием акустических волн. В настоящем параграфе будем уделять основное внимание вихревым движениям, описываемым (3.10), (3.11), для этого представим $\bar{\xi}$ в виде

$$\bar{\xi} = \nabla \varphi + \bar{\xi}_B, \quad \operatorname{rot} (\bar{\xi}_B) \neq 0, \quad \nabla \bar{\xi}_B = 0, \quad (3.12)$$

где $\bar{\xi}_B$ — вихревая компонента линейных возмущений. Слагаемое $\nabla \varphi$ в (3.10) описывает обычный звук. Уравнение для вихревой части (3.12) получим, взяв ротор от уравнения (3.8):

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} (\bar{\xi}) = -\operatorname{rot} \left[c_0^2 \nabla \Pi + \frac{T'}{T_0} \nabla \Pi + (\bar{U} \nabla) \bar{\xi} + (\bar{\xi} \nabla) \bar{U} \right], \quad (3.13)$$

$$i\omega \operatorname{rot}(\bar{\xi}) = c_0^2 \operatorname{rot} \left(\frac{T'}{T_0} \nabla \Pi \right) + \operatorname{rot} \left((\bar{U} \nabla) \bar{\xi} + (\bar{\xi} \nabla) \bar{U} \right); \quad (3.14)$$

из уравнений (3.11) и соотношения (3.12) видно, что потенциал давления в звуковой волне связан с потенциальной составляющей скорости $\bar{\xi}$: $i\omega \Pi = -\Delta \varphi - (\bar{U} \nabla) \Pi$.

Завихренная компонента приводит к появлению у звуковой волны, распространяющейся в турбулентной области, поперечной составляющей. Это можно показать из уравнений (3.11) и (3.10). Подставив уравнение (3.11) в (3.10), получим:

$$i\omega \bar{\xi} = \frac{c_0^2}{i\omega} \nabla \left(\operatorname{div}(\bar{\xi}) + (\bar{U} \nabla) \Pi \right) + \frac{c_0^2 T'}{i\omega T^0} \nabla \left(\operatorname{div}(\bar{\xi}) + (\bar{U} \nabla) \Pi \right) + (\bar{U} \nabla) \bar{\xi} + (\bar{\xi} \nabla) \bar{U}.$$

Воспользуемся снова уравнением (3.11), удерживая только первое слагаемое, вторым слагаемым пренебрегаем по сравнению с первым:

$$i\omega \bar{\xi} = \frac{c_0^2}{i\omega} \nabla \left(\operatorname{div}(\bar{\xi}) + \frac{1}{i\omega} (\bar{U} \nabla) \operatorname{div}(\bar{\xi}) \right) + \frac{c_0^2 T'}{i\omega T^0} \nabla \left(\operatorname{div}(\bar{\xi}) + \frac{1}{i\omega} (\bar{U} \nabla) \operatorname{div}(\bar{\xi}) \right) + (\bar{U} \nabla) \bar{\xi} + (\bar{\xi} \nabla) \bar{U}.$$

Перегруппируем члены предыдущего уравнения:

$$\left(\delta_{ik} + \frac{c_0^2}{\omega^2} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_{ki}} \right) \xi_k = -\frac{c_0^2}{\omega^2} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{i\omega} (\bar{U} \nabla) \operatorname{div}(\bar{\xi}) \right) - \frac{c_0^2 T'}{\omega^2 T^0} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\operatorname{div}(\bar{\xi}) + \frac{1}{i\omega} (\bar{U} \nabla) \operatorname{div}(\bar{\xi}) \right) + \frac{1}{i\omega} \left((\bar{U} \nabla) \bar{\xi} + (\bar{\xi} \nabla) \bar{U} \right). \quad (3.15)$$

Левая часть уравнения (3.15) — это проекционный оператор, который равен нулю, если волна продольная, если же у волны есть поперечная составляющая, то проекционный оператор нулю не равен. Интересуясь в дальнейшем влиянием турбулентных пульсаций скорости на корреляционные свойства звука, пренебрежём пульсациями температуры. Учёт температурных флуктуации может быть выполнен как аддитивная поправка к полученному результату, поскольку для несжимаемой турбулентной области выполняется соотношение $\langle UT' \rangle = 0$.

Итак, выпишем систему уравнений для исследования завихренности рассеянного звука. Из (3.14), (3.10), (3.11) имеем

$$\omega^2 \text{rot}(\bar{\xi}) = -i\omega \text{rot}((\bar{U}\nabla)\bar{\xi} + (\bar{\xi}\nabla)\bar{U}), \quad (3.16)$$

$$\omega^2 \bar{\xi} + i\omega c_0^2 \nabla \Pi = -i\omega((\bar{U}\nabla)\bar{\xi} + (\bar{\xi}\nabla)\bar{U}), \quad (3.17)$$

$$i\omega \Pi = \text{div}(\bar{\xi}) + (\bar{U}\nabla)\Pi. \quad (3.18)$$

3.3. Корреляционные свойства рассеянного звука

В рамках приведённой в предыдущем параграфе системы уравнений рассмотрим однократное рассеяние падающей на турбулентную область звуковой волны [Татарский, 1981]. Потребуем для этого выполнения следующего условия: $\lambda \geq L_0$, где λ — длина звуковой волны; L_0 — радиус корреляции флуктуаций [Татарский, 1981]. Представим суммарное поле в виде

$$\bar{\xi} = \bar{\xi}^0 + \bar{\xi}^1, \quad \Pi = \Pi^0 + \Pi^1,$$

где $\bar{\xi}^0$, Π^0 — поле падающей плоской звуковой волны, удовлетворяющей уравнениям:

$$\omega^2 \text{rot}(\bar{\xi}^0) = 0, \quad (3.19)$$

$$\omega^2 \bar{\xi}^0 + i\omega c_0^2 \nabla \Pi^0 = 0, \quad (3.20)$$

$$i\omega \Pi^0 = \text{div}(\bar{\xi}^0). \quad (3.21)$$

Для рассеянного поля $\bar{\xi}^1$, Π^1 имеем:

$$\omega^2 \text{rot}(\bar{\xi}^1) = -i\omega \text{rot}((\bar{U}\nabla)\bar{\xi}^0 + (\bar{\xi}^0\nabla)\bar{U}), \quad (3.22)$$

$$\omega^2 \bar{\xi}^1 + i\omega c_0^2 \nabla \Pi^1 = -i\omega((\bar{U}\nabla)\bar{\xi}^0 + (\bar{\xi}^0\nabla)\bar{U}), \quad (3.23)$$

$$i\omega \Pi^1 = \text{div}(\bar{\xi}^1) + (\bar{U}\nabla)\Pi^0. \quad (3.24)$$

Воспользовавшись системой уравнений (3.22)–(3.24), вычислим сначала энергосодержание вихревой компоненты рассеянного поля в турбулентной области. Построим для этого скалярное произведение $(\text{rot}(\bar{\xi}^1), \text{rot}^*(\bar{\xi}^1))$, где * означает комплексное сопряжение:

$$\left\langle \text{rot} \left(\bar{\xi}^1 \right), \text{rot}^* \left(\bar{\xi}^1 \right) \right\rangle = \frac{\Phi^{0^2}}{\omega^2} \left[\left(\frac{\partial U_m}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_m} \right) \left(\frac{\partial U_f}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_f} \right) k^2 k_m k_f + \right. \\ \left. + \left(k_m \frac{\partial^2 U_k}{\partial x_j \partial x_m} \right) (k \nabla) \left(\frac{\partial U_k}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_k} \right) \right]. \quad (3.25)$$

Падающее звуковое поле здесь представлено в виде

$$\bar{\xi}^0 = \nabla \Phi^0 = \nabla (\Phi^0 \exp(i\bar{k}\bar{r})) = i\bar{k}^0 \exp(i\bar{k}\bar{r});$$

усреднив полученное выражение по ансамблю турбулентных пульсаций, найдём среднюю энергию, заключённую в вихревой компоненте рассеянного поля:

$$\left\langle \left\langle \text{rot} \left(\bar{\xi}^1 \right), \text{rot}^* \left(\bar{\xi}^1 \right) \right\rangle \right\rangle = \frac{\Phi^{0^2}}{\omega^2} \left\langle \left[\left(\frac{\partial U_m}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_m} \right) \left(\frac{\partial U_f}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_f} \right) k^2 k_m k_f + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(k_m \frac{\partial^2 U_k}{\partial x_j \partial x_m} \right) (k \nabla) \left(\frac{\partial U_k}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_k} \right) \right] \right\rangle. \quad (3.26)$$

Из уравнений (3.10)–(3.11) видно, что статистические характеристики рассеянного поля определяются статистическими свойствами турбулентных пульсаций, в частности, можно ожидать, что гиротропные свойства турбулентности будут проявляться в рассеянном поле.

Построим псевдоскаляр вида $\frac{1}{2} \left\langle \left(\left(\bar{\xi}^1, \text{rot}^* \left(\bar{\xi}^1 \right) \right) + \left(\bar{\xi}^1, \text{rot}^* \left(\bar{\xi}^1 \right) \right) \right) \right\rangle$, имеющий смысл спиральности. Воспользовавшись для этого уравнениями (3.16) и (3.17), получим:

$$\frac{1}{2} \omega^4 \left\langle \left(\bar{\xi}^1, \text{rot}^* \left(\bar{\xi}^1 \right) \right) + \left(\bar{\xi}^1, \text{rot}^* \left(\bar{\xi}^1 \right) \right) \right\rangle + \\ + \frac{1}{2} c_0^2 (i\omega) \left\langle \left(\text{rot}^* \left(\bar{\xi}^1 \right) \right) - \left(\nabla \Pi^1, \text{rot}^* \left(\bar{\xi}^1 \right) \right) \right\rangle = \\ = 0^2 \varepsilon_{mp} k_k k_m \left\langle \frac{\partial^2 U_p}{\partial x_n \partial x_m} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right\rangle. \quad (3.27)$$

Как отмечалось выше, градиент потенциала давления связан с потенциальной частью звуковых колебаний, которые вследствие (3.24) не зависят от вихревой части и, таким образом,

$$\frac{1}{2}\omega^4 \left\langle \left(\bar{\xi}^1, \text{rot}^*(\bar{\xi}^1) \right) + \left(\bar{\xi}^1, \text{rot}^*(\bar{\xi}^1) \right) \right\rangle = \varphi^{0^2} \varepsilon_{inp} k_k k_m \left\langle \frac{\partial^2 U_k}{\partial x_n \partial x_m} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right\rangle. \quad (3.28)$$

Отметим, что спиральность турбулентного поля скоростей определяется как

$$\alpha = \langle (\bar{U}, \text{rot} \bar{U}) \rangle = \left\langle U_i \varepsilon_{inp} \frac{\partial U_p}{\partial x_n} \right\rangle = \varepsilon_{inp} \left\langle U_i \varepsilon_{inp} \frac{\partial U_p}{\partial x_n} \right\rangle. \quad (3.29)$$

Глава 4. ГЕНЕРАЦИЯ КРУПНОМАСШТАБНЫХ СТРУКТУР НА СДВИГОВЫХ ТЕЧЕНИЯХ

В данной главе изучается устойчивость однородного турбулентного сдвигового течения по отношению к крупномасштабным возмущениям скорости. Задача решается в первом порядке теории возмущений [Chkhetiani et al., 1993, 1994; Petrosyan, Polunine, 1997]. Условия применимости данного приближения будут обсуждены ниже. (Далее мы будем называть это течение турбулентным течением Куэтта). Рассмотрим следующий, довольно часто встречающийся анизотропный фактор — существование наряду с турбулентностью крупномасштабного сдвигового течения — и исследуем эволюцию вихревых возмущений на фоне этого течения, при наличии мелкомасштабной спиральности (отражающей, к примеру, глобальное вращение всей системы). Спиральность, как выясняется, ведёт к интенсивному росту возмущений на начальной стадии. Растут даже те моды, которые в отсутствие спиральности только затухали. На больших временах все возмущения затухают, т.е. на мелкомасштабном турбулентном фоне вспыхивают и исчезают трёхмерные вихревые образования. Время жизни подобной структуры зависит от средних характеристик турбулентного потока.

4.1. Анизотропная турбулентность однородного сдвигового течения

Уравнения Навье — Стокса являются исходным пунктом исследования:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V} = -\nabla P + \nu_0 \Delta \mathbf{V} + \mathbf{F}, \quad (4.1)$$

$$\nabla \mathbf{V} = 0. \quad (4.2)$$

Здесь P — давление; ν_0 — кинематическая вязкость. Уравнения (4.1)–(4.2) могут быть переписаны после разложения гидродинамических полей на осреднённую и пульсационную компоненты:

$$\mathbf{V} = \bar{\mathbf{V}} + \mathbf{V}^t, \quad (4.3)$$

$$P = \bar{P} + P^t, \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{V}}}{\partial t} + (\bar{\mathbf{V}}\nabla)\bar{\mathbf{V}} + \langle (\mathbf{V}^t\nabla)\mathbf{V}^t \rangle = -\nabla \bar{P} + \nu_0 \Delta \bar{\mathbf{V}}, \quad (4.5)$$

$$\nabla \bar{\mathbf{V}} = 0, \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}^t}{\partial t} + (\mathbf{V}^t\nabla)\mathbf{V}^t - \langle (\mathbf{V}^t\nabla)\mathbf{V}^t \rangle + (\mathbf{V}^t\nabla)\bar{\mathbf{V}} + (\bar{\mathbf{V}}\nabla)\mathbf{V}^t = -\nabla P^t + \nu_0 \Delta \mathbf{V}^t + \mathbf{f}^t, \quad (4.7)$$

$$\nabla \mathbf{V}^t = 0. \quad (4.8)$$

Уравнения (4.5)–(4.8) для плоского турбулентного сдвига $\bar{\mathbf{V}} = \bar{\mathbf{U}} = (Sx_2, 0, 0)$ разделяются на два независимых блока. Это связано с постоянством профиля сдвига. Соответственно, уравнения для корреляционных функций являются системой с постоянными коэффициентами и, турбулентность, будучи однородной, не изменяет средний профиль потока.

Общий вид корреляционного тензора можно определить из феноменологических принципов [Бэтчелор, 1955], но определение его формы в случае более чем одного выделенного направления — достаточно громоздкая процедура. Тем не менее, эта задача облегчается при наличии в системе следующего малого параметра:

$$\varepsilon = \frac{\lambda_{cor} \bar{U}}{v' L} \ll 1, \text{ который характеризует отношение среднего времени}$$

оборота турбулентного вихря к характерному времени среднего сдвигового течения. В данном случае можно разложить корреляционный тензор в ряд по степеням ε [Lumley, 1967]. В настоящем исследовании ограничиваемся первым порядком этого разложения. Влияние сдвига проводится в рамках «первого приближения по среднему движению» [Краузе, Рэдлер, 1984; Моисеев и др., 1988], аналогичного приближению “rapid distortion turbulence theory” [Бэтчелор, 1955; Hunt, Carruthes, 1990]:

$$\hat{Q}_{ij}(\mathbf{k}, w) = Q_{ij}^0(\mathbf{k}, w) + \varepsilon \hat{Q}^1(\mathbf{k}, S, w) \left(\frac{\partial \bar{U}_m}{\partial x_n} + \frac{\partial \bar{U}_n}{\partial x_m} \right) \left(\delta_{im} - \frac{k_i k_m}{k^2} \right) \left(\delta_{jn} - \frac{k_j k_n}{k^2} \right) +$$

$$+ i\varepsilon \hat{G}^1(\mathbf{k}, w) \frac{\partial \bar{U}_p}{\partial x_r} (\delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}) \left(\delta_{pn} - \frac{k_p k_n}{k^2} \right) \varepsilon_{mrf} k_f + O(\varepsilon^2). \quad (4.9)$$

Здесь:

$$\hat{Q}_{ij}^0(\mathbf{k}, w) = \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \frac{E(k, w)}{4\pi k^2} + i\varepsilon_{ijk} k_k \frac{H(k, w)}{8\pi k^4} \quad (4.10)$$

— корреляционный тензор в отсутствие сдвига (0-й порядок) Антисимметричная часть отражает присутствие спиральности в системе. Значение $H(k, w)$ ограничено по теореме Бохнера—Хинчина следующим неравенством [Краузе, Рэдлер, 1984]: $|H(k, w)| \leq 2kE(k, w)$.

Дополнительные члены тензора Q^1 и G^1 , вычисленные в «первом приближении по среднему движению» [Краузе, Рэдлер, 1984; Krause, Rudiger, 1974] имеют вид:

$$\hat{Q}^1(\mathbf{k}, S, w) = \frac{S \left(2S \frac{k_1 k_2}{k^2} - v_0 k^2 \right) \frac{E(k, w)}{2\pi k^2}}{\left(2S \frac{k_1 k_2}{k^2} - v_0 k^2 \right)^2 + w^2},$$

$$\hat{G}^1(\mathbf{k}, S, w) = \frac{S \left(2S \frac{k_1 k_2}{k^2} - v_0 k^2 \right) \frac{H(k, w)}{4\pi k^4}}{\left(2S \frac{k_1 k_2}{k^2} - v_0 k^2 \right)^2 + w^2},$$

Таким образом, корреляционный тензор представляется в виде суммы изотропной (но спиральной) и анизотропной частей. Учёт последующих степеней разложения в случае течения Куэтта приводит в основном к ренормировке коэффициентов перед анизотропными членами.

4.2. Рейнольдсовское описание турбулентного течения Куэтта

Плоское сдвиговое течение $\bar{U}_i = \hat{S}_{ik} x_k$ и однородная турбулентность \mathbf{V}^t с известными статистическими характеристиками рассма-

триваются как исходное состояние. Предположим, что в момент времени $t=0$ возникло малое крупномасштабное возмущение среднего профиля скорости \bar{V} . Его появление влечёт за собой нарушение однородности турбулентного фона — \bar{V} появление неоднородной пульсационной скорости [Краузе, Рэдлер, 1984; Krause, Rudiger, 1974; Bayly, Yakhot, 1986]. Используя аппроксимационное приближение первого порядка, мы получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{V}_i}{\partial t} + \hat{S}_{km} x_m \frac{\partial \bar{V}_i}{\partial x_k} + \hat{S}_{ik} \bar{V}_k + \left\langle \tilde{V}_k \frac{\partial V_i^t}{\partial x_k} \right\rangle + \left\langle V_k^t \frac{\partial \tilde{V}_i}{\partial x_k} \right\rangle = \\ = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial x_k} + v_0 \Delta \bar{V}_i, \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial \bar{V}_i}{\partial x_i} = 0, \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial \tilde{V}_i}{\partial t} + \hat{S}_{km} x_m \frac{\partial \tilde{V}_i}{\partial x_k} + \hat{S}_{ik} \tilde{V}_k + \left(\bar{V}_k \frac{\partial V_i^t}{\partial x_k} + V_k^t \frac{\partial \bar{V}_i}{\partial x_k} \right) = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial x_k} + v_0 \Delta \tilde{V}_i, \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial \tilde{V}_i}{\partial x_i} = 0. \quad (4.14)$$

Это приближение соответствует только одной итерации по теории возмущений. Результаты, полученные в этом приближении, строго справедливы только для малых чисел Струхала, характеризующих отношение среднего времени существования турбулентно-

го вихря к его периоду вращения: $Sr = \frac{v^t \tau_{cor}}{\lambda^t} \ll 1$. Учитывая ограничения предыдущего параграфа, отметим необходимость

выполнения ещё одного неравенства: $\frac{\bar{U} \tau_{cor}}{L} \ll \frac{v^t \tau_{cor}}{\lambda^t}$. Оно очевидно

выполняется для мелкомасштабной части турбулентного фона.

Для замыкания системы (4.11)–(4.14) необходимо вычислить неоднородный корреляционный тензор $\langle \tilde{V}_m V_n^t \rangle$. Учёт основного сдвига удобно проводить в сопутствующей системе отсчёта [Краузе, Рэдлер, 1984; Marcus, Press, 1977]. Для перехода к этой системе необходимо ввести матрицу $\gamma_{ij}(t)$, удовлетворяющую уравнению [Краузе, Рэдлер, 1984]:

$$\frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial t} = \hat{S}_{ik} \gamma_{kj}. \quad (4.15)$$

Здесь матрица \hat{S}_{ik} определяется градиентами невозмущённого течения:

$$\hat{S}_{ik} = \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k}. \quad (4.16)$$

При малых t решение имеет вид

$$\gamma_{ij}(t) = \delta_{ij} + \hat{S}_{ij} t. \quad (4.17)$$

Отметим, что в случае плоского течения Куэтта оно является точным решением уравнения (4.15). Введём движущуюся y -координату, совпадающую с неподвижной координатой x в начальный момент времени и связанную с ней соотношением

$$x_i = \gamma_{ij}(t) y_j, \quad (4.18)$$

и наоборот:

$$y_i = \gamma_{ij}(-t) x_j, \quad (4.19)$$

Обозначим скорость в сопутствующей системе отсчёта как $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, а в неподвижной системе отсчёта — как $\mathbf{u}(\mathbf{y}, t)$ (аналогичные соотношения можно получить и для сил — $f(\mathbf{y}, t)$ и $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$). После исключения основного (невозмущённого) течения $\bar{\mathbf{U}}(\mathbf{x})$ они связаны следующими соотношениями:

$$u_i = \gamma_{ij}(t) v_j, \quad v_i = \gamma_{ij}(-t) u_j, \quad (4.20)$$

$$f_i = \gamma_{ij}(t) \mathbf{f}_j, \quad \mathbf{f}_i = \gamma_{ij}(-t) f_j. \quad (4.21)$$

Возмущение скорости в сопутствующей системе отсчёта (\mathbf{y}, t) описывается следующим уравнением:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_i}{\partial t} + 2\hat{S}_{ik} v_k - v_0 \gamma_{mr}(-t) \gamma_{nr}(-t) \frac{\partial^2 v_i}{\partial y_m \partial y_n} = \\ = -\gamma_{ir}(-t) \gamma_{kr}(-t) \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial y_k} + f_i(\mathbf{y}, t), \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$\frac{\partial v_k}{\partial y_k} = 0, \quad (4.23)$$

После пространственного фурье-преобразования и исключения давления система (4.22)–(4.23) приводится к виду

$$\frac{\partial \hat{v}_i(\mathbf{k}, t)}{\partial t} + v_0 \gamma_{mr}(-t) \gamma_{nr}(-t) k_m k_n \hat{v}_i(\mathbf{k}, t) + \left(\delta_{ip} - \frac{\gamma_{im}(-t) \gamma_{nm}(-t) k_n k_p}{\gamma_{mr}(-t) \gamma_{nr}(-t) k_m k_n} \right) \left[2S \delta_{p1} \hat{v}_2(\mathbf{k}, t) - \hat{f}_p(\mathbf{k}, t) \right] = 0, \quad (4.24)$$

$$k_i \hat{v}_i(\mathbf{k}, t) = 0. \quad (4.25)$$

Основной задачей на данном этапе исследования является определение неоднородных напряжений Рейнольдса $\langle \tilde{\mathbf{V}}_m \mathbf{V}_n^t \rangle$. В приближении малых чисел Струхала можно ограничиться первым членом разложения в ряд по ε . Фактически это соответствует пренебрежению временной зависимостью коэффициентов в уравнении (4.24). Для неоднородной компоненты турбулентного поля скорости $\hat{v}_i(\mathbf{k}, w)$ мы получим в (\mathbf{k}, w) -представлении следующее соотношение:

$$\left(-iw + v_0 k^2 \right) \hat{v}_i(\mathbf{k}, w) + 2S \left(\delta_{i1} - \frac{k_i k_1}{k^2} \right) \hat{v}_2(\mathbf{k}, w) = -i \left(\delta_{ip} - \frac{k_i k_p}{k^2} \right) \times \\ \times (\delta_{km} \delta_{pn} + \delta_{kn} \delta_{pm}) k_k \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d\mathbf{k}' dw' \hat{v}_m^t(\mathbf{k} - \mathbf{k}', w - w') \tilde{v}_n(\mathbf{k}', w'), \quad (4.26)$$

$$k_i \hat{v}_i = 0. \quad (4.27)$$

Дополнительно следует отметить, что, поскольку указанное приближение соответствует короткокоррелированной турбулентности, то для скоростей \mathbf{v}^t и $\bar{\mathbf{v}}$ в соотношениях (4.26)–(4.27) могут быть взяты их значения в фиксированной системе отсчёта, т. е. мы можем использовать \mathbf{V} вместо \mathbf{v} в последующих вычислениях. Решения (4.26)–(4.27):

$$\hat{V}_i(\mathbf{k}, w) = -iR_{sp} \left(\delta_{ip} - \frac{k_i k_p}{k^2} \right) (\delta_{km} \delta_{pn} + \delta_{kn} \delta_{pm}) k_k \times \\ \times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d\mathbf{k}' dw' \hat{V}_m^t(\mathbf{k} - \mathbf{k}', w - w') \bar{V}_n(\mathbf{k}', w'), \quad (4.28)$$

где

$$R_{sp}(\mathbf{k}', w') = \frac{1}{(v_0 k'^2 - iw')} \left(\delta_{sp} - 2S \frac{\left(\delta_{s1} - \frac{k'_s k'_1}{k'^2} \right)}{\left(v_0 k'^2 - 2S \frac{k'_1 k'_2}{k'^2} - iw' \right)} \delta_{2p} \right). \quad (4.29)$$

Таким образом, рейнольдсовские напряжения $\left\langle \left\langle \tilde{V}_k \frac{\partial V_i^t}{\partial x_k} \right\rangle \right\rangle + \left\langle \left\langle V_k^t \frac{\partial \tilde{V}_i}{\partial x_k} \right\rangle \right\rangle$ имеют вид

$$\begin{aligned} \left\langle \hat{T}(\mathbf{k}, w) \right\rangle_i &= -k_r \hat{V}(\mathbf{k}, w) (\delta_{rs} \delta_{it} + \delta_{rt} \delta_{is}) (\delta_{jm} \delta_{pn} + \delta_{jn} \delta_{pm}) \times \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d\mathbf{k}' dw' R_{sp}(\mathbf{k}', w') k'_f \hat{Q}_{im}(\mathbf{k} - \mathbf{k}', w - w'). \end{aligned} \quad (4.30)$$

В этом выражении волновой вектор \mathbf{k}' и частота w' соответствуют мелкомасштабным турбулентным пульсациям, а \mathbf{k} и w — крупномасштабным движениям. В соответствии с двухмасштабностью задачи можно положить $|\mathbf{k}'| \gg |\mathbf{k}|$, $|w'| \gg |w|$ и использовать следующую аппроксимацию:

$$\hat{Q}_{im}(\mathbf{k} - \mathbf{k}', w - w') \approx \hat{Q}_{im}(-\mathbf{k}', -w') + \frac{\partial \hat{Q}_{im}(-\mathbf{k}', -w')}{\partial k'_l} k_l. \quad (4.31)$$

После усреднения (4.30) по пространственным углам получим:

$$\begin{aligned} \left\langle \hat{T}(\mathbf{k}, w) \right\rangle_i &= -i\alpha S (\delta_{it} \delta_{1r} + \delta_{rt} \delta_{1i}) \varepsilon_{t2n} k_r \hat{V}_n(\mathbf{k}, w) - (v_0 + v_t) |\mathbf{k}|^2 \hat{V}_i(\mathbf{k}, w) - \\ &- v_t^a \left(\begin{array}{c} 2,28\delta_{i1} \delta_{mr} \delta_{2n} - 0,53\delta_{i2} \delta_{mr} \delta_{1n} + 1,03\delta_{ir} \delta_{1m} \delta_{2n} - \\ - 1,20\delta_{ir} \delta_{2m} \delta_{1n} + 0,17\delta_{1m} \delta_{2r} \delta_{ni} \end{array} \right) k_m k_r \tilde{\tilde{V}}_n(k, w), \end{aligned} \quad (4.32)$$

где

$$\alpha = \frac{4}{15} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dq dw \frac{\hat{H}(q, w)}{(v_0 q^2 - iw)^2}; \quad (4.33)$$

$$v_t = \frac{3}{5} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dq dw \frac{\hat{E}(q, w)}{(v_0 q^2 - iw)}; \quad (4.34)$$

v_{imm}^a — тензор анизотропной вязкости, в который даёт вклад и гиротропная часть коррелятора. Более подробный анализ возникающих здесь интересных эффектов дан в следующем параграфе.

Проверка полученного результата по виду напряжений Рейнольдса может быть проведена на основании соображений симметрии. Имеются однородный тензор S_{im} градиентов сдвига, единичный, антисимметричный, и скорость возмущения с её градиентами. В предположении существования спиральности можно построить единственную симметричную необращающуюся в нуль комбинацию для тензора напряжений Рейнольдса:

$\langle u_i u_j \rangle = \alpha^* (S_{im} \varepsilon_{mjk} \bar{V}_k + S_{jm} \varepsilon_{mik} \bar{V}_k)$. Непосредственная проверка приводит к совпадению феноменологических и теоретических результатов. Относительный вклад гиротропной и анизотропно-вязкой частей рейнольдсовых напряжений можно оценить как

$$\frac{T_h}{T_{visc}^a} \approx \frac{H_{tur} L_{per}}{E_{tur}}. \text{ Здесь: } H_{tur}, E_{tur} \text{ обозначают соответственно среднюю спиральность и энергию турбулентного течения; } L_{per} \text{ — масштаб возмущения.}$$

Поскольку рассматривается эволюция крупномасштабных возмущений, вышеприведённое соотношение будет $\gg 1$ и можно пренебречь дополнительными анизотропными вязкими членами в сравнении с гиротропными. Окончательно уравнения для крупномасштабных возмущений принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{V}_i}{\partial t} + Sx_2 \frac{\partial \bar{V}_i}{\partial x_1} + S\delta_{i1} \bar{V}_2 + \alpha S(\delta_{ii} \delta_{1r} + \delta_{i1} \delta_{ir}) \varepsilon_{i2n} \frac{\partial \bar{V}_n}{\partial x_r} = \\ = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + v^* \Delta \bar{V}_i, \end{aligned} \quad (4.35)$$

$$\frac{\partial \bar{V}_i}{\partial x_i} = 0. \quad (4.36)$$

Здесь $v^* = v_0 + v_t$.

4.3. Обратный каскад энергии в турбулентном течении Куэтта

Уравнения (4.35)–(4.36) удобно привести к следующему виду:

$$\frac{\partial \bar{V}_2}{\partial t} + Sx_2 \frac{\partial \bar{V}_2}{\partial x_1} = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial x_2} + v^* \Delta \bar{V}_2, \quad (4.37)$$

$$\frac{\partial \bar{W}_2}{\partial t} + Sx_2 \frac{\partial \bar{W}_2}{\partial x_1} + S \frac{\partial V_2}{\partial x_3} - \alpha S \left(\frac{\partial \bar{W}_2}{\partial x_3} + \frac{\partial^2 \bar{V}_2}{\partial x_1 \partial x_2} \right) = v^* \Delta \bar{W}_2, \quad (4.38)$$

$$\Delta P = 2\alpha S \frac{\partial \bar{W}_2}{\partial x_1} - 2S \frac{\partial \bar{V}_2}{\partial x_1}, \quad (4.39)$$

где $\bar{W}_2 = \frac{\partial \bar{V}_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \bar{V}_3}{\partial x_1}$.

В соответствии с однородностью основного течения уравнения инвариантны относительно замены: $\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r} + \mathbf{a} + St a_2 \mathbf{e}_1$, здесь \mathbf{e}_i — единичный вектор, сонаправленный с соответствующей координатной осью, \mathbf{a} может быть произвольным постоянным вектором. Тогда исследуемые уравнения допускают существование решений в следующем виде:

$$\bar{\mathbf{V}} = \mathbf{V}(t) \exp(i\mathbf{k}(t)\mathbf{r}), \quad (4.40)$$

Волновой вектор здесь уже зависит от времени как

$$\mathbf{k}(t) = \mathbf{k}(0) - St k_1(0) \mathbf{e}_2. \quad (4.41)$$

Подобная замена использовалась при линейном анализе в плоских сдвиговых течениях, как в обычном, так и в стратифицированном и сжимаемом случаях [Городцов, 1988; Chagelishvili et al., 1993; Marcus, Press, 1977] (подробнее в разд. 4.5). Это преобразование позволяет представить систему уравнений (4.36)–(4.39) в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений с зависящими от времени коэффициентами:

$$\frac{\partial V_2}{\partial \tau} - 2 \frac{k_1 k_2}{k^2} V_2 + 2\alpha \frac{k_1 k_2}{k^2} W_2 + \frac{v_*}{Sk^2 V_2} = 0, \quad (4.42)$$

$$\frac{\partial W_2}{\partial \tau} - i\alpha k_3 W_2 + (\alpha k_1 k_2 + i k_3) V_2 + \frac{v_*}{Sk^2 W_2} = 0, \quad (4.43)$$

$$\tau = St.$$

Моды с различными \mathbf{k} образуют полный набор решений, так как в момент времени $t = 0$ решение имеет вид $\mathbf{V}(0) \exp(i\mathbf{k}(0)\mathbf{r})$; соответственно это решение описывает эволюцию любого начального возмущения. Полный анализ полученных уравнений можно провести только численно и мы рассмотрим важные частные случаи, допускающие аналитический подход.

A. $k_1 = 0$.

В этом предельном случае (когда начальное возмущение «растянуто» вдоль оси течения) получаем простое затухающее осциллирующее решение:

$$\mathbf{k}(t) = (0, k_2(0), k_3(0)).$$

$$V_1(t) = \left[V_1(0) \exp(-i\alpha k_3 \tau) + V_2(0) \frac{1 - \exp(-i\alpha k_3 \tau)}{i\alpha k_3} \right] \exp(-v_* k^2 t), \quad (4.44)$$

$$V_2(t) = V_2(0) \exp(-v_* k^2 t), \quad (4.45)$$

$$V_3 = V_2(0) \exp(-v_* k^2 t). \quad (4.46)$$

В пределе $\alpha \rightarrow 0$, $v_* \rightarrow 0$ решение преобразовывается в хорошо известную нелокальную моду с линейным ростом амплитуды по времени [Ellingsen, Palm, 1975].

Б. $k_3 = 0$.

$$\mathbf{k}(t) = (k_1(0), k_2(0) - \tau k_1(0), 0).$$

Это очевидно вырожденный случай. Однако именно здесь можно получить полное аналитическое решение, хорошо иллюстрирующее особенности влияния спиральности на устойчивость основного состояния.

После исключения вязкой экспоненты $\exp\left(-v_* \int_0^\tau k^2(s) ds\right)$ и замены переменных $\tau \rightarrow k(\tau)$ получим:

$$\frac{d\varphi}{dk} + \frac{2}{k} = 2\alpha \frac{\psi}{k}, \quad (4.47)$$

$$\frac{d\psi}{dk} = \alpha k \varphi. \quad (4.48)$$

Здесь $\varphi = \exp\left[v_* \int_0^\tau k^2(s) ds\right] V_2$; $\psi = \exp\left[v_* \int_0^\tau k^2(s) ds\right] W_2$; φ и ψ удовлетворяют следующим уравнениям:

$$k^2 \frac{d^2 \varphi}{dk^2} + 3k \frac{d\varphi}{dk} - 2\alpha^2 k^2 = 0, \quad (4.49)$$

$$k^2 \frac{d^2 \psi}{dk^2} + k \frac{d\psi}{dk} - 2\alpha^2 k^2 \psi = 0, \quad (4.50)$$

решение которых выписывается через цилиндрические функции. Таким образом:

$$V_2 = \left(c_1 \frac{I_1(\sqrt{2}\alpha k(\tau))}{k(\tau)} + c_2 \frac{K_1(\sqrt{2}\alpha k(\tau))}{k(\tau)} \right) \exp \left(-v_* \int_0^t k^2(t') dt' \right), \quad (4.51)$$

$$W_2 = \left(d_1 I_0(\sqrt{2}\alpha k(\tau)) + d_2 K_0(\sqrt{2}\alpha k(\tau)) \right) \exp \left(-v_* \int_0^t k^2(t') dt' \right), \quad (4.52)$$

I_m, K_m — функции Бесселя комплексного аргумента. Постоянные c_1, c_2, d_1, d_2 определяются из начальных условий. При нулевой спиральности ($\alpha = 0$) и вязкости ($v_* = 0$) получим уже известное решение [Городцов, 1988; Chagelishvili et al., 1993]:

$$V_2 = V_2(0) \frac{k^2(0)}{k^2(\tau)}. \quad (4.53)$$

Как видно, решение сильно зависит от начального соотношения между волновыми векторами. Эволюция компоненты скорости V_2 для различных начальных значений k_1/k_2 в сравнении со случаем нулевой спиральности (штрихованные кривые) приведена на рис. 4.1–4.7. Кривая 1 соответствует $c_1 = 1, c_2 = 0$; кривая 2 — $c_1 = 0, c_2 = 1$.

Как видно на рис. 4.1–4.7, максимальный рост происходит при малых начальных значениях k_1/k_2 , т.е. возмущений, вытянутых вдоль оси течения. В работе [Chagelishvili et al., 1993] аналогичный рост возмущений в ламинарном случае рассматривался как свидетельство перехода в турбулентное состояние для возмущений в жидкости этого типа. Добавим, что при наличии спиральности растут даже те моды, которые в ее отсутствие только затухали.

В. Общий случай: ($k_1 \neq 0, k_2 \neq 0$).

Система уравнений (4.52)–(4.53) переписывается как

$$\frac{d^2\varphi}{dk^2} - \left[\alpha^2 \left(2 - \left(\frac{kk_3}{k_1k_2} \right)^2 \right) + \frac{3}{4k^2} - i \frac{\alpha k_3}{2k_1k_2} \left(4 - \left(\frac{k}{k_2} \right)^2 \right) \right] \varphi = 0. \quad (4.54)$$

$$V_2 = \text{const } k(\tau)^{-3/2} \exp \left(i\alpha k_3 \tau - v_* \int_0^\tau k^2(s) ds \right) (k(\tau)). \quad (4.55)$$

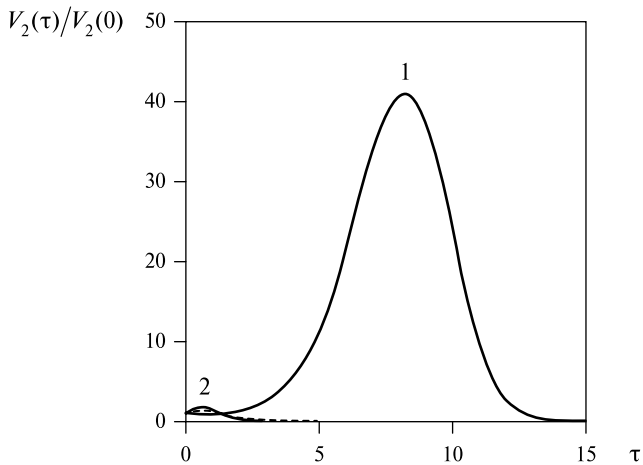


Рис. 4.1. Эволюция компоненты скорости V_2 при начальных значениях $k_1/k_2 = 1,5$; $\alpha k_2 = 1,0$ и $v_*/S = 0,01$. Кривая 1 соответствует $c_1 = 1$ и $c_2 = 0$; кривая 2 — $c_1 = 0$, $c_2 = 1$

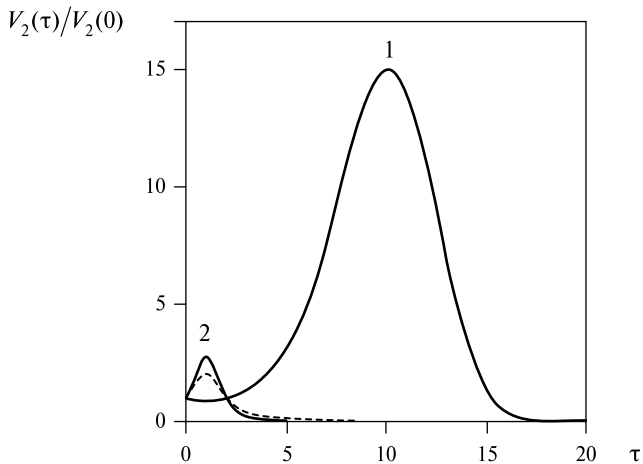


Рис. 4.2. Эволюция компоненты скорости V_2 при начальных значениях $k_1/k_2 = 1,0$; $\alpha k_2 = 1,0$ и $v_*/S = 0,01$. Кривая 1 соответствует $c_1 = 1$ и $c_2 = 0$, кривая 2 — $c_1 = 0$, $c_2 = 1$

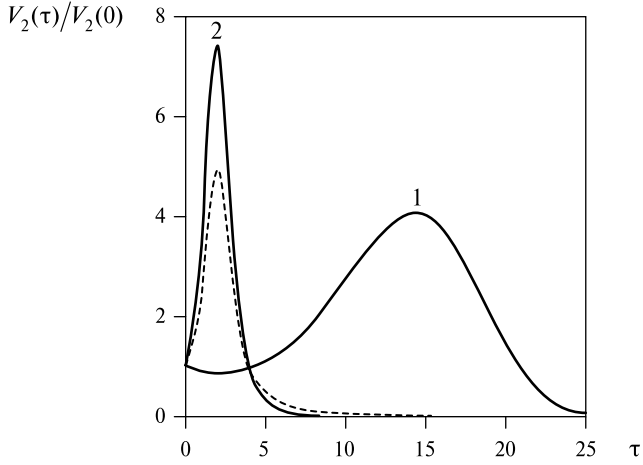


Рис. 4.3. Эволюция компоненты скорости V_2 при начальных значениях $k_1/k_2 = 0,5$; $\alpha k_2 = 1,0$ и $v_*/S = 0,01$. Кривая 1 соответствует $c_1 = 1$ и $c_2 = 0$, кривая 2 — $c_1 = 0$, $c_2 = 1$

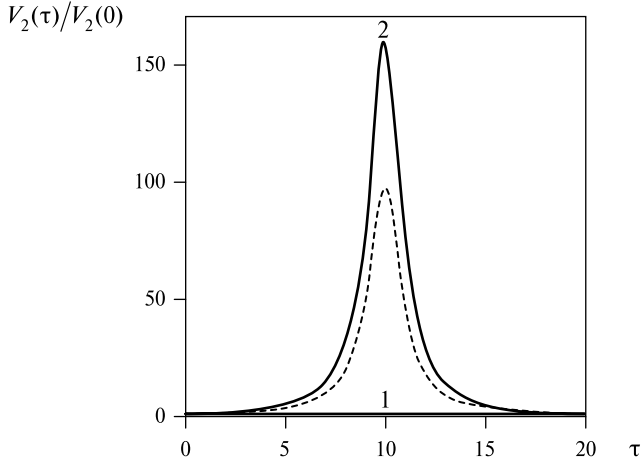


Рис. 4.4. Эволюция компоненты скорости V_2 при начальных значениях $k_1/k_2 = 0,1$; $\alpha k_2 = 1,0$ и $v_*/S = 0,01$. Кривая 1 соответствует $c_1 = 1$ и $c_2 = 0$, кривая 2 — $c_1 = 0$, $c_2 = 1$

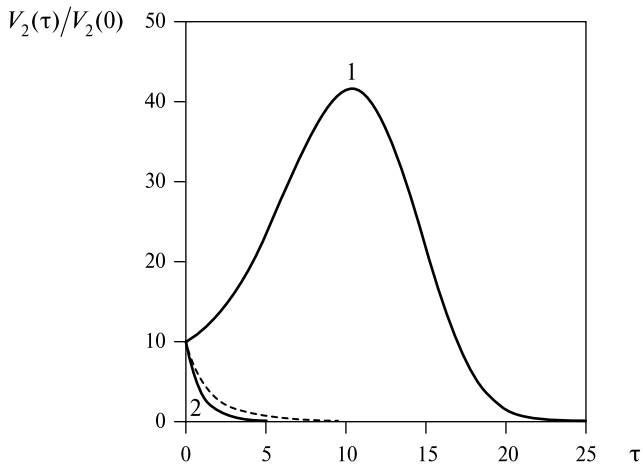


Рис. 4.5. Эволюция компоненты скорости V_2 при начальных значениях $k_1/k_2 = -0,5$; $\alpha k_2 = 1,0$ и $v_*/S = 0,01$. Кривая 1 соответствует $c_1 = 1$ и $c_2 = 0$, кривая 2 — $c_1 = 0$, $c_2 = 1$

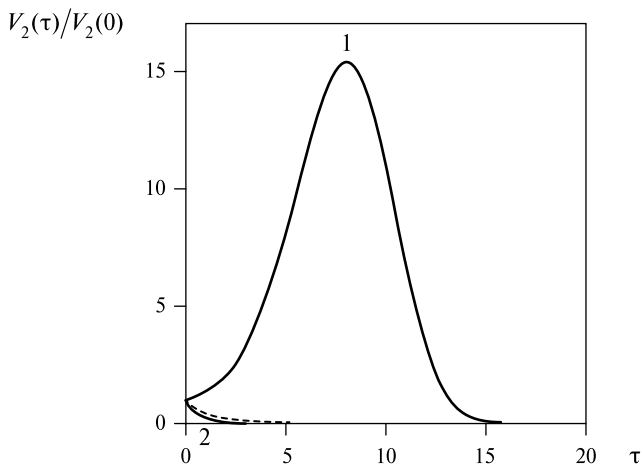


Рис. 4.6. Эволюция компоненты скорости V_2 при начальных значениях $k_1/k_2 = -1,0$; $\alpha k_2 = 1,0$ и $v_*/S = 0,01$. Кривая 1 соответствует $c_1 = 1$ и $c_2 = 0$, кривая 2 — $c_1 = 0$, $c_2 = 1$

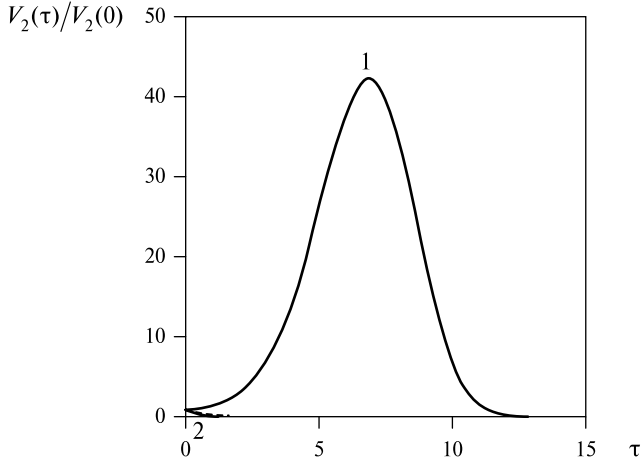


Рис. 4.7. Эволюция компоненты скорости V_2 при начальных значениях $k_1/k_2 = -1,5$; $\alpha k_2 = 1,0$ и $v_*/S = 0,01$. Кривая 1 соответствует $c_1 = 1$ и $c_2 = 0$, кривая 2 — $c_1 = 0$, $c_2 = 1$

Общее решение уравнения (4.54) при произвольных \mathbf{k} получить не удаётся. Однако в предельном случае:

$$\tau \gg 1, \quad k^2 \approx k_2^2, \quad (4.56)$$

решение для φ можно аппроксимировать как:

$$\varphi(\tau) \approx a_1 \exp \left[\alpha \left(2 - \left(\frac{k_3}{k_1} \right)^2 \right)^{1/2} k_1 \tau \right] + a_2 \exp \left[-\alpha \left(2 - \left(\frac{k_3}{k_1} \right)^2 \right)^{1/2} k_1 \tau \right]. \quad (4.57)$$

Видно, что возмущения с начальным значением $|k_3/k_1| < 2$ испытывают экспоненциальный рост на начальной стадии, а возмущения с $|k_3/k_1| > 2$ осциллируют.

Поперечный масштаб всех приведённых решений со временем уменьшается, т. е. они вытягиваются вдоль основного течения. Отметим, что рост возмущений на начальной (невязкой) стадии не связан с простым сохранением момента импульса. Спиральность способствует обратному каскаду энергии в крупномасштабные возмущения из мелкомасштабного турбулентного фона на протяжении всей эволюции, вплоть до достижения ими вязкой шкалы на поперечном масштабе. В рассмотренной постановке ос-

новное течение, безусловно, устойчиво — все возмущения в конце концов затухают. (Естественно, что на этой стадии следовало бы учесть и отброшенные при рассмотрении анизотропные компоненты вязкости.) Но интенсивный экспоненциальный рост и достижение значений амплитуды, превышающих начальные в десятки и сотни раз за конечные времена, безусловно, уже выводит за рамки линейного приближения. Такая неустойчивость называется неустойчивостью интервального типа, эти неустойчивости хорошо известны в физике плазмы — рост происходит на конечном интервале времени и сменяется затуханием. Подобный характер неустойчивости позволяет предположить спонтанную генерацию когерентных структур в турбулентных сдвиговых течениях, обладающих спиральностью. Основная особенность этих структур, позволяющая их выделить на фоне прочих, хорошо известных, — это их интегральная спиральность, совпадающая по знаку со спиральностью фона, интегральная же спиральность обычных структур равна нулю.

4.4. О турбулентной вязкости в спиральной осесимметричной турбулентности

Рассмотрим однородную осесимметричную турбулентность в качестве простейшей модели неоднородной турбулентности с одним выделенным направлением градиента интенсивности. Случай вращения не рассматриваем. Забегая несколько вперёд, отметим, что результаты, полученные для турбулентности с вращением, весьма близки случаю неоднородной спиральности. Предположим, что в подобной системе возникло крупномасштабное возмущение скорости. Оно возмущает исходный турбулентный фон, делая его неоднородным.

Корреляционные свойства осесимметричной турбулентности подробно рассмотрены в работах [Batchelor, 1946; Chandrasechar, 1950; Moffat, 1970]. Они зависят от одного выделенного направления, которое обозначим единичным вектором λ . В фурье-представлении корреляционный тензор будет иметь вид:

$$\hat{Q}_{ij}(k, w) = \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \left(\frac{E(k, w)}{4\pi k^2} + (\mathbf{k}\lambda)\hat{Q}^1(k, w) \right) + i\epsilon_{ijk} k_k \left(\frac{H(k, w)}{8\pi k^4} + (\mathbf{k}\lambda)(\mathbf{k}\lambda)\hat{G}^1(k, w) \right). \quad (4.58)$$

Здесь Q^0 , G^0 , соответствующие изотропной составляющей турбулентности, являются чётными функциями k , w . Из положительной определённости корреляционного тензора скаляр Q^1 и псевдоскаляр G^1 должны быть нечётными функциями по w . Ниже мы ограничимся рассмотрением только анизотропных эффектов. Анизотропная часть напряжений Рейнольдса будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \langle \hat{T}_i(k, w) \rangle = & -(\delta_{rs}\delta_{it} + \delta_{rt}\delta_{is}) \left(\delta_{km}\delta_{pn} + \delta_{kn}\delta_{pm} \right) \times \\ & \times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dk' dw' \left(v_0 k'^2 - iw' \right)^{-1} \left[\delta_{sp} - \frac{k'_s k'_p}{k'^2} \right] \times \\ & \times \left[k'_k k'_l \lambda_l k_r \bar{V}(k, w) \left[\delta_{im} - \frac{k'_i k'_m}{k'^2} \right] \hat{Q}^1(k', w') + \right. \\ & \left. + i\varepsilon_{mf} \left(k_i k'_f k'_k \lambda_l - k_f k'_k k'_l \lambda_l \right) \hat{G}^1(k', w') \right]. \end{aligned} \quad (4.59)$$

Здесь опущены нечётные комбинации волновых векторов k , исчезающие после интегрирования по углам. В результате

$$\langle \hat{T}_i(k, w) \rangle = -iu_1(k\lambda)\hat{V}_i(k, w) + iu_2 k_i \left[\lambda_m \hat{V}_m + gk_m \lambda_m \varepsilon_{ijk} k_j \hat{V}_k(k, w) \right], \quad (4.60)$$

где

$$g = \frac{4\pi}{15} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dq dw \frac{wq^4 \hat{G}^1(q, w)}{\left(v_0^2 q^4 + w^2 \right)}, \quad (4.61)$$

$$u_1 = \frac{4\pi}{15} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dq dw \frac{wq^4 \hat{Q}^1(q, w)}{\left(v_0^2 q^4 + w^2 \right)}, \quad (4.62)$$

$$u_2 = 4u_1. \quad (4.63)$$

Член, пропорциональный u_1 , ведёт к дрейфу (сносу) возмущений в направлении λ . Член, пропорциональный u_2 , перенормировывает давление и исчезает после взятия ротора. Имеем следующее дисперсионное соотношение:

$$-iw = -i\lambda_m \mathbf{k}_m u_1 - (v_0 + v_t) |k|^2 \pm g\lambda_m \mathbf{k}_m |k|. \quad (4.64)$$

После перехода в (\mathbf{x}, t) -представление получаем уравнение:

$$\partial_t \langle \mathbf{V} \rangle + \nabla_\lambda \left(u_1 \langle \mathbf{V} \rangle + g \text{rot} \langle \mathbf{V} \rangle \right) = -\nabla \left(P - u_2 \left(\lambda \langle \mathbf{V} \rangle \right) \right) + v\Delta \langle \mathbf{V} \rangle, \quad (4.65)$$

где $\nabla_\lambda = (\lambda \nabla)$ представляет градиент по направлению λ . Отметим, что полученный нами эффект совпал с формой напряжений Рейнольдса для турбулентного течения Экмана (см. гл. 1). Он фактически совпадает с напряжениями Рейнольдса в неоднородной спиральной турбулентности, вычисленными чуть позже в работе [Yokoi, Yoshizawa, 1993].

Как видим, g -член, обусловленный спиральностью и анизотропией корреляционных свойств относительно выделенного направления, может равно вести как к увеличению, так и к уменьшению диссипации. В случае сильной степени анизотропии эффект оказывается одного порядка с турбулентной вязкостью и может существенно её понижать. Нетрудно увидеть аналогию с эффектами «отрицательной» вязкости, возникающими в анизотропных течениях Бельтрами. Там тоже одна мода диссипирует с повышенной интенсивностью, а другая, наоборот, при повышении критического числа Рейнольдса может расти.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведённый анализ показал, что спиральная турбулентность в несжимаемой жидкости с твёрдыми частицами неустойчива относительно вихревых возмущений. Полученные уравнения для завихренности на масштабе средних движений содержат генерационные члены, формально совпадающие с аналогичными в теории гидромагнитного динамо. Заметим, что в последней для осуществления генерации достаточно одной спиральности. В гидродинамической теории из-за отмеченных различий в постановках задач для получения генерации, помимо спиральности, нужно учитывать дополнительные факторы. В приведённой работе таким дополнительным фактором является наличие твёрдых частиц, движение которых обуславливает дивергенцию на пульсационном масштабе и тем самым обеспечивает ненулевое значение напряжений Рейнольдса в усреднённых уравнениях.

Аналогичный механизм неустойчивости обнаружен для жидкости с осциллирующими пузырьками газа. Показано, что в такой системе возможно явление гидродинамического α -эффекта. Получено уравнение для описания эволюции крупномасштабных вихревых возмущений на фоне однородной изотропной турбулентности с ненулевой спиральностью. Это уравнение совпадает с уравнением α^2 -динамо магнитного поля. При выводе уравнения использовалось корреляционное приближение второго порядка, а также предположение о двухмасштабности задачи (характерный пространственный и временной масштабы возмущений много больше масштабов исходно невозмущённой турбулентности). Полученное уравнение имеет растущие решения. Обратим внимание,

что получаемые в результате структуры имеют спиральный характер, т.е. $\langle \langle \vec{v} \rangle \rangle \text{rot} \langle \langle \vec{v} \rangle \rangle \neq 0$. Найден характерный размер образующейся структуры. Появление в усреднённых уравнениях неустойчивых решений обязано наличию в несжимаемой жидкости осциллирующих пузырьков, которые обеспечивают ненулевую дивергенцию на масштабе пульсационных движений и тем самым нарушают симметрию напряжений Рейнольдса в усреднённых уравнениях.

Проведённое выше рассмотрение показало, что при распространении звуковых волн в турбулентной среде возможна их трансформация в вихревые движения. Получено уравнение, описывающее такие вихревые движения, и вычислена их средняя энергия в рамках теории однократного рассеяния. Показано, что наведённые вихревые движения обладают свойствами гиротропности, если спиральность рассеивающей звук турбулентности отлична от нуля. Такой канал передачи энергии акустических волн в вихревые может иметь важное значение при сверхдальнем распространении звука.

Рассмотрена задача об устойчивости однородного турбулентного сдвигового течения по отношению к крупномасштабным вихревым возмущениям. Замыкание системы проводилось в первом порядке теории возмущений в сопутствующей системе отсчёта. Переход в эту систему позволяет более корректно учесть геометрию невозмущённого течения, чем в неподвижной системе. Простота геометрии основного потока упрощает анализ полученных уравнений Рейнольдса и позволяет получить полный набор решений в неограниченном случае. Очевидно, что мелкомасштабные турбулентные вихри эффективно действуют как дополнительная вязкость (в данном случае анизотропная). Если же во всей системе глобально нарушена зеркальная симметрия и турбулентность является гиротропной, то это приводит к принципиально иной картине эволюции крупномасштабных возмущений. Если при отсутствии спиральности они диссипировали, пополняя энергию фона, то в её присутствии возможен обратный процесс, когда энергия возмущения растёт за счёт обратной перекачки из малых масштабов. Если обратиться к уравнениям, то это проявляется в виде положительной обратной связи между различными компонентами возмущения. Хотя основной поток разрушает и размывает возмущения (на деле происходит уменьшение поперечных масштабов, реально включающее действие вязкости) на больших временах, интенсивный рост возмущений на начальной (невязкой стадии) нарушает

условия применимости линейного приближения. Окончательный ответ о судьбе подобных возмущений должен дать нелинейный анализ, но уже линейная картина позволяет говорить о генерации в турбулентных сдвиговых течениях вихревых структур с ненулевой спиральностью, отражающей глобальное нарушение в системе зеркальной симметрии. Возможно, что возмущения этого класса развиваются на ранней стадии тропических циклонов и при зарождении смерчей. Для более определённых заключений о динамике и форме структур необходим нелинейный анализ. Основное преимущество развитой теории в отличие от работ [Чижелски, 1999; Berezin et al., 1991; Berezin, Hutter, 1995; Berezin, Trofimov, 1991; Blackman, Chou, 1997; Frisch et al., 1987; Kichatinov et al., 1994] состоит в самосогласованном подходе к нахождению основного невозмущённого состояния спиральной турбулентности.

ЛИТЕРАТУРА

- [Бэтчелор, 1955] *Бэтчелор Дж. К.* Теория однородной турбулентности. М.: Изд-во иностр. лит., 1955. 150 с.
- [Вайнштейн и др., 1980] *Вайнштейн С. И., Зельдович Я. Б., Рузмайкин А. А.* Турбулентные динамо в астрофизике. М.: Наука, 1980. 352 с.
- [Гварамадзе и др., 1988] *Гварамадзе В. В., Тур А. В., Хоменко Г. А.* Взаимодействие стационарного потока со спиральной турбулентностью: Препринт. М.: ИКИ АН СССР, 1988. Пр-1210. 36 с.
- [Гварамадзе, Чхетиани, 1988] *Гварамадзе В. В., Чхетиани О. Г.* Турбулентное вихревое динамо в сжимаемой самогравитирующей среде: Препринт. Докл. АН СССР, 1988. № 1440. 33 с.
- [Городцов, 1988] *Городцов В. А.* Влияние однородного сдвигового течения на долгоживущие возмущения в стратифицированной жидкости // *Механика жидкости и газа.* 1988. № 2. С. 94–102.
- [Интенсивные..., 1985] *Интенсивные атмосферные вихри* / Под ред. Л. Бенгтесона, Дж. Лайтхилла. М.: Мир, 1985. 386 с.
- [Краузе, Рэдлер, 1984] *Краузе Ф., Рэдлер К.-Х.* Магнитная гидродинамика средних полей и теория динамо. М.: Мир, 1984. 320 с.
- [Моисеев и др., 1986] *Моисеев С. С., Руткевич П. Б., Тур А. В., Яновский В. В.* Вторичные неустойчивости, околороговые явления и структуры в гидродинамике и плазме // *Математические механизмы турбулентности.* Киев: Ин-т математики АН УССР, 1986. 92 с.
- [Моисеев и др., 1987] *Моисеев С. С., Сагдеев Р. З., Тур А. В., Хоменко Г. А., Яновский В. В.* Теория возникновения крупномасштабных структур в гидродинамической турбулентности // *Журн. эксперимент. и теорет. физики (ЖЭТФ).* 1983. Т. 85. С. 1979–1987.
- [Моисеев и др., 1988] *Моисеев С. С., Руткевич П. Б., Тур А. В., Яновский В. В.* Вихревое динамо в конвективной среде со спиральной турбулентностью // *Журн. эксперимент. и теорет. физики (ЖЭТФ).* 1988. Т. 94. С. 144–153.
- [Моисеев и др., 1989] *Моисеев С. С., Оганян К. Р., Руткевич П. Б., Тур А. В.* Влияние влажной конвекции на крупномасштабную неустойчивость

- в спиральной турбулентности: Препринт. М.: ИКИ АН СССР, 1989. Пр-1525. 24 с.
- [Монин, Яглом, 1965] *Монин А. С., Яглом А. М.* Статистическая гидромеханика. М.: Наука, 1965. 1967. Ч. 1. 639 с. Ч. 2. 720 с.
- [Моффат, 1980] *Моффат Г.* Возбуждение магнитного поля в проводящей среде. М.: Мир, 1980. 340 с.
- [Незлин, Снежкин, 1990] *Незлин М. В., Снежкин Е. Н.* Вихри Россби и спиральные структуры. М.: Наука, 1990. 238 с.
- [Нигматулин, 1987] *Нигматулин Р. И.* Динамика многофазных сред. М.: Наука, 1987. Ч. 1. 464 с. Ч. 2. 359 с.
- [Обухов, 1943] *Обухов А. М.* О распространении звуковой волны в завихренном потоке // Докл. АН. 1943. Т. 39. С. 46.
- [Паркер, 1982] *Паркер Е. Н.* Космические магнитные поля. М.: Мир, 1982. Ч. 1. 608 с. Ч. 2. 480 с.
- [Петвиашвили, Похотелов, 1989] *Петвиашвили В. И., Похотелов О. А.* Уединённые волны в плазме и атмосфере. М.: Энергоатомиздат, 1989. 199 с.
- [Татарский, 1953] *Татарский В. И.* К теории распространения звуковых волн в турбулентном потоке // Журн. эксперимент. и теорет. физики (ЖЭТФ). 1953. Т. 25. Вып. 1(7). С. 74.
- [Татарский, 1981] *Татарский В. И.* Распространение волн в турбулентной атмосфере. М.: Наука, 1981. 981 с.
- [Чижевски, 1999] *Чижевски Р.* Параметризация турбулентности в потоках со спиральностью // Физика атмосферы и океана. 1999. Т. 35. № 2. С. 174–188.
- [Эльзассер, 1958] *Эльзассер В. М.* Магнитная гидродинамика // Успехи физ. наук (УФН). 1958. Т. 64. С. 529–588.
- [Batchelor, 1946] *Batchelor G. K.* The theory of axisymmetric turbulence // Proc. Royal Soc. London A. 1946. V. 186. P. 480–502.
- [Bayly, Yakhot, 1986] *Bayly B. J., Yakhot V.* Positive and negative viscosity effects phenomena in isotropic and anisotropic Beltrami flows // Physcal Rev. A. 1986. V. 34. P. 381–390.
- [Belyan et al., 1990] *Belyan A. V., Moiseev S. S., Petrosyan A. S.* Large-scale structures in turbulent multiphase flows // J. Physics Condensed Matter. SA. 1990. P. 469–475.
- [Belyan et al., 1991] *Belyan A. V., Moiseev S. S., Petrosyan A. S.* Sound transformation in a turbulent medium // Physics Letters A. 1991. V. 155. P. 181–184.
- [Berezin et al., 1991] *Berezin Y. A., Hutter K., Zhukov V. P.* Large-scale vortical structure, supported by small-scale turbulent motions. Helicity as a cause for inverse energy cascade // Continuum Mechanics and Thermodynamics. 1991. V. 3. P. 127–146.
- [Berezin, Hutter, 1995] *Berezin Y. A., Hutter K.* On vortex air motions above an axisymmetric source of mass, momentum and heat // J. Fluid Mechanics. 1995. V. 290. P. 299–317.
- [Berezin, Trofimov, 1991] *Berezin Y. A., Trofimov V. M.* A model of non-equilibrium turbulence with an asymmetric stress. Application to the problems of

- thermal convection // Continuum Mechanics and Thermodynamics. 1991. V. 7. P. 415–437.
- [Blackman, Chou, 1997] *Blackman E. G., Chou T.* A vorticity-magnetic field dynamo instability // Astrophysical J. 1997. V. 489. L. 95–98.
- [Brissand et al., 1973] *Brissand A., Frisch U., Leorat J., Lesieur M., Masure A.* Helicity cascade in fully developed isotropic turbulence // Physics of Fluids. 1973. V. 16. P. 1366–1367.
- [Chagelishvili et al., 1993] *Chagelishvili G. D., Chanishvili R. G., Lominadze J. G., Segal I. N.* Turbulization of Free Shear Flows — 3D Perturbations // Proc. 4th Intern. Conf. Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion / Ed. T. D. Guyenne, J. J. Hunt. ESA SP-351. 1993. P. 23–27.
- [Chandrasechar, 1950] *Chandrasechar S.* The theory of axisymmetric turbulence // Philosophical Trans. Royal Soc. London A. 1950. V. 242. P. 557–577.
- [Chkhetiani et al., 1993] *Chkhetiani O. G., Moiseev S. S., Petrosyan A. S., Sagdeev R. Z.* The inverse energy cascade and self-organization in homogeneous turbulent shear flow // Applied Scientific Research. 1993. V. 51. P. 67–72.
- [Chkhetiani et al., 1994] *Chkhetiani O. G., Moiseev S. S., Petrosyan A. S., Sagdeev R. Z.* The large scale stability and self-organization in homogeneous turbulent shear flow // Physica Scripta. 1994. V. 49. P. 214–220.
- [Ellingsen, Palm, 1975] *Ellingsen T., Palm E.* Stability of linear flow // Physics of Fluids. 1975. V. 18. P. 478–487.
- [Frisch et al., 1975] *Frisch U., Pouquet A., Leorat J., Masure A.* Possibility of an inverse cascade of magnetic helicity in magnetohydrodynamic turbulence // J. Fluid Mechanics. 1975. V. 68. P. 769–778.
- [Frisch et al., 1987] *Frisch U., She Z. S., Sulem P. L.* Large-scale flow driven by anisotropic kinematic α -effect // Physica D. 1987. V. 28. P. 382–392.
- [Hunt, Carruthes, 1990] *Hunt J. C. R., Carruthes D. J.* Rapid distortion theory and the problems of turbulence // J. Fluid Mechanics. 1990. V. 212. P. 497–532.
- [Hussain, 1983] *Hussain A. K. M. F.* Coherent structures — reality and myth // Physics of Fluids. 1983. V. 26. P. 2816–2850.
- [Hussain, 1988] *Hussain A. K. M. F.* Coherent structures and turbulence // J. Fluid Mechanics. 1988. V. 173. P. 303–356.
- [Khomenko et al., 1988] *Khomenko G. A., Moiseev S. S., Tur A. V.* Hydrodynamical α -effect in compressible medium: Preprint. M.: IKI AN SSSR, 1988. Pr-1407. 33 p.
- [Kichatinov et al., 1994] *Kichatinov L. L., Rüdiger G., Khomenko G. A.* Large-scale vortices in rotating stratified disks // Astronomy and Astrophysics. 1994. V. 287. P. 320–334.
- [Kraichnan, 1953] *Kraichnan R. H.* The scattering of sound in a turbulent medium // J. Acoustical Soc. America. 1953. V. 25. N. 4. P. 822.
- [Kraichnan, 1973] *Kraichnan R. H.* Helical turbulence and absolute equilibrium // J. Fluid Mechanics. 1973. V. 59. P. 745–752.
- [Krause, Rudiger, 1974] *Krause F., Rudiger G.* On the Reynolds stresses in mean-field hydrodynamics. I. Incompressible homogeneous isotropic turbulence // Astronomische Nachrichten. 1974. V. 295. P. 93–99.

- [Levich, Tzvetkov, 1985] *Levich E., Tzvetkov E.* Helical inverse cascade in three-dimensional turbulence as a fundamental dominant mechanism in meso-scale atmospheric phenomena // *Physics Rep.* 1985. V. 128. P. 1–37.
- [Lighthill, 1953] *Lighthill M.J.* On the energy scattered from the interaction of turbulence with sound shock waves // *Proc. Cambridge Philosophical Soc.* 1953. V. 49. N. 3. P. 531.
- [Lumley, 1967] *Lumley J.L.* Rational approach to relations between motions of differing scales in Turbulent Flows // *Physics of Fluids.* 1967. V. 10. P. 1405–1408.
- [Marcus, Press, 1977] *Marcus P.S., Press W.H.* On Green's functions for small disturbances in plane Couette Flow // *J. Fluid Mechanics.* 1977. V. 77. P. 525–534.
- [Moffat, 1970] *Moffat H.K.* Turbulent dynamo action at low magnetic Reynolds number // *J. Fluid Mechanics.* 1970. V. 41. P. 435–452.
- [Moffat, 1981] *Moffat H.K.* Some developments in the theory of turbulence // *J. Fluid Mechanics.* 1981. V. 106. P. 7–47.
- [Moiseev et al., 1987] *Moiseev S.S., Rutkevich P.B., Tur A.V., Yanovsky V.V.* Large-Scale Vertices of nontrivial topology in a turbulent convection // *Proc. Inst. Conf. Plasma Phys. Kiev: Naukova Dumka,* 1987. V. 2. P. 75.
- [Petrosyan, Polunine, 1997] *Petrosyan A.S., Polunine D.Yu.* Reynolds stresses in rotating fluids // *Turbulence, Heat and Mass Transfer / Ed. K. Hanjalic, T.W.J. Peters.* 1997. P. 549–556.
- [Sagdeev et al., 1984] *Sagdeev R.Z., Moiseev S.S., Tur A.V., Khomenko G.A., Yanovsky V.V.* Theory of development of large-scale structures in hydrodynamical turbulence // *Self-organization, autowaves and structures far from equilibrium / Ed. V.I. Krinsky. Berlin, Heidelberg, N. Y., Tokyo: Springer-Verlag,* 1984. P. 74–76.
- [Tur et al., 1984] *Tur A.V., Khomenko G.A., Yanovsky V.V.* Development of structures in stochastic systems and closure of the averaged equations // *Nonlinear and Turbulent Processes in Physics / Ed. Sagdeev R.Z. L., P., N.Y.: Harword. Acad. Publ.,* 1984. V. 2. P. 1073–1078.
- [Yokoi, Yoshizawa, 1993] *Yokoi N., Yoshizawa A.* Statistical analysis of the effects of helicity in inhomogeneous turbulence // *Physics of Fluids A.* 1993. V. 5(2). P. 464–477.
- [Zeldovich et al., 1983] *Zeldovich Ya.B., Ruzmaikin A.A., Sokoloff D.D.* Magnetic fields in astrophysics. N. Y.: Gordon and Breach, 1983. 376 p.

Оглавление

Введение	3
Глава 1. Крупномасштабные структуры в жидкости с твёрдыми частицами.	8
1.1. Уравнения среднего поля для жидкости с твёрдыми частицами	8
1.2. Усреднённые уравнения для возмущений в жидкости с твёрдыми частицами	11
1.3. Замыкание уравнений для возмущений среднего поля в жидкости с твёрдыми частицами	16
1.4. Вихревая неустойчивость жидкости с твёрдыми частицами	19
Глава 2. Гидродинамический α -эффект в жидкости с осциллирующими пузырьками газа	21
2.1. Модель жидкости с пузырьками газа. Исходные уравнения	21
2.2. Вывод замкнутых уравнений для завершённости	24
2.3. Генерация вихрей спиральной турбулентностью в жидкости с пузырьками газа.	28
Глава 3. Рассеяние звука спиральной турбулентностью	29
3.1. Исходные уравнения идеального газа	29
3.2. Уравнения для вихревых возмущений, вызываемых звуком в турбулентной среде	31
3.3. Корреляционные свойства рассеянного звука	33
Глава 4. Генерация крупномасштабных структур на сдвиговых течениях	36
4.1. Анизотропная турбулентность однородного сдвигового течения.	36
4.2. Рейнольдсовское описание турбулентного течения Куэтта	38
4.3. Обратный каскад энергии в турбулентном течении Куэтта	43
4.4. О турбулентной вязкости в спиральной осесимметричной турбулентности.	51
Заключение	54
Литература	57

Для заметок

Для заметок

055(02)2

Ротапринт ИКИ РАН

117997, Москва, Профсоюзная, 84/32

Подписано к печати 22.07.2013

Заказ 3306

Формат 70×108/32

Тираж 75

2,5 уч.-изд. л.