

*Шевелёв Марк Михайлович*

**НЕУСТОЙЧИВОСТЬ  
КЕЛЬВИНА-ГЕЛЬМГОЛЬЦА  
ДЛЯ ПОТОКА ПЛАЗМЫ,  
ОГРАНИЧЕННОГО  
В ПРОСТРАНСТВЕ**

Специальность 01.04.02 — теоретическая физика

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук



Москва  
2013

Работа выполнена в Учреждении Российской академии наук  
Институте космических исследований РАН (ИКИ РАН)

**Научный руководитель:**

кандидат физико-математических наук  
*Буринская Татьяна Михайловна (ИКИ РАН)*

**Официальные оппоненты:**

доктор физико-математических наук  
*Похотелов Олег Александрович (ИФЗ)*

доктор физико-математических наук  
*Ильгисонис Виктор Игоревич (НИЦ Курчатовский институт)*

**Ведущая организация:**

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
Институт земного магнетизма, ионосферы и распространения  
радиоволн им. Н. В. Пушкова Российской академии наук  
(ИЗМИРАН)

Защита диссертации состоится «20» ноября 2013 г. в 13 ч 00 мин  
на заседании Диссертационного Совета Д.002.113.03 при ИКИ РАН  
по адресу: 117997, Москва, Профсоюзная ул., 84/32, 2-й подъезд

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИКИ РАН.  
Автореферат разослан «  » \_\_\_\_\_ 2013 г.

Ученый секретарь  
Диссертационного Совета Д 002.113.03  
кандидат физико-математических наук



Т М. Буринская

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

### Актуальность темы

Диссертация посвящена исследованию магнитогидродинамической (МГД) неустойчивости Кельвина-Гельмгольца (К-Г) для ограниченных в пространстве потоков плазмы. Неустойчивость Кельвина-Гельмгольца — одна из первых обнаруженных гидродинамических неустойчивостей, возникающая на границе между двумя жидкостями, движущимися с различными скоростями. Данное физическое явление получило своё название по именам первооткрывателей: Гельмгольц впервые, в рамках классической гидродинамики, без магнитного поля, высказал предположение, что поперечный градиент скорости может быть неустойчив [Helmholtz, 1868], позже Кельвин выполнил эксперимент, в котором между движущимися в противоположных направлениях жидкостями наблюдал устойчивую вихревую структуру, названную за внешнее сходство «кошачьим глазом» [Kelvin, 1887]. С развитием магнитной гидродинамики интерес к неустойчивости К-Г возник и в области физики плазмы.

Исследования устойчивости поперечных градиентов скорости в плазме чрезвычайно важны. Потоки плазмы встречаются в астрофизических объектах, в атмосфере Солнца и магнитосфере Земли, корректное описание подобных систем невозможно без анализа крупномасштабных магнитогидродинамических процессов. По этой причине изучению неустойчивости К-Г всегда уделялось особое внимание, при этом в подавляющем большинстве работ рассматриваются модели тангенциального разрыва и переходного слоя между двумя полубесконечными областями [Chandrasekhar, 1961; Fejer, 1964; Miura, Pritchett, 1982; Dahlburg, Einaudi, 2000]. Данный подход хорошо описывает колебания с длинами волн много меньше поперечного размера потока, однако нередко возникают ситуации, когда длины волн наблюдаемых возмущений значительно больше характерных размеров потока [Ershkovich, Nusinov, 1972; Ershkovich, 1980; Grigorenko et al., 2010], в этом случае необходимо учитывать конечную ширину потока.

Одни из первых результатов исследования линейной стадии развития неустойчивости К-Г для ограниченного в пространстве потока несжимаемой плазмы в рамках трёхслойной модели плоскопараллельного потока были получены в работе [Uberoi, 1986], где было

показано, что учёт конечной ширины потока существенно влияет на развитие длинноволновых колебаний.

Плоскопараллельная модель является хорошим приближением для ограниченного в пространстве потока, если один из поперечных размеров много больше другого. В случае, когда поперечные размеры близки, используется модель цилиндрического потока [Ershkovich, Nusinov, 1972; Ershkovich, 1980; McKenzie, 1970]. Однако исследования цилиндрического потока проводились только для специальных случаев, что существенно ограничивает применимость полученных результатов.

В приведённых выше работах, посвящённых изучению развития неустойчивости К-Г для ограниченного в пространстве потока, рассматриваются несжимаемые потоки плазмы. Однако модель несжимаемой среды далеко не всегда корректно описывает реальную физическую ситуацию. Анализ экспериментальных данных, проведённый в статье [Grigorenko et al., 2010], показывает, что потоки плазмы, распространяющиеся в пограничной области плазменного слоя магнитосферы Земли, являются существенно сверхзвуковыми  $M_S \equiv U_0/C_S \gg 1$  ( $U_0$  — скорость потока;  $C_S$  — скорость звука), при этом вместе с потоками были зарегистрированы возмущения магнитных трубок с характерными длинами волн много больше ширины потоков, распространяющиеся вдоль скорости потока в продольном магнитном поле. Из анализа устойчивости переходного слоя и тангенциального разрыва между двумя полубесконечными областями, заполненными сжимаемой плазмой, известно, что конечная скорость звука оказывает стабилизирующее воздействие на неустойчивость К-Г, причём для больших значений звукового числа Маха,  $M_S > 2$ , затухающие на бесконечности колебания, распространяющиеся вдоль скорости потока, абсолютно устойчивы [Fejer, 1964; Miura, Pritchett, 1982; Ландау, 1944; Blumen, 1970]. Таким образом, в рамках модели переходного слоя между двумя полубесконечными областями, заполненными плазмой, неустойчивость не должна развиваться в пограничной области плазменного слоя, что противоречит экспериментальным данным. Очевидно, что для корректного описания наблюдаемых осцилляций необходимо тщательно изучить устойчивость ограниченного в пространстве потока при малых скоростях звука, больших значениях числа Маха.

Исследование линейной стадии развития неустойчивости К-Г для плоскопараллельного потока конечной ширины с учётом сжимаемости плазмы для колебаний, распространяющихся вдоль скорости потока, проведено в [Буринская, 2008], где было показано, что возмущения с длинами волн порядка и больше ширины потока могут

быть неустойчивы при любых значениях числа Маха. Несомненно, ключевую роль в этом процессе играет взаимодействие между границами потока. Приведённые в статье [Буринская, 2008] результаты позволяют устранить противоречие известных теоретических фактов с наблюдениями, но в работе не проведён анализ развития неустойчивости в зависимости от направления волнового вектора. Известно, что волны, распространяющиеся под углом к скорости потока, могут быть неустойчивы, даже если продольные колебания не развиваются [Фридман, 2008].

Таким образом, необходимы дальнейшие исследования линейной стадии развития неустойчивости К-Г как для цилиндрического потока, так и для трёхслойной модели.

Изучение неустойчивости К-Г в линейном приближении является важным, однако для описания динамики процессов, происходящих на временах, превышающих характерное время развития неустойчивости, необходимо учитывать нелинейные эффекты взаимодействия колебаний. Хорошо известно, что развитие неустойчивости К-Г в переходном слое между двумя полубесконечными областями на сильно нелинейной стадии приводит к образованию вихревых структур в переходной области, что, в свою очередь, способствует процессам обмена массой, импульсом и энергией между плазмами [Frank et al., 1964; Min, 1997; Otto, Fairfield, 2000; Lai, Lyu, 2006].

Одним из определяющих факторов, влияющих на формирование вихревого слоя, является магнитное поле. Исследование переходного слоя между двумя полубесконечными областями, проведённое в статье [Lai, Lyu, 2006], показывает, что в продольном магнитном поле образующиеся на нелинейной стадии вихри с течением времени разрушаются, в отличие от классической гидродинамики без магнитного поля, в рамках которой вихревые структуры устойчивы. При увеличении напряжённости магнитного поля время жизни вихрей уменьшается. Если магнитное поле достаточно сильное, то вихревые структуры не образуются, однако в переходном слое возникают крупномасштабные искажения магнитного поля альфвеновского типа. Предсказать данные эффекты, опираясь только на анализ в линейном приближении, невозможно.

Вторым ключевым фактором, влияющим на развитие вихрей, является сжимаемость плазмы. При малых скоростях магнитного звука ( $M_{JS} \ll 1$ ) в переходном слое между двумя полубесконечными областями образуются вихревые структуры [Min, 1997; Otto, Fairfield, 2000]. Однако если хотя бы в одной из полубесконечных областей выполнено  $M_{JS} > 2$ , то вихревой слой не формируется [Lai, Lyu, 2006].

Следовательно, для потока плазмы, ограниченного в пространстве, также требуется провести исследование нелинейной динамики в зависимости от скорости звука и напряжённости магнитного поля.

Единственная попытка подобного исследования была предпринята в работе [Min, 1997], в которой было проведён анализ численных решений системы уравнений МГД в рамках двумерной модели плоскопараллельного потока. Однако изучение ограничивается периодическими начальными возмущениями для параметров системы, отвечающих наиболее быстро растущей моде согласно [Miura, Pritchett, 1982], и полностью отсутствует исследование в зависимости от температуры плазмы и соотношения ширины потока и ширины переходного слоя. Работа выполнена для специальных случаев и сосредоточена на моделировании неустойчивости нерелятивистского джета, поэтому результаты, полученные в данной работе, не дают возможности судить о конкретных эффектах в динамике развития неустойчивости. Тем не менее, некоторые результаты [Min, 1997] наглядно демонстрируют, что нелинейная стадия развития неустойчивости Кельвина-Гельмгольца в ограниченном потоке не сводится к сумме двух невзаимодействующих переходных слоёв и требует дальнейшего детального анализа.

### **Цели и задачи**

Основной целью данной работы является исследование влияния конечного размера потока на развитие неустойчивости Кельвина-Гельмгольца в рамках идеальной одножидкостной магнитной гидродинамики. Поставленные задачи можно сформулировать следующим образом:

1. Исследование устойчивости потока в трёхслойной системе в зависимости от параметров плазмы при произвольной температуре и произвольном направлении распространения волн в плоскости параллельной границам раздела.
2. Исследование устойчивости цилиндрически симметричного потока плазмы в продольном магнитном поле в зависимости от плотности, температуры и напряжённости продольного магнитного поля.
3. Изучение нелинейной динамики плоскопараллельного потока плазмы посредством численного моделирования эволюции во времени решений МГД-системы уравнений.

### **Научная новизна достигнутых результатов**

Исследования развития неустойчивости Кельвина-Гельмгольца главным образом сосредоточены на модели переходного слоя или

тангенциального разрыва между двумя полубесконечными областями. Изучение динамики развития неустойчивости ограниченного в пространстве потока проводилось только для специальных случаев, что существенно ограничивает область применимости полученных ранее результатов. Данная диссертационная работа нацелена на детальное теоретическое исследование неустойчивости Кельвина-Гельмгольца для ограниченного в пространстве потока плазмы. Исследование устойчивости сжимаемого потока плазмы конечной ширины в рамках трёхслойной модели с учётом направления распространения возмущения показало, что поток может быть неустойчив при низких скоростях звука для всех направлений волнового вектора относительно колебаний с длиной волны больше или порядка ширины потока. Впервые для модели цилиндрического потока получено общее для всех типов колебаний условие устойчивости в несжимаемом приближении. Для случая конечной сжимаемости плазмы показано, что цилиндрический поток может быть неустойчив при низких скоростях звука в ограниченном интервале длин волн.

Исследования численных решений МГД-системы уравнений при возбуждении неустойчивости ансамблем случайных возмущений, шумом, показали преимущественное развитие решений, обладающих антисимметричными чертами и приводящих к искажениям магнитного поля альфвеновского типа на оси симметрии потока. Установлено, что в существенно сверхзвуковом,  $M_{JS} > 2$ , плоскопараллельном потоке плазмы конечной ширины возможно образование крупномасштабной вихревой структуры, в отличие от переходного слоя между двумя полубесконечными областями.

### **Достоверность полученных результатов**

Исследования влияния конечной ширины потока на развитие неустойчивости Кельвина-Гельмгольца проведено в рамках двух хорошо известных моделей ограниченного в пространстве потока: трёхслойная модель и цилиндрическая модель. Полученное автором общее дисперсионное уравнение для трёхслойной системы переходит в известные соотношения для предельных случаев несжимаемой плазмы и бесконечно широкого потока, рассмотренных ранее в работах [Uberoi, 1986; Fejer, 1964], соответственно. Используемое в исследовании дисперсионное уравнение для цилиндрического потока в продольном магнитном поле хорошо известно [Ershkovich, Nusinov, 1972; Ershkovich, 1980; McKenzie, 1970].

Для анализа нелинейной динамики использовалось численное моделирование самосогласованной системы уравнений одножидкостной МГД. Автором работы был предложен простой и надёжный

алгоритм для моделирования развития неустойчивости К-Г. Вычислительный код тестировался на задачах о распаде разрыва в одномерном приближении и показал совпадение с аналитическим решением. Результаты численного моделирования неустойчивости К-Г находятся в хорошем согласии с результатами линейной теории как для дозвуковых, так и для сверхзвуковых потоков. В ходе тестов успешно воспроизводились ранее известные результаты нелинейной динамики развития неустойчивости К-Г.

### **Научная и практическая ценность**

Исследование, выполненное в данной работе, позволяет корректно описать ограниченные в пространстве потоки плазмы конечной температуры при произвольной плотности плазмы потока и окружающего пространства, величине напряжённости магнитного поля и направлении волнового вектора. Полученные в диссертационной работе результаты наглядно показывают необходимость учёта конечного поперечного размера потока, особенно для низких температур. Анализ устойчивости потока плазмы конечной ширины при малых скоростях звука показал, что поток может быть неустойчив относительно колебаний с длинами волн порядка или больше поперечного размера потока. Данное исследование позволило объяснить низкочастотные длинноволновые колебания магнитного поля в переходной области плазменного слоя магнитосферы Земли [Grigorenko et al., 2010], что невозможно сделать, опираясь на результаты, полученные в рамках модели двух полубесконечных областей, движущихся относительно друг друга.

Неустойчивость Кельвина-Гельмгольца развивается при наличии в пространстве поперечной неоднородности скорости. Изучение ограниченного в пространстве потока показало, что взаимодействие переходных слоёв может способствовать развитию неустойчивости. Дальнейшие исследования взаимодействия переходного слоя с неоднородностями могут привести к новым результатам.

### **Апробация работы**

Основные результаты работы были представлены на следующих российских и международных конференциях:

- 52-я, 53-я и 55-я «Научная конференция МФТИ» в секции космической физики (2010, 2011, 2013 гг.).
- 13-я Конференция «Актуальные проблемы физики», ФИАН (2010 г.).
- 14-я и 15-я Всероссийские научные школы «Нелинейные волны», ИПФ РАН (2010, 2012 гг.).



- 7-я, 8-я и 10 «Конференция молодых учёных. Фундаментальные и прикладные космические исследования», ИКИ РАН (2010, 2011, 2013 гг.).
- 5-я, 6-я, 7-я и 8-я Ежегодные конференции «Физика плазмы в Солнечной системе», ИКИ РАН (2010–2013 гг.).
- 4-я Международная конференция по моделированию потоков в космической плазме «Astronum-2010»;
- 1-я Европейская школа-конференция по вопросам численного моделирования космической погоды, SWIFF Summer School 2012.
- 11-я Международная школа-симпозиум по численному моделированию процессов в космической плазме ISSS-11, NCU Taiwan, (2013 г.).
- 25-я Конференция по вычислительной физике IUPAR CCR 2013, Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау.

### **Основные положения, выносимые на защиту**

1. Показано, что в рамках трёхслойной модели поток плазмы, ограниченный в пространстве, может быть неустойчив относительно колебаний с длинами волн больше или порядка поперечного размера потока при произвольном направлении волнового вектора даже при низких температурах.
2. Получено условие абсолютной устойчивости несжимаемого цилиндрического потока плазмы, общее для всех мод колебаний.
3. Показано, что цилиндрически симметричный поток плазмы конечной температуры может быть неустойчив при низких скоростях звука в ограниченном интервале длин волн, причём колебания, приводящие к искажениям магнитного поля альфвеновского типа на оси симметрии потока, имеют значительно больший инкремент, чем осесимметричное колебание, соответствующее функции Бесселя с порядком  $m = 0$ .
4. Установлено, что в потоке преимущественным образом развиваются колебания, носящие черты асимметричного решения, приводящие к осцилляциям магнитного поля альфвеновского типа на оси потока и его искажениям как целого. Показано, что асимметричные колебания на сильно нелинейной стадии приводят к проникновению плазмы потока в окружающее пространство даже в сильном магнитном поле, когда образование крупных вихревых структур невозможно.
5. Показано, что при больших магнитозвуковых числах Маха в сверхзвуковом потоке плазмы конечной ширины, в отличие

от переходного слоя между двумя полубесконечными областями, на сильно нелинейной стадии могут развиваться вихревые структуры.

### **Публикации и личный вклад автора**

Все результаты, выносимые на защиту, были получены лично автором диссертации при поддержке научного руководителя. При непосредственном участии автора по теме диссертации опубликовано 4 статьи в рецензируемых изданиях из перечня ВАК:

1. *Буринская Т. М., Шевелёв М. М., Рош Ж.-Л.* Неустойчивость Кельвина-Гельмгольца для ограниченного потока плазмы в продольном магнитном поле // *Физика плазмы*. 2011. Т. 37. С. 46.
2. *Шевелёв М. М., Буринская Т. М.* Неустойчивость Кельвина-Гельмгольца для цилиндрического потока плазмы с произвольной температурой // *Физика плазмы*. 2011. Т. 37. С. 1081.
3. *Шевелёв М. М., Буринская Т. М.* Нелинейная динамика неустойчивости Кельвина-Гельмгольца в потоке плазмы конечной ширины // *Физика плазмы*. 2013. Т. 39. С. 546.
4. *Grigorenko E. E., Burinskaya T. M., Shevelev M. M., Sauvaud J.-A., Zelenyi L. M.* Large-scale fluctuations of PSBL magnetic flux tubes induced by the field-aligned motion of highly accelerated ions // *Annals of Geophysics*. 2010. V. 28. P. 1273.

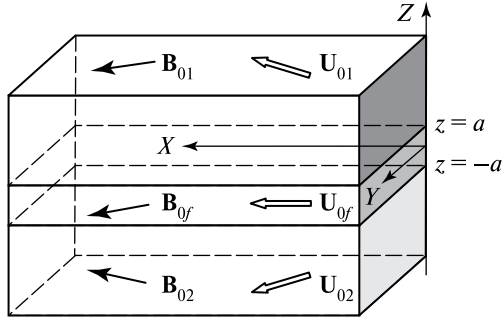
## **СТРУКТУРА ДИССЕРТАЦИИ И КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ**

*Структура диссертации:* диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и списка цитированной литературы. Общий объём диссертации составляет 120 страниц, включая 35 рисунков и список литературы, содержащий 83 наименования.

### **Краткое содержание**

*Во введении* определён предмет исследования, обоснована актуальность проблемы, обозначены цели и задачи настоящей работы, представлены основные достигнутые результаты и список опубликованных по теме диссертации материалов.

*В первой главе* проведено исследование линейной стадии развития неустойчивости Кельвина-Гельмгольца в рамках трёхслойной модели плоскопараллельного потока плазмы. В п. 1.1 дано подробное описание трёхслойной модели и получено общее дисперсионное уравнение.



**Рис. 1.** Схематическое изображение трёхслойной системы

Схематично трёхслойная модель представлена на рис. 1. Вдоль оси  $Z$  пространство разделено на три области:  $z > a$ ,  $a > z > -a$ ,  $-a > z$ . Области  $z > a$  и  $-a > z$  являются полубесконечными, а область  $a > z > -a$  ограничена по оси  $Z$ . В каждой из областей плазма считается однородной, но параметры плазмы могут быть различными в разных областях. Индексы  $j = 1, f, 2$  обозначают параметры, заданные в областях  $z > a$ ,  $a > z > -a$ ,  $-a > z$  соответственно.

Векторы напряжённости магнитного поля и крупномасштабной скорости плазмы лежат в плоскости  $(X, Y)$ , перпендикулярной направлению неоднородности  $Z$ . Углы между направлениями магнитного поля и осью  $X$  обозначим  $\zeta_j$ , углы между скоростями потока и осью  $X$  —  $\varphi_j$ , причём без нарушения общности можно положить  $\varphi_f = 0$ , поток плазмы в ограниченной области направлен вдоль оси  $X$ .

Исследование устойчивости системы сводится к анализу малых колебаний около положения равновесия. Линеаризованная система уравнений идеальной МГД, описывающая развитие в системе колебаний с бесконечно малыми амплитудами, в каждой из областей имеет следующий вид:

$$\rho_{0j} \left\{ \frac{\partial \mathbf{v}_j}{\partial t} + (\mathbf{U}_{0j} \cdot \nabla) \mathbf{v}_j \right\} = -\nabla \left\{ C_{sj}^2 \tilde{\rho}_j + \frac{(\mathbf{B}_{0j} \cdot \mathbf{b}_j)}{4\pi} \right\} + \frac{(\mathbf{B}_{0j} \cdot \nabla) \mathbf{b}_j}{4\pi}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{b}_j}{\partial t} + (\mathbf{U}_{0j} \cdot \nabla) \mathbf{b}_j = (\mathbf{B}_{0j} \cdot \nabla) \mathbf{v}_j - \mathbf{B}_{0j} (\nabla \cdot \mathbf{v}_j), \quad (2)$$

$$\frac{\partial \tilde{\rho}_j}{\partial t} = -\rho_{0j} (\nabla \cdot \mathbf{v}_j) - (\mathbf{U}_{0j} \cdot \nabla) \tilde{\rho}_j, \quad (3)$$

где  $C_{sj}$  — скорость ионного звука,  $C_{sj} \equiv \sqrt{\gamma T_e / M}$ ;  $\mathbf{B}_{0j}$ ,  $\mathbf{U}_{0j}$  и  $\rho_{0j}$  — невозмущённые величины магнитного поля, скоростей и плотности

плазмы в области  $j$  соответственно, величины  $\mathbf{b}_{0j}$ ,  $\mathbf{v}_{0j}$  и  $\tilde{\rho}_j$  — малые отклонения от равновесных значений. Из уравнений (1)–(3) можно получить уравнение, описывающее отклонение полного давления  $\tilde{\rho}_j = C_{sj}^2 \tilde{\rho}_j + (\mathbf{B}_{0j} \cdot \mathbf{b}_j) / 4\pi$ , суммы газокINETического и магнитного отклонений:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{U}_{0j} \cdot \nabla) \right)^4 \tilde{p}_j = \Delta \left[ \left( \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{U}_{0j} \cdot \nabla) \right)^2 \left( C_{sj}^2 + V_{Aj}^2 \right) - \frac{(\mathbf{B}_{0j} \cdot \nabla)^2}{4\pi \rho_{0j}} C_{sj}^2 \right] \tilde{p}_j, \quad (4)$$

где  $V_{Aj}$  — альфвеновская скорость,  $V_{Aj} \equiv B_{0j} / \sqrt{4\pi \rho_{0j}}$ . В рамках линейного приближения малые отклонения  $\mathbf{b}_{0j}$ ,  $\mathbf{v}_{0j}$ ,  $\tilde{\rho}_j$  могут быть выражены через  $\tilde{p}_j$ . Учитывая, что уравнение (4) в декартовых координатах допускает разделение переменных, решение для каждой из областей можно найти в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{p}_1 &= C_1 \exp(-k_1(z-a)) \exp(-i\tilde{\omega}t + ik_x x + ik_y y) && \text{для } z > a, \\ \tilde{p}_2 &= C_2 \exp(k_2(z+a)) \exp(-i\tilde{\omega}t + ik_x x + ik_y y) && \text{для } -a > z, \\ \tilde{p}_f &= (C_3 \exp(k_f z) + C_4 \exp(-k_f z)) \exp(-i\tilde{\omega}t + ik_x x + ik_y y) && \text{для } a > z > -a, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

где  $C_1, C_2, C_3, C_4$  — некоторые постоянные величины. Выражения для  $k_j$  ( $j+1, f, 2$ ) могут быть представлены с использованием безразмерной частоты  $\omega \equiv \tilde{\omega} / k U_{0f}$  и модуля продольного волнового числа  $k \equiv \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ :

$$\left. \begin{aligned} k_f^2 &= k^2 \left[ 1 - \frac{(\cos(\theta - \varphi_f) - \omega)^4}{\left[ (\cos(\theta - \varphi_f) - \omega)^2 (C_{sf}^2 + V_{Af}^2) / U_{0f}^2 - V_{Af}^2 C_{sf}^2 \cos^2(\theta - \xi_f) / U_{0f}^4 \right]} \right], \\ k_{1,2}^2 &= k^2 \left[ 1 - \frac{(u_{1,2} \cos(\theta - \varphi_{1,2}) - \omega)^4}{\left[ (u_{1,2} \cos(\theta - \varphi_{1,2}) - \omega)^2 (C_{s_{1,2}}^2 + V_{A_{1,2}}^2) / U_{0f}^2 - V_{A_{1,2}}^2 C_{s_{1,2}}^2 \cos^2(\theta - \xi_{1,2}) / U_{0f}^4 \right]} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

В выражении (6)  $\theta$  — угол между осью  $X$  и направлением волнового вектора в плоскости  $(X, Y)$ ;  $\cos(\theta) \equiv k_x / k$ .

Дисперсионное уравнение, описывающее устойчивость трёх-  
слойной системы, выводится с использованием положения, что  
суммарное газокинетическое и магнитное давление, так же, как  
и смещение по оси  $Z$ , непрерывно переходят через границы раздела  
областей  $z = a$  и  $z = -a$ . Для решений, затухающих при  $z \rightarrow \pm\infty$ , дис-  
персионное уравнение имеет вид:

$$\left\{ k_f^2 R_1 R_2 + k_1 k_2 R_f^2 \right\} \text{th}(2k_f a) + k_f R_f (k_2 R_1 + k_1 R_2) = 0. \quad (7)$$

Здесь  $k_{1,2f}$  определены соотношением (6) и использованы следу-  
ющие безразмерные переменные:

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= \rho_1 (u_1 \cos(\theta - \varphi_1) - \omega)^2 - A_1 \cos^2(\theta - \xi_1), \\ R_2 &= \rho_2 (u_2 \cos(\theta - \varphi_2) - \omega)^2 - A_2 \cos^2(\theta - \xi_2), \\ R_f &= (\cos \theta - \omega)^2 - A_f \cos^2(\theta - \xi_f). \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$A_{1,2f}$ ,  $u_{1,2}$  и  $\rho_{1,2}$  выражаются следующим образом

$$\left. \begin{aligned} A_f &= \frac{V_{Af}^2}{U_{0f}^2}, \quad A_1 = \frac{V_{A1}^2}{U_{0f}^2} \frac{\rho_{01}}{\rho_{0f}}, \quad A_2 = \frac{V_{A2}^2}{U_{0f}^2} \frac{\rho_{02}}{\rho_{0f}}, \\ u_1 &= \frac{U_{01}}{U_{0f}}, \quad u_2 = \frac{U_{02}}{U_{0f}}, \quad \rho_1 = \frac{\rho_{01}}{\rho_{0f}}, \quad \rho_2 = \frac{\rho_{02}}{\rho_{0f}}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Выражение (7) представляет собой общее дисперсионное  
уравнение для трёхслойной системы с учётом сжимаемости плазмы и  
направления волнового вектора и векторов напряжённости магнитного  
поля. В несжимаемом пределе,  $C_{sj} \rightarrow \infty$ , уравнение (7) переходит в  
дисперсионное уравнение, приведённое в статье [Uberoi, 1986].  
Если  $\xi_j = \varphi_j = \theta \equiv 0$  и  $u_1 = u_2 = 0$ , то дисперсионное соотношение (7)  
эквивалентно соотношению, приведённому в работе [Буринская,  
2008] для волн, распространяющихся вдоль скорости потока в  
продольном магнитном поле. В коротковолновом пределе  $k_{fa} \rightarrow \infty$   
выражении (7) распадается на два независимых уравнения, каждое  
из которых описывает волны, возникающие на границе между  
двумя полубесконечными областями сжимаемой плазмы в отсутствие  
переходного слоя [Буринская, 2008].

Параграфы 2 и 3 посвящены анализу решений дисперсионного  
уравнения в зависимости от скорости звука для произвольного  
направления распространения волн. Рассматривается случай, когда  
крупномасштабное направленное движение плазмы существует только  
в ограниченной области, что соответствует распространению потока

плазмы конечной ширины  $2a$ . Магнитное поле во всех областях направлено вдоль скорости потока. В п. 1.2 рассматривается случай, когда плазма по разные стороны от потока имеет одинаковые параметры:  $\rho_1 = \rho_2$ ,  $V_{A_1} = V_{A_2}$  и  $C_{S_1} = C_{S_2}$ , где  $\rho_f$  задано отношениями (9), при этом уравнение (7) принимает следующий вид:

$$\left(k_1 R_f + k_f R_1 \operatorname{th}(k_f a)\right) \left(k_f R_1 + k_1 R_f \operatorname{th}(k_f a)\right) = 0. \quad (10)$$

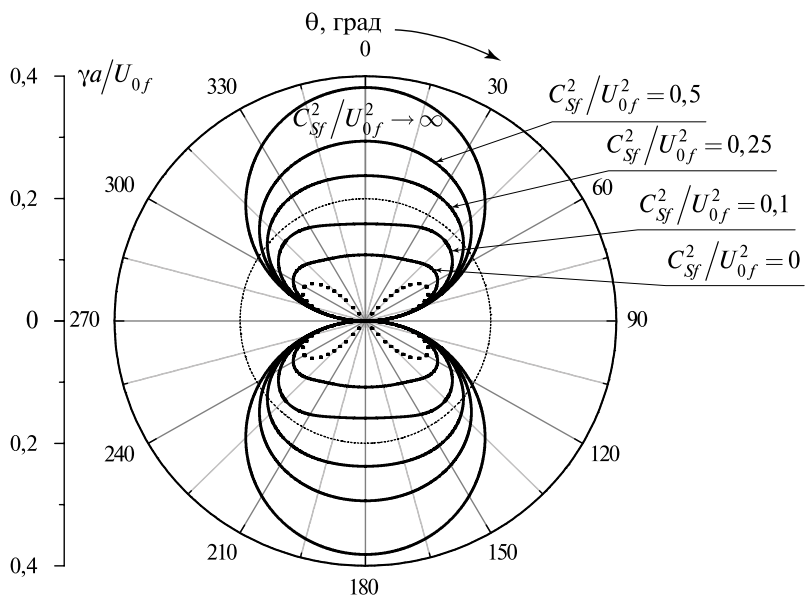
Уравнение (10) задаёт два независимых типа колебаний, которые могут развиваться в системе: симметричное  $k_1 R_f + k_f R_1 \operatorname{th}(k_f a) = 0$  и антисимметричное  $k_f R_1 + k_1 R_f \operatorname{th}(k_f a) = 0$ . При симметричном решении границы потока одновременно движутся либо к центру потока, либо от центра. При антисимметричном решении одна из границ движется к центру потока, другая — от центра.

На рис. 2 представлены результаты расчёта инкремента неустойчивости при различных скоростях звука для  $k \approx 1/a$ . Расчёты выполнены для случая, когда параметры плазмы одинаковы во всех трёх областях:  $\rho_1 = \rho_2 = 1$ ,  $V_{Af}^2/U_{0f}^2 = V_{A_1}^2/U_{0f}^2 = V_{A_2}^2/U_{0f}^2 = 0,1$ . На рис. 2 видно, что с понижением скорости звука инкремент неустойчивости уменьшается, но остаётся положительным для обеих мод и для всех направлений распространения волны, за исключением строго перпендикулярного к скорости потока.

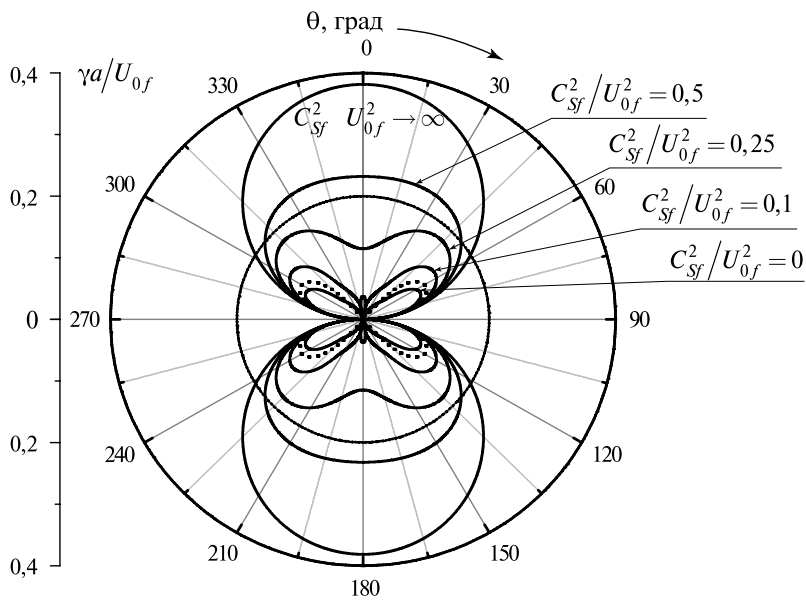
Для малых значений скоростей звука,  $C_S^2/U_0^2 < 0,25$ , инкремент антисимметричного решения значительно превышает инкремент симметричного решения и остаётся существенным даже при нулевой температуре. Для сравнения на рис. 2 пунктирной линией показана зависимость инкремента от угла распространения волны для колебаний на границе между двумя полубесконечными областями плазмы при  $C_S = 0$ . Легко видеть, что величина инкремента антисимметричного решения больше величины инкремента для случая двух полубесконечных областей, причём для всех направлений волнового вектора.

---

**Рис. 2.** Зависимости нормированного на  $U_{0f}/a$  инкремента от угла  $\theta$  при различных скоростях звука для антисимметричной (а) и симметричной (б) мод. Параметры плазмы одинаковы во всех трёх областях. Отношение альфвеновской скорости к скорости потока выбрано следующим:  $V_A/U_{0f} = 0,316$ . Указано отношение квадрата скорости звука к квадрату скорости потока. Пунктирной линией представлена зависимость инкремента от угла  $\theta$  для случая двух полубесконечных областей плазмы при  $C_S^2/U_{0f}^2 = 0,001$ . Расчёты выполнены для возмущения с нормированным на полуширину потока волновым числом равным единице,  $ka = 1$



*a*



*b*

Таким образом, результаты показывают, что поток конечной ширины может быть неустойчив относительно антисимметричных колебаний с длиной волны порядка поперечного размера потока для произвольных направлений распространения колебаний при больших значениях звукового числа Маха,  $M_S^2 = \left(C_S^2/U_{0f}^2\right)^{-1} > 4$ .

Анализ устойчивости системы в зависимости от модуля волнового числа при различных углах распространения показывает, что для углов меньше некоторого критического  $\theta_{cr}$  неустойчивость развивается в ограниченном диапазоне длин волн. Для  $\theta > \theta_{cr}$  неустойчивыми оказываются сколь угодно короткие волны, что является следствием отсутствия переходного слоя [Miura, Pritchett, 1982]. Значение критического угла при выбранных параметрах плазмы определяется тем, что для  $\theta < \theta_{cr}$  неустойчивость К-Г на границе между двумя полубесконечными областями плазмами не развивается.

В п. 1.3 рассматривается случай, когда плазма имеет различные параметры по разные стороны от потока. В этом случае развитие неустойчивости также возможно при больших числах Маха, причём волны, распространяющиеся под углом меньше критического, неустойчивы в ограниченном диапазоне длин волн. В разделе подробно рассматривается влияние величины отношения плотности плазмы с одной стороны от потока к плотности плазмы в потоке. Анализ зависимости инкремента неустойчивости от угла распространения при различных плотностях показывает, что с уменьшением плотности инкремент падает для всех направлений распространения, однако для волновых векторов, направленных под небольшим углом к скорости потока, падение инкремента наибольшее. В плазме с конечной сжимаемостью изменение плотности приводит к соответствующему изменению напряжённости магнитного поля, которое определяется непрерывностью полного давления на границе потока:

$$V_{A_1}^2/U_{0f}^2 = \left(V_{Af}^2/U_{0f}^2\right)/\rho_1 - \frac{6}{5} \left[ \frac{C_{S1}^2}{U_{0f}^2} - \left(C_{Sf}^2/U_{0f}^2\right)/\rho_1 \right]. \quad \text{При достаточно}$$

малых значениях  $\rho_1$  альфвеновская скорость в области 1 может стать достаточно большой, чтобы на границе выполнялось условие устойчивости  $V_{A_1} + V_{Af} > U_{0f}$ . Результаты вычисления инкремента для низких плотностей плазмы с одной стороны от потока показывают, что развитие неустойчивости в системе возможно, если условие устойчивости выполнено на одной из границ потока и не выполнено на другой. В слабом магнитном поле неустойчивость может развиваться для произвольного направления волнового вектора. Однако при увеличении напряжённости магнитного поля и приближении к порогу



устойчивости колебания с длинами волн больше ширины потока, распространяющиеся вдоль скорости потока и под небольшим углом к нему, полностью стабилизируются, однако возмущения с волновыми векторами, направленными под большими углами к скорости потока, остаются неустойчивыми.

Параграф 1.4 посвящён анализу структуры магнитного поля, связанного с возмущением. В работе наглядно продемонстрировано, что для несжимаемой плазмы амплитуда колебаний монотонно падает при удалении от границы потока. В плазме с конечной температурой окружающее пространство вовлекается в колебательное движение, и глубина проникновения увеличивается с уменьшением скорости звука.

Во второй главе рассматривается устойчивость цилиндрически симметричного потока в продольном магнитном поле. В п. 2.1 подробно описана цилиндрическая модель ограниченного в пространстве потока и получено дисперсионное уравнение для случая, когда магнитное поле направлено вдоль скорости потока. Анализ устойчивости проводится в цилиндрической системе координат. На рис. 3 представлена геометрия исследуемой системы. Пространство разделено на две области:  $r > a$  и  $r < a$ , в каждой из которых плазма однородна, но плотность плазмы, скорость звука и напряжённость магнитного поля в различных областях могут отличаться. Поток плазмы распространяется в области  $r < a$  вдоль оси симметрии  $Z$  со скоростью  $U_0$ , окружающая плазма покоится.

Очевидно, что для каждой из областей  $r > a$  и  $r < a$  линеаризованная система МГД-уравнений (1)–(3), так же как и следствие (4), верны при условии соответствующей замены дифференциальных операторов в цилиндрической системе координат.

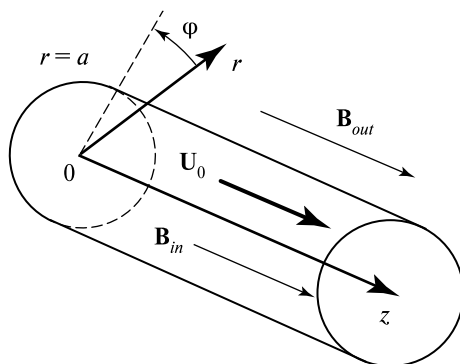


Рис. 3. Геометрия цилиндрической модели

Введём новое обозначение для индекса  $j$  из уравнения (4):  $j = in$  для области  $r < a$  и  $j = out$  для области  $r > a$ . Общее решение уравнения (4) для цилиндрической геометрии может быть выражено через модифицированные функции Бесселя первого и второго рода,  $I$  и  $K$  соответственно, от комплексного аргумента:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{p}_j &= \left( C_1 I_m \left( rk_z \sqrt{1 - \lambda_j} \right) + C_2 K_m \left( rk_z \sqrt{1 - \lambda_j} \right) \right) \exp(-i\tilde{\omega}t + ik_z z + im\phi), \\ \lambda_{in} &= \frac{(1 - \omega)^4}{(1 - \omega)^2 \left( C_{S in}^2 + V_{A in}^2 \right) / U_0^2 - V_{A in}^2 C_{S in}^2 / U_0^4}, \\ \lambda_{out} &= \frac{\omega^4}{\omega^2 \left( C_{S out}^2 + V_{A out}^2 \right) / U_0^2 - V_{A out}^2 C_{S out}^2 / U_0^4}, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

где  $V_{Aj} \equiv B_j / \sqrt{4\pi\rho_j}$  — альфвеновская скорость;  $C_{Sj}$  — скорость ионного звука;  $\rho_j$  — равновесное значение плотности в области  $j$ ;  $\omega \equiv \tilde{\omega} / kU_{0f}$  — безразмерная частота;  $I_m$  — модифицированная функция Бесселя первого рода порядка  $m$ ;  $K_m$  — модифицированная функция Бесселя второго рода порядка  $m$ ;  $C_1$  и  $C_2$  — некоторые постоянные. Чтобы решение было ограниченным, в области  $r < a$  следует выбрать  $C_2 = 0$ , а в области  $r > a$  —  $C_1 = 0$ . Дисперсионное уравнение для системы получаем из условий непрерывности полного давления и радиального смещения на границе  $r = a$ :

$$\frac{K'_m(k_{zout}a)}{K_m(k_{zout}a)} k_{zout} \left( (1 - \omega)^2 - A_{in} \right) - \frac{I'_m(k_{zin}a)}{I_m(k_{zin}a)} \left( \rho\omega^2 - A_{out} \right) k_{zin} = 0. \quad (12)$$

В выражении (12)  $K'_m$  и  $I'_m$  обозначают производные соответствующих функций Бесселя по аргументу, волновые числа  $k_{zin}$ ,  $k_{zout}$  и безразмерные величины  $\rho$ ,  $A_{in}$ ,  $A_{out}$  выражаются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} k_{zin} &= k_z \sqrt{1 - \lambda_{in}}, \quad k_{zout} = k_z \sqrt{1 - \lambda_{out}}, \\ A_{in} &= \frac{V_{A in}^2}{U_0^2}, \quad A_2 = \frac{V_{A out}^2}{U_0^2} \frac{\rho_{out}}{\rho_{in}}, \quad \rho = \frac{\rho_{out}}{\rho_{in}}. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Уравнение (12) описывает малые колебания цилиндрического потока сжимаемой плазмы в продольном магнитном поле. С точностью до замены системы координат (12) эквивалентно дисперсионным уравнениям, полученным в работах [Ershkovich, 1980; McKenzie, 1970]. Как и в случае плоскопараллельного потока, в коротковолновом пределе,  $k_z a \rightarrow \infty$ , дисперсионное уравнение для цилиндриче-

ского потока переходит в уравнение для колебаний на границе между двумя полубесконечными областями плазмы.

В п. 2.2 подробно исследована устойчивость системы в приближении несжимаемой плазмы. При  $C_{sy} \rightarrow \infty$  уравнение (12) значительно упрощается и сводится к квадратному уравнению на  $\omega$ , которое имеет следующие решения:

$$\omega_{1,2} = \frac{K \pm \sqrt{K^2 A_{in} + IK(\rho - \rho A_{in} - A_{out}) + I^2 \rho A_{out}}}{K - I\rho}, \quad (14)$$

где обозначено  $K \equiv \frac{K'_m(k_z a)}{K_m(k_z a)}$ ,  $I \equiv \frac{I'_m(k_z a)}{I_m(k_z a)}$ . Из анализа выражения (14) можно получить условие абсолютной устойчивости:

$$U_0 < V_{Ain} + V_{Aout}. \quad (15)$$

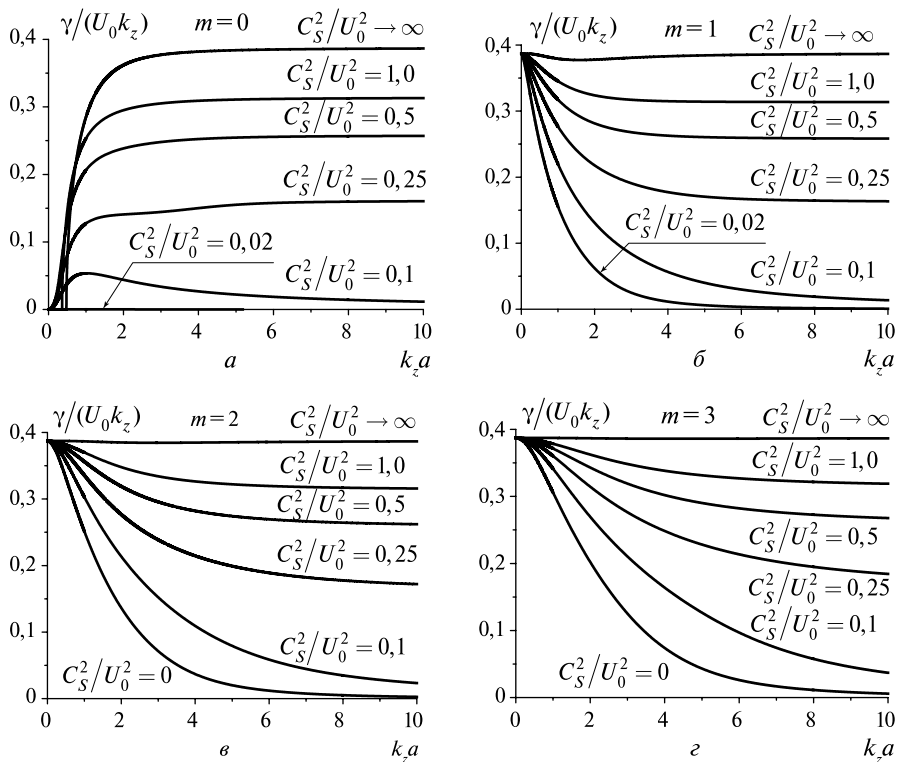
Обратим внимание, что соотношение (15) эквивалентно условию устойчивости ограниченного потока плазмы в рамках трёхслойной плоскопараллельной модели (см. работы [Uberoi, 1986; Буринская, 2008]).

Детальный анализ решений (14) представлен в п. 2.2 в виде диаграммы устойчивости, которая позволяет определить, какого типа колебания могут развиваться в системе при заданных значениях плотности плазмы и напряжённости магнитного поля в потоке и в окружающем пространстве.

Параграф 2.3 посвящён исследованию влияния конечной скорости звука в плазме на устойчивость цилиндрического потока для случая, когда параметры плазмы в потоке и в окружающем пространстве одинаковы.

На рис. 4 представлены зависимости нормированного инкремента от нормированного волнового числа для различных значений отношения квадрата скорости ионного звука к скорости потока. Расчёты проведены для четырёх различных значений порядка функций Бесселя  $m$ : на рис. 4а представлены расчёты для  $m = 0$ , на рис. 4б — для  $m = 1$ , на рис. 4в — для  $m = 2$  и на рис. 4г для  $m = 3$ .

Сравнивая рис. 4а и б для мод  $m = 0$  и  $m = 1$ , соответственно, легко видеть, что колебания с  $m = 1$  при малых скоростях звука  $C_s^2/U_0^2 < 0,25$  имеют значительно больший инкремент, чем колебания с  $m = 0$ . Из данных рис. 4 видно, как и в случае плоскопараллельного потока, для малых значений скорости звука неустойчивость развивается в ограниченном диапазоне волновых чисел, причём наиболее неустойчивыми оказываются волны с длиной больше или порядка поперечного размера потока.



**Рис. 4.** Зависимости нормированного инкремента  $\gamma/(U_0 k_z)$  от  $k_z a$ , построенные для различных значений скорости ионного звука. Параметры плазмы в потоке и вне его одинаковы:  $V_{Ain}/U_0 = V_{Aout}/U_0 = 0,316$ ;  $\rho = 1,0$ ;  $C_{sin}^2/U_0^2 = C_{sout}^2/U_0^2$ , величины квадратов отношения скорости звука к скорости потока указаны около каждой зависимости. Расчёты выполнены для четырёх различных значений параметра  $m$ : рис. 4а —  $m = 0$ ; рис. 4б —  $m = 1$ ; рис. 4в —  $m = 2$ ; рис. 4г —  $m = 3$

Таким образом, цилиндрический поток может быть неустойчив для больших значений звукового числа Маха  $M_s \gg 2$  относительно длинноволновых колебаний.

Результаты расчётов, выполненных для мод  $m = 2$  и  $m = 3$  (см. рис. 4в и г соответственно), показывают, что при увеличении порядка  $m$  значение инкремента при заданном значении  $k_z a$  повышается, а область волновых чисел, при которых возможно развитие неустойчивости, расширяется в сторону больших значений волновых чисел, более коротких волн.

Учитывая, что в нашей модели между потоком плазмы и окружающим пространством отсутствует переходной слой и корректное описание коротких волн не представляется возможным, изучение колебаний с порядком  $m > 1$  не проводится.

Отметим, что в некоторых работах, например [Ershkovich, 1980; Grigorenko et al., 2010], приближение несжимаемой плазмы используется для описания устойчивости цилиндрического потока в сжимаемой плазме относительно длинноволновых колебаний с порядком  $m \geq 1$ . Действительно, расчёты показывают, что при  $k_z a \rightarrow 0$  инкременты для несжимаемой плазмы близки к инкрементам для плазмы с конечной скоростью звука, если  $m \geq 1$ . Однако даже для  $k_z a \approx 0,5$  инкременты могут отличаться. В п. 2.3 приведён пример, когда при низкой температуре максимальным инкрементом обладают волны, которые в несжимаемом пределе были устойчивы. По этой причине пользоваться несжимаемым приближением для описания длинноволновых возмущений цилиндрического потока плазмы следует с большой осторожностью.

В п. 2.4 приведён анализ устойчивости винтовой моды в низкотемпературной плазме  $C_S \ll U_0$  в зависимости от плотности окружающей плазмы. Наибольший интерес представляют именно колебания с  $m = 1$ , так как только винтовая мода приводит к смещению центра масс и искажению оси симметрии потока, закручиванию его по спирали как целого. Показано, что при уменьшении относительной плотности  $\rho_{out}/\rho_{in}$  инкремент длинноволновых колебаний падает, а коротковолновых — увеличивается, диапазон волновых чисел, при которых возможно развитие неустойчивости, расширяется в сторону больших значений, и длина волны, при которой достигается максимальный инкремент, уменьшается. При увеличении относительной плотности наблюдается обратный эффект: максимум зависимости инкремента от волнового числа смещается в более длинные волны, а более короткие волны становятся устойчивыми. Для коротковолновых колебаний увеличение и уменьшение плотности не приводит к изменению фазовой скорости, она остаётся равной альфвеновской скорости в потоке с учётом доплеровского сдвига. На фазовой скорости длинноволновых колебаний изменение плотности сказывается существенным образом: чем больше значение относительной плотности, тем меньше фазовая скорость. Воспользовавшись приближением  $k_z a \rightarrow 0$ , можно оценить фазовую скорость длинноволновых колебаний  $V_{ph} = U_0 / (1 + \rho_{out}/\rho_{in})$ .

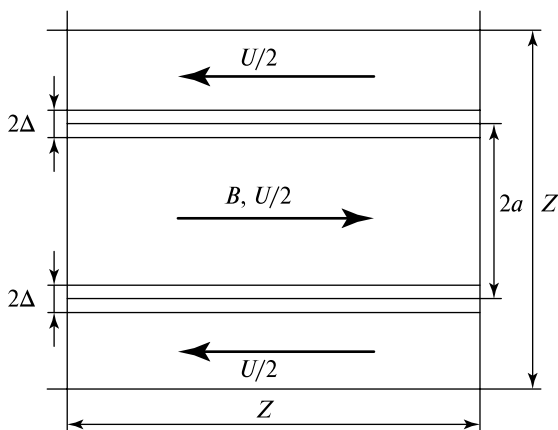
В п. 2.5 проведено исследование структур собственных мод неустойчивости К-Г для цилиндрического потока. Результаты исследования свидетельствуют, что в несжимаемой плазме возмущения

монотонно затухают при удалении от границы потока. При учёте конечной скорости звука в системе затухание носит осцилляторный характер, причём, чем меньше скорость звука в системе, тем большая область окружающего пространства вовлекается в колебательное движение вместе с потоком. Увеличение параметра  $m$  приводит к формированию поверхностных колебаний, которые затухают быстрее при удалении от потока, чем больше значение  $m$ .

В третьей главе исследуется нелинейная динамика развития неустойчивости К-Г для потока плазмы, ограниченного в пространстве, в рамках трёхслойной модели. Основным инструментом исследования нелинейной стадии развития неустойчивости К-Г является численное моделирование системы уравнений МГД [Frank et al., 1996; Min, 1997; Otto, Fairfield, 2000; Lai, Lyu, 2006]. В п. 3.1 дан краткий обзор существующих и широко используемых методик моделирования гидродинамической и магнитогидродинамической систем уравнений.

В п. 3.2 приведено описание исследуемой системы и используемого вычислительного метода. Схематически система представлена на рис. 5. Невозмущённый поток плазмы в центральной области шириной  $2a$  движется в положительном направлении со скоростью  $U/2$ , окружающая плазма движется в противоположном направлении с той же скоростью.

С точностью до выбора системы отсчёта данная конфигурация эквивалентна распространению потока плазмы в положительном направлении со скоростью  $U$  в ограниченной области.



**Рис. 5.** Схематическое изображение исследуемой системы

Магнитное поле однородно и направлено вдоль потока. Ширина переходной области между потоком и окружающей плазмой составляет  $2\Delta$ . Изменение продольной скорости в каждой из переходных областей описывается гиперболическим тангенсом. Аналитически распределение продольной скорости во всём пространстве может быть записано следующим образом:

$$V_x = 0,5U \left[ \tanh \frac{z+a}{\Delta} - \tanh \frac{z-a}{\Delta} - 1 \right].$$

Безразмерные переменные заданы таким образом, чтобы, двигаясь с единичной скоростью, возмущение преодолевало расстояние равное единичной длине.

В направлении  $X$ , вдоль потока, заданы периодические граничные условия, по оси  $Z$  — граничные условия непроницаемой стенки, нулевой поток. В области, близкой к границе, на численное решение МГД-системы уравнений наложено сжимающее отображение, которое позволяет снизить амплитуду возмущений при отражении от границ. Таким образом, численная сетка содержит центральную физически значимую область и два прилегающих к границе поглощающих слоя, где результат вычислений не описывает корректно поведение системы. Изучение решений системы уравнений проводится только в физически значимой области. Если амплитуда возмущений в поглощающем слое или в непосредственной близости от него оказывается сравнимой с амплитудой физически значимых возмущений в центральной области, вычисление эволюции решения во времени прекращается.

Интегрирование системы производится конечно-разностным методом, гарантирующим монотонность решения на основе принципа коррекции потоков [Zalesak, 1979]. Для получения опорного монотонного решения, необходимого для реализации [Zalesak, 1979], используется приближённый метод [Harten, 1983]. Устойчивые немонотонные схемы высокого порядка строятся при помощи реконструкции значений потока в полупелых точках [Harten et al., 1983] с использованием результатов [Colella, Woodward, 1984] для повышения точности шага по времени без применения методов Рунге-Кутты.

Параграф 3.3 посвящён исследованию развития периодических возмущений в зависимости от длины волны и напряжённости магнитного поля. Задавая периодическое начальное возмущение малой амплитуды, можно проводить исследования развития определённых собственных режимов колебаний системы. Анализ динамики развития решений при двух различных типах начального возмущения, симметричного и антисимметричного, показал, что взаимодействие

границ потока оказывает слабое влияние на формирование вихревых слоёв для осцилляций с длинами волн порядка ширины потока. Данный результат подтверждает предположения, сделанные в работе [Min, 1997], что неустойчивость К-Г для коротких волн развивается на разных границах потока независимым образом. Однако различные начальные условия приводят к различным типам колебаний в центральной области потока: при антисимметричном начальном возмущении на оси потока возникают колебания магнитного поля альфвеновского типа, при симметричном начальном возмущении центральная область потока остаётся неискажённой.

При возбуждении колебаний с длиной волны вдвое больше ширины потока различия между динамикой развития симметричного и антисимметричного начальных возмущений становятся значительными. При развитии симметричной моды вихри вытягиваются вдоль направления распространения потока, тогда как с развитием антисимметричной моды вихри имеют примерно одинаковые размеры в продольном и поперечном направлениях. Следует подчеркнуть, что в случае симметричного колебания даже для длинных волн существует определённая центральная область потока, которая сохраняет крупномасштабную направленную компоненту скорости. Укрупнение вихрей для антисимметричного начального возмущения приводит к тому, что в вихревое движение вовлекается значительно большая область окружающей плазмы, чем для симметричного возмущения, и увеличивается вероятность проникновения плазмы потока в окружающее пространство и наоборот.

Из работ, посвящённых исследованию развития неустойчивости К-Г в переходном слое между двумя полубесконечными областями, известно, что сильное продольное магнитное поле препятствует образованию вихревой структуры [Frank et al., 1996]. Исследование развития неустойчивости в сильном магнитном поле для ограниченного в пространстве потока также показывает, что вихри не образуются. Однако при антисимметричном начальном возмущении возникают крупномасштабные искажения границ потока, которые на сильно нелинейной стадии приводят к образованию узких струй плазмы из области потока в окружающее пространство.

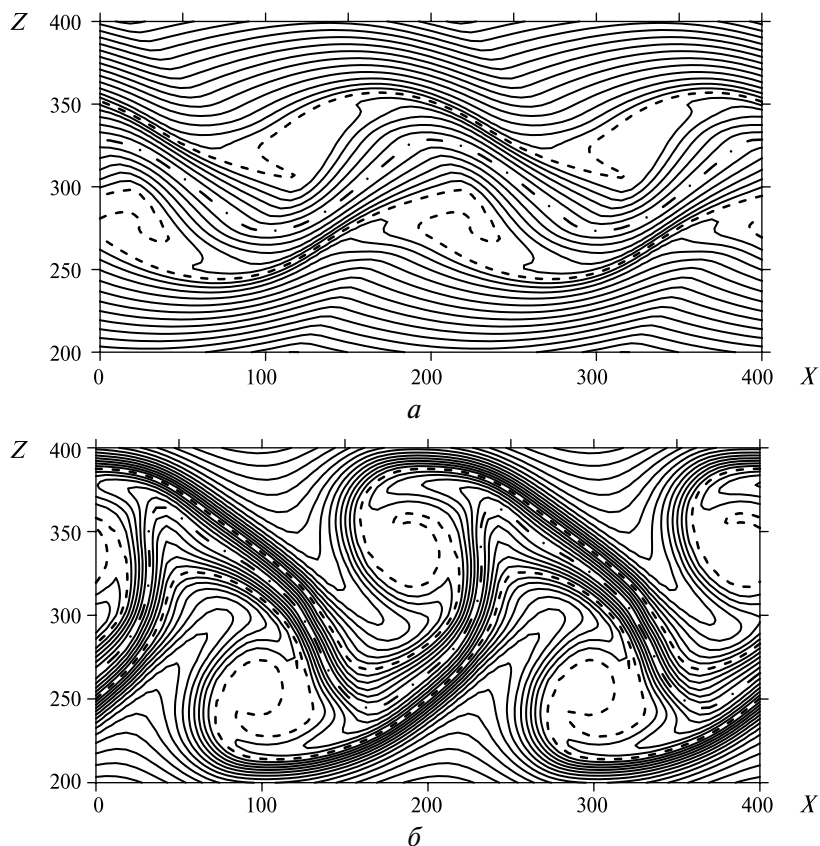
В п. 3.4 рассматривается вопрос о формировании вихревой структуры при возбуждении неустойчивости ансамблем случайных отклонений, шумом. В реальных условиях возмущения не бывают строго периодическими, строго симметричными или антисимметричными. Таким образом, чрезвычайно важным является вопрос о развитии неустойчивости при возбуждении аperiодическими возмущениями.



Первая часть п. 3.4 посвящена изучению формирования вихревой структуры в потоке плазмы, движущемся со скоростью близкой к скорости звука  $C_S/U_0 \approx 1$ . Исследование проведено в зависимости от отношения ширины переходного слоя между потоком и окружающей плазмой и поперечным размером потока. Показано, что для  $\Delta/a = 0,15$  на сильно нелинейной стадии образуются вихревые структуры, расположенные асимметричным образом. В ходе ряда экспериментов с различными случайными начальными отклонениями не выявлено закономерности при образовании вихрей. Таким образом, для потока плазмы с шириной много больше размера переходной области между потоком и окружающей плазмой влияние границ потока друг на друга незначительно. Для узкого потока плазмы,  $\Delta/a = 0,5$ , в ходе ряда вычислений установлено, что в системе развиваются преимущественно антисимметричные решения типа змейки, которые приводят к искажению потока как целого.

Ключевым фактором, влияющим на формирование вихревой структуры при развитии неустойчивости К-Г в переходном слое между областями полубесконечной плазмы является температура потока. Во второй части п. 3.4 проведён анализ численного решения для случая существенно сверхзвукового потока,  $M_{JS} > 2$ . Исследования развития неустойчивости для случая двух полубесконечных областей показывают, что вихревая структура в таком потоке не формируется [Lai, Luu, 2006]. Проведённые расчёты для случая ограниченного в пространстве потока, показывают, что развитие неустойчивости на сильно нелинейной стадии приводит к искажению потока как целого и образованию крупномасштабных вихрей.

На рис. 6 представлены силовые линии магнитного поля для двух последовательных моментов времени:  $t = 3200$  (см. рис. 6а) и  $t = 4000$  (см. рис. 6б). Для удобства восприятия рисунок повторен дважды в горизонтальном направлении, в котором заданы периодические граничные условия. Расчёт выполнен для случая, когда плотности плазмы в потоке и в окружающем пространстве одинаковы, при следующих значениях звукового числа Маха  $M_S = 3,0$  и альфвеновского числа Маха  $M_A \equiv U_0/V_A = 10,0$ , где  $V_A$  — альфвеновская скорость, соответствующее число Маха для быстрого магнитного звука  $M_{JS} \approx 2,8 > 2$ . Отношение ширины переходной области к поперечному размеру потока выбрано  $\Delta/a = 0,1$ . В качестве начального возмущения использовался ансамбль случайных отклонений. На рис. 4а отчётливо видны области, где магнитные силовые линии, находящиеся на краю потока (пунктирные линии), закручены. Эти области расположены строго антисимметричным образом, что свидетельствует о развитии в системе антисимметричного колебания.



**Рис. 6** Силовые линии магнитного поля, построенные в физически значимой вычислительной области от некоторого начального ансамбля случайных возмущений для двух моментов времени:  $t = 3200$  (а) и  $t = 4000$  (б). Штрихами обозначены магнитные линии, которые в начальный момент находились на границе потока, где продольная скорость обращается в нуль. Штрихпунктирная линия соответствует магнитной линии, которая в начальный момент времени проходила через центр потока. В направлении  $X$ , в котором заданы периодические граничные условия, рисунок повторен дважды. Вычисления выполнены при следующих параметрах системы:  $a = 30$ ;  $\Delta = 3$ ;  $\Delta/a = 0,1$ ;  $M_S = 3,0$ ;  $M_A = 10,0$

На оси потока наблюдаются колебания магнитного поля альфвеновского типа значительной амплитуды. С развитием нелинейной стадии неустойчивости К-Г формируются вихревые структуры (см. рис. 6б). Обратим внимание, что силовая линия, которая в на-

чальный момент проходила через центр потока (штрихпунктирная линия), искажена настолько сильно, что в некоторых областях удалена от своего начального положения более чем на полуширину потока. Таким образом, в холодной плазме для ограниченного в пространстве потока, вследствие влияния друг на друга границ потока, развивается антисимметричное решение даже для потока с шириной существенно больше размера переходной области, и формируются крупномасштабные вихри.

*В заключении сформулированы положения, выносимые на защиту.*

### **Цитированная литература**

[Буринская, 2008] *Буринская Т.М.* Неустойчивость Кельвина-Гельмгольца для потока плазмы, ограниченного в пространстве // *Физика плазмы*. 2008. Т. 34. № 12. С. 1013–1020.

[Ландау, 1944] *Ландау Л.Д.* Об устойчивости тангенциальных разрывов в сжимаемой жидкости // *Докл. АН СССР*. 1944. Т. 44. С. 151–153.

[Фридман, 2008] *Фридман А.М.* Предсказание и открытие сильнейших гидродинамических неустойчивостей, вызванных скачком скорости: теория и эксперименты // *Успехи физ. наук*. 2008. Т. 178. С. 225–242.

[Blumen, 1970] *Blumen W.* Shear layer instability of an inviscid compressible fluid // *J. Fluid Mechanics*. 1970. V. 40. Pt. 4. P. 769–781.

[Chandrasekhar, 1961] *Chandrasekhar S.* Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability. N.Y.: Oxford University Press, 1961

[Colella, Woodward, 1984] *Colella P., Woodward P.R.* The Piecewise Parabolic Method (PPM) for Gas-Dynamical Simulations // *J. Computational Physics*. 1984. V. 54. N. 1. P. 174–201.

[Dahlburg, Einaudi, 2000] *Dahlburg R.B., Einaudi G.* The compressible plane current-vortex sheet // *Physics of Plasmas*. 2000. V. 7. P. 1356–1665.

[Daru, Tenaud, 2004] *Daru V., Tenaud C.* High order one-step monotonicity preserving schemes for unsteady flow calculations // *J. Computational Physics*. 2004. V. 193. P. 563–594.

[Ershkovich, 1980] *Ershkovich A.I.* Kelvin-Helmholtz instability in type-1 comet tails and associated phenomena // *Space Science Reviews*. 1980. V. 25. N. 1. P. 3–34.

[Ershkovich, Nusinov, 1972] *Ershkovich A.I., Nusinov A.A.* Geomagnetic tail oscillations // *Cosmic Electrodynamics*. 1972. V. 2. P. 460–470.

[Fejer, 1964] *Fejer J.A.* Hydromagnetic stability at a fluid velocity discontinuity between compressible fluids // *Physics of Fluids*. 1964. V. 7. P. 499–503.

[Frank et al., 1996] *Frank A. et al.* The Magnetohydrodynamic Kelvin-Helmholtz Instability: A Two-dimensional Numerical Study // *Astrophysical J.* 1996. V. 460. P. 777.

[Grigorenko et al., 2010] *Grigorenko E. E., Burinskaya T. M., Shevelev M. et al.* Large-scale fluctuations of PSBL magnetic flux tubes induced by the field-aligned motion of highly accelerated ions // *Annales Geophysicae*. 2010. V. 28. P. 1273–1288. doi: 10.5194/angeo-28-1273-2010.

[Harten, 1983] *Harten A.* High resolution schemes for hyperbolic conservation laws // *J. Computational Physics*. 1983. V. 49. Iss. 3. P. 357–393.

[Harten et al., 1983] *Harten A., Lax P.D., van Leer B.* On Upstream Differencing and Godunov-Type Schemes for Hyperbolic Conservation Laws // *SIAM Rev.* 1983. V. 25. N. 1. P. 35–61.

[Helmholtz, 1868] *Helmholtz H.* On Discontinuous Movements of Fluids // *Philosopher magazine*. 1868. V. 36. P. 337–346.

[Kelvin, 1887] *Lord Kelvin (W. Thomson)* Stability of fluid motion — rectilinear motion of viscous fluid between two parallel planes // *Philosopher magazine*. 1887. Ser. 5. V. 24. P. 188–196.

[Lai, Lyu, 2006] *Lai S. H., Lyu L. H.* Nonlinear evolution of the MHD Kelvin-Helmholtz instability in a compressible plasma // *J. Geophysical Research*. 2006. V. 111. P. A01201. doi: 10.1029/2004JA010724.

[Liu et al., 1994] *Liu X. D., Osher S., Chan T.* Weighted essentially nonoscillatory schemes // *J. Computational Physics*. 1994. V. 115. P. 200–212.

[McKenzie, 1970] *McKenzie J. F.* Hydromagnetic oscillations of the geomagnetic tail and plasma sheet // *J. Geophysical Research*. 1970. V. 75. P. 5331–5339.

[Min, 1997] *Min K. W.* Simulation of the Kelvin-Helmholtz Instability in the Magnetized Slab Jet // *Astrophysical J.* 1997. V. 482. P. 733.

[Miura, Pritchett, 1982] *Miura A., Pritchett P. L.* Nonlocal stability analysis of the MHD Kelvin-Helmholtz instability in a compressible plasma // *J. Geophysical Research*. 1982. V. 87. P. 7431–7444.

[Otto, Fairfield, 2000] *Otto A., Fairfield D. H.* Kelvin-Helmholtz instability at the magnetotail boundary: MHD simulation and comparison with Geotail observations // *J. Geophysical Research*. 2000. V. 105. N. 21. P. 175.

[Uberoi, 1986] *Uberoi C.* On the Kelvin-Helmholtz instability of structured plasma layers in the magnetosphere // *Planetary and Space Science*. 1986. V. 34. Iss. 12. P. 1223–1227.

[Zalesak, 1979] *Zalesak S. T.* Fully multidimensional flux-corrected transport algorithms for fluids // *J. Computational Physics*. 1979. V. 31. Iss. 3. P. 335–362.

055(02)2

Ротапринт ИКИ РАН  
117997, Москва, Профсоюзная, 84/32

Подписано к печати 26.08.2013 г.

Заказ 3317

Формат 70×108/32

Тираж 100

1,17 уч.-изд. л.

## This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.