

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ  
ИНСТИТУТ КОСМИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК  
(ИКИ РАН)  
НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР ИКИ РАН

**А. С. Петросян**

**ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ  
ТЕОРИИ МЕЛКОЙ ВОДЫ**

Серия «Механика, управление и информатика»

**МОСКВА  
2014**

**Дополнительные главы теории мелкой воды***А. С. Петросян*

Данный материал основан на курсе лекций, читаемом для студентов кафедры космической физики Московского физико-технического института (государственного университета) (МФТИ), и может служить им учебным пособием. В книге содержатся главы курса гидродинамики, не нашедшие отражения в существующих учебниках. Обсуждаются обобщения классической теории мелкой воды на ровной границе для случая наклонной плоскости и при учёте горизонтального переноса импульса вследствие неоднородности начальных условий. Найдены все частные автомодельные решения уравнений Сен-Венана и показано, что характеристики уравнений мелкой воды на наклонной плоскости являются семейством парабол, имеющих точку касания 2-го порядка с соответствующими характеристиками классических уравнений мелкой воды над ровным дном. Решена задача о распаде произвольного разрыва для уравнений Сен-Венана на наклонной плоскости. Для течений мелкой воды на ровной поверхности при наличии слабых вертикальных неоднородностей начальных условий предложены модифицированные уравнения мелкой воды, найден новый безразмерный параметр, ограничивающий пределы применимости классических уравнений мелкой воды. Получено решение задачи Римана для модифицированных уравнений мелкой воды.

Книга может быть полезна студентам и аспирантам, специализирующимся в области гидродинамики.

*Ключевые слова:* гидродинамика, турбулентность, спиральность, многофазные среды, звук, сдвиговое течение, задача Римана.

**Петросян Араке́л Саркисович** — доктор физико-математических наук, заведующий теоретическим сектором ИКИ РАН, профессор кафедры космической физики МФТИ.

**Complimentary chapters of shallow-water theory***A. S. Petrosyan*

The textbook is based on the lectures for students of the department of the space physics at Moscow Institute of Physics and technology (State University). Extensions of shallow water theory for slope boundary, and for case of transportation of horizontal impulse due to nonhomogeneities of the initial conditions. All self-similar solutions and solution to Riemann problem for both cases are provided. The manual includes chapters which are not covered in existing textbooks.

The textbook is useful for students and postgraduates who are major in hydrodynamics.

*Keywords:* hydrodynamics, free surface, gravity acceleration, shallow water equations, modernized shallow water equations, self-similar solutions, Riemann problem.

## ВВЕДЕНИЕ

Уравнения мелкой воды, являясь системой нелинейных гиперболических уравнений, аппроксимируют полную систему уравнений Эйлера, описывающую течения несжимаемой жидкости со свободной поверхностью в поле силы тяжести при пренебрежении эффектами вертикальной неоднородности горизонтального поля скорости.

Уравнения мелкой воды широко используются для описания различных физических явлений. Примером применения двумерных уравнений мелкой воды к атмосферным течениям является классическая работа [Charney et al., 1950], в которой приближение мелкой воды используется для задач прогноза погоды. Авторы этой статьи проинтегрировали гидродинамические уравнения вдоль всей глубины атмосферы, пренебрегая стратификацией плотности, и, тем самым, получили двумерные баротропные уравнения. Уравнения мелкой воды применяются для описания крупномасштабных атмосферных течений, где существенно ускорение Кориолиса и его широтные вариации. В частности динамические уравнения работы [Charney et al., 1950] сформулированы в терминах потенциальной завихренности и функции тока.

Традиционно океанические течения являются важным направлением применения уравнений мелкой воды. Например, в работе [Hendershott, 1981] приведены результаты моделирования крупномасштабных течений на всем земном шаре, учитывающие влияние сил, вызываемых воздействием Солнца и Луны. Интересный пример применения приближения мелкой воды приведён в работе [Nihoul, Rondonay, 1975], в которой решены усреднённые уравнения мелкой воды для остаточных циркуляций. Уравнения

в этой статье усреднялись по периоду течения, нелинейные члены при таком усреднении описывали суммарный поток импульса (радиационное напряжение), который определяется волновой компонентой течения. Важным приложением уравнений мелкой воды является предсказание штормовой картины, а именно, генерация течений и вариаций уровня воды, вызванных отношением атмосферного давления к напряжению ветра на водной поверхности [Dube et al., 1982; Johns et al., 1982].

Если жидкость расслаивается по причине разной солёности, то полученный в результате слоистый поток очень похож на течение мелкой воды. Пример использования многослойной модели мелкой воды приведён в работе [Garvine, 1987]. Схожая многослойная модель использовалась в статье [Dowling, Ingersoll, 1989] для моделирования и описания Большого Красного Пятна в атмосфере Юпитера.

Также следует отметить актуальные применения приближений мелкой воды для описания гидравлических течений [Alcrudo, Garcia-Navarro, 1993; Stelling, 1983], береговых течений [Wind, Vreugdenhil, 1986], течений в реках [Ogink et al., 1986] и озёрах [Platzman, 1972], течений в водозаборниках, технических сужениях и лотках [Stoker, 1957], моделирования цунами [Shokin, Chubarov, 1980; Марчук и др., 1983], распространения волн прорыва и приливных бор в реках [Simons, 1980], распространения тяжёлых газов и примесей в атмосферах планет [Dowling, Ingersoll, 1989], атмосферных движений крупных масштабов, используемых при предсказании погоды [Charney et al., 1950; Gottelmann, 1999; Spatz et al., 1998].

Нелинейный характер уравнений мелкой воды в случае неоднородной подстилающей поверхности означает, что использование аналитических методов решения может иметь успех только при очень специальных условиях и для их решения приходится использовать численные методы. Гиперболичность уравнений мелкой воды определяет, кроме гладких, наличие и разрывных решений. Даже в случае, когда начальные условия являются гладкими, нелинейный характер уравнений, наряду с их гиперболичностью за конечное время может привести к разрывному решению. В газовой динамике разрывные решения ассоциируются с ударными волнами и контактными разрывами. В контексте уравнений мелкой воды разрывы связываются, с гидравлическими прыжками, сильными приливными течениями с распространением быстрых атмосферных фронтов. Простые автомодельные решения гиперболических систем уравнений — основополагающие в исследовании

нелинейных волновых явлений, поскольку позволяют найти точное решение задачи распада произвольного разрыва.

Задача о распаде произвольного разрыва для уравнений мелкой воды столь же важна, как и аналогичная проблема в газовой динамике [Ogink et al., 1986; Wind, Vreugdenhil, 1986], поскольку её решение позволяет объяснить целый ряд нелинейных явлений, сопровождающих течение несжимаемой жидкости со свободной границей в поле силы тяжести [Беликов, Семенов, 1997; Вольцингер, Пясковский, 1977; Lighthill, 1957; Stoker, 1948; Vreugdenhil, 1994]. Кроме того, решение этой задачи существенно расширяет возможности численного моделирования этих уравнений без явного выделения разрывов функций, типа метода Годунова [Ландау, Лифшиц, 1988; Шокин, Яненко, 1985; Уизем, 1977].

Уравнения мелкой воды, описывающие течение несжимаемой жидкости со свободной границей в поле силы тяжести, совпадают с видом уравнений движения политропного газа с показателем адиабаты, равным двум. Это позволяет перенести в теорию мелкой воды все непрерывные решения для идеального газа [Wind, Vreugdenhil, 1986]. Однако эта аналогия не распространяется на разрывные течения мелкой воды [Ogink et al., 1986], поскольку для такой задачи отличаются условия на поверхностях разрыва. В целом ряде важных обобщений уравнений мелкой воды, связанных, например, с учётом неоднородности подстилающей поверхности или описанием действующих на систему дополнительных внешних сил, описанная аналогия также отсутствует.

В работе [Марчук и др., 1983] проводится обобщение классической теории мелкой воды на случай течений над неровной подстилающей поверхностью. Показано, что обобщение простейших решений классической системы на случай неоднородного дна осуществимо для единственного класса подстилающих поверхностей, для которых и только для которых существуют решения типа простой волны. Вследствие того, что описанный класс поверхностей составляют плоскости, расположенные под некоторым углом к горизонту, основное внимание было уделено решениям соответствующей системы уравнений.

В настоящей работе получены основные частные решения для уравнений мелкой воды над наклонной плоскостью и показана принципиальная невозможность существования решений типа простой волны в областях непостоянства профиля подстилающей поверхности. Показано, что характеристики уравнений над наклонной плоскостью являются ветвями парабол, имеющих

касание второго порядка с характеристиками соответствующей системы уравнений мелкой воды над ровной поверхностью. Это позволяет оценить временной интервал, на котором решение уравнений Сен-Венана для наклонной плоскости можно приближенно заменить решениями классической системы уравнений мелкой воды и оценить величину отклонения как функцию времени. Выявлено, что решения типа простой волны уплотнения могут существовать лишь ограниченное время и так же, как и в случае классических уравнений мелкой воды, по истечении этого времени разрыв производных переходит в разрыв самих функций. Получена оценка минимального промежутка времени, в течение которого две произвольные характеристики одного семейства простой волны уплотнения пересекаются, переводя решения в класс разрывных функций. Найдена замена координат, переводящая одномерную систему уравнений Сен-Венана в систему классических уравнений мелкой воды и получены достаточные условия для существования этой замены.

В работе сформулирована и решена задача о распаде произвольного разрыва для уравнений мелкой воды над наклонной плоскостью. Использовано невырожденное преобразование зависимых и независимых переменных, сводящее уравнения Сен-Венана для наклонной плоскости к классическим уравнениям мелкой воды. Предложенный в данной главе путь решения задачи допускает обобщение для неоднородностей других классов, для которых нахождение частных решений затруднительно, а зачастую и невозможно. Приведены решения базовой задачи о распаде произвольного разрыва для классических уравнений мелкой воды над однородной поверхностью. Полученный здесь независимый вывод этих решений ориентирован прежде всего на математиков и физиков и представляет самостоятельный методический интерес для обобщений теории мелкой воды на случаи неоднородных подстилающих поверхностей и областей с препятствиями.

В работе изучаются течения мелкой воды на ровной поверхности при наличии слабых вертикальных неоднородностей начальных условий. Приближение мелкой воды для полных уравнений гидродинамики в этом случае содержит дополнительные члены, получаемые вследствие усреднения нелинейных слагаемых в исходных гидродинамических уравнениях [Stelling, 1983], описывающие адвективный перенос импульса вследствие зависимости горизонтальных течений мелкой воды от вертикальной координаты. Как и во всякой сильно нелинейной системе уравнений, усред-

нённые нелинейные слагаемые требуют параметризации, определяемой постановкой задачи. В работе предложена наиболее простая аппроксимация адвективного слагаемого модифицированных уравнений мелкой воды, допускающая теоретический анализ.

Получены основные частные решения для модифицированных уравнений мелкой воды, проведён сравнительный анализ практически наиболее важных решений. Обнаружены качественно новые эффекты, существенно влияющие на область применимости полной газодинамической аналогии. Особое внимание уделено автомодельным решениям, играющим ключевую роль в методах численного расчёта, заимствованных из газовой динамики. Это позволяет сформулировать и решить для такой системы классическую задачу о распаде произвольного разрыва.

Конструируется решение задачи Коши для уравнений мелкой воды с кусочно-постоянными начальными условиями. Показано, что учёт вертикальных неоднородностей исключает одну из конфигураций, реализуемых для классических уравнений мелкой воды. В частности, в нашем случае отсутствует зона вакуума, характерная для классического решения.

Данный материал основан на курсе лекций, читаемом доктором физико-математических наук, заведующим теоретическим сектором Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института космических исследований Российской академии наук (ИКИ РАН)), профессором Московского физико-технического института (Государственного университета) Петросяном А. С. для студентов кафедры космической физики и может служить для них учебным пособием, в котором содержатся главы курса гидродинамики, не нашедшие отражения в существующих учебниках. Изложенный материал может быть полезен студентам и аспирантам, специализирующимся в области гидродинамики.

# Глава 1. АВТОМОДЕЛЬНЫЕ ТЕЧЕНИЯ МЕЛКОЙ ВОДЫ НА НАКЛОННОЙ ПЛОСКОСТИ

## 1.1. Инварианты Римана для уравнений мелкой воды над неоднородной поверхностью

В настоящем разделе мы выпишем инварианты Римана для системы уравнений Сен-Венана. Запишем одномерную нестационарную систему уравнений течения мелкой воды над неоднородной поверхностью, задаваемой функцией  $z = z(x, y)$  (уравнения Сен-Венана):

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial(hu^2)}{\partial x} + gh \frac{\partial(h+z)}{\partial x} = 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

где  $h$  — высота свободной поверхности;  $u$  — скорость течения.

Для дальнейших преобразований удобнее использовать матричную форму системы (1.1):

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial t} \\ \frac{\partial u}{\partial t} \end{pmatrix} + \begin{vmatrix} u & h \\ g & u \end{vmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \frac{\partial z}{\partial x} \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

Рассмотрим матрицу  $\mathbf{A}$ :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} u & h \\ g & u \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

Система уравнений (1.2) является гиперболической в широком смысле, если матрица  $\mathbf{A}$  обладает двумя независимыми веществен-

ными собственными векторами и соответствующими различными собственными числами. Итак, для определения вида системы (1.2) найдём собственные числа матрицы  $\mathbf{A}$ :

$$\det \begin{vmatrix} u-\lambda & h \\ g & u-\lambda \end{vmatrix} = (u-\lambda)^2 - gh, \quad (1.4)$$

откуда

$$\lambda_{1,2} = u \pm \sqrt{gh}. \quad (1.5)$$

Введём традиционное обозначение:

$$c = \sqrt{gh}. \quad (1.6)$$

Таким образом, в нашем случае система уравнений (1.2) имеет два различных вещественных собственных значения с двумя соответствующими собственными векторами:

$$\bar{\ell}_1 = \left[ -\frac{c}{h}, 1 \right], \quad (1.7)$$

$$\bar{\ell}_2 = \left[ \frac{c}{h}, 1 \right]. \quad (1.8)$$

Естественно, что наличие дополнительного слагаемого в системе (1.1), преобразованного в свободный член системы (1.2), не нарушило гиперболичности уравнений. Поэтому дальнейшее изучение системы (1.2) удобнее проводить, записав её в инвариантах Римана. Для этого сначала приведём систему (1.2) к характеристическому виду умножением на соответствующие собственные вектора. Умножая (1.2) на левый собственный вектор  $\bar{\ell}_1$ , имеем:

$$-\frac{c}{h} \left( \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial u}{\partial x} - c \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{c^2}{h} \frac{\partial z}{\partial x}. \quad (1.9)$$

И окончательно:

$$-\frac{c}{h} \left( \frac{\partial h}{\partial t} + (u-c) \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial u}{\partial t} + (u-c) \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{c^2}{h} \frac{\partial z}{\partial x}. \quad (1.10)$$

Аналогично, умножая (1.2) на правый собственный вектор  $\bar{\ell}_2$ , имеем:

$$\frac{c}{h} \left( \frac{\partial h}{\partial t} + (u+c) \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial u}{\partial t} + (u+c) \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{c^2}{h} \frac{\partial z}{\partial x}. \quad (1.11)$$

Внесём  $\frac{c}{h}$  под знак дифференцирования, для этого найдём функцию  $\varphi(h)$  такую, что  $\frac{\partial\varphi}{\partial h} = \frac{c}{h}$ ; действительно, считая  $h$  функцией  $\varphi$ , имеем:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial\varphi} \frac{\partial\varphi}{\partial t}, \quad (1.12)$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial\varphi} \frac{\partial\varphi}{\partial x}. \quad (1.13)$$

Таким образом:

$$\varphi(h) = \int \frac{c}{h} dh = \int \frac{\sqrt{gh}}{h} dh. \quad (1.14)$$

Осуществляя интегрирование в (1.14), имеем:

$$\varphi(h) = 2\sqrt{gh}. \quad (1.15)$$

Выполним замену зависимых переменных  $u, h$  на  $r, s$ . Такая замена впервые была предложена Риманом для уравнений газовой динамики. Переменные  $r, s$  носят названия инвариантов Римана, поскольку вид уравнений, записанных в этих переменных, инвариантен относительно замены независимых переменных, определяемой переходом от лагранжевых координат к эйлеровым и наоборот.

Итак, выпишем выражения для  $r, s$  и  $u, h$ , определяющие формулы перехода:

$$r = u + \varphi(h), \quad s = u - \varphi(h), \quad (1.16)$$

откуда

$$u = \frac{r+s}{2}, \quad h = \frac{(r-s)^2}{16g}. \quad (1.17)$$

Далее, преобразуя полученные формулы (1.10), (1.11) и комбинируя соответствующие слагаемые, имеем для  $s(x, t)$ :

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial s}{\partial t} \right) + \left( \frac{1}{4}r + \frac{3}{4}s \right) \left( \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial s}{\partial x} \right) - \\ & - \frac{8g}{(r-s)} \left( \frac{(r-s)}{8g} \left( \frac{\partial r}{\partial t} - \frac{\partial s}{\partial t} \right) + \left( \frac{1}{4}r + \frac{3}{4}s \right) \frac{(r-s)}{8g} \left( \frac{\partial r}{\partial x} - \frac{\partial s}{\partial x} \right) \right) = -2g \frac{\partial z}{\partial x}, \end{aligned}$$

откуда:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial s}{\partial t} + \left( \frac{1}{4}r + \frac{3}{4}s \right) \left( \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial s}{\partial x} \right) - \frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial s}{\partial t} - \left( \frac{1}{4}r + \frac{3}{4}s \right) \left( \frac{\partial r}{\partial x} - \frac{\partial s}{\partial x} \right) \right] = \\ = -g \frac{\partial z}{\partial x}. \end{aligned}$$

После сокращений и приведения подобных слагаемых получим

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \left( \frac{1}{4}r + \frac{3}{4}s \right) \frac{\partial s}{\partial x} = -g \frac{\partial z}{\partial x}. \quad (1.18)$$

Аналогично для  $r(x, t)$ :

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial s}{\partial t} \right) + \left( \frac{3}{4}r + \frac{1}{4}s \right) \left( \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial s}{\partial x} \right) - \\ - \frac{8g}{(r-s)} \left( \frac{(r-s)}{8g} \left( \frac{\partial r}{\partial t} - \frac{\partial s}{\partial t} \right) + \frac{(r-s)}{8g} \left( \frac{3}{4}r + \frac{1}{4}s \right) \left( \frac{\partial r}{\partial x} - \frac{\partial s}{\partial x} \right) \right) = -2g \frac{\partial z}{\partial x}. \end{aligned}$$

Откуда:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial s}{\partial t} + \left( \frac{3}{4}r + \frac{1}{4}s \right) \left( \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial s}{\partial x} \right) - \frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial s}{\partial t} - \left( \frac{3}{4}r + \frac{1}{4}s \right) \left( \frac{\partial r}{\partial x} - \frac{\partial s}{\partial x} \right) \right] = \\ = -g \frac{\partial z}{\partial x}. \end{aligned}$$

И окончательно:

$$\frac{\partial r}{\partial t} + \left( \frac{3}{4}r + \frac{1}{4}s \right) \frac{\partial r}{\partial x} = -g \frac{\partial z}{\partial x}. \quad (1.19)$$

## 1.2. Частные решения уравнений мелкой воды на наклонной плоскости. Преобразование уравнений Сен-Венана в классические уравнения мелкой воды

Система уравнений (1.18), (1.19) принципиально отличается от соответствующей системы в инвариантах Римана для модели мелкой воды над горизонтальной плоскостью. Наличие в левой части функции  $-g \partial z / \partial x$  приводит к неприменимости классического решения типа волны Римана. По определению, принятому в газовой динамике, волной Римана (бегущей волной) называют течение, в котором постоянен один из инвариантов Римана. В случае

постоянства  $r$ -инварианта  $r(x, t) = r(x_0, t_0) = r_0 = \text{const}$  говорят о волне Римана, обращённой назад, а при постоянстве  $s$ -инварианта  $s(x, t) = s(x_0, t_0) = s_0 = \text{const}$  — о волне Римана, обращённой вперёд. В волне, обращённой назад, удовлетворяется тождественно уравнение для  $r$ -инварианта, а в волне, обращённой вперёд, — уравнение для  $s$ -инварианта. Однако для системы уравнений (1.18), (1.19) такие решения непригодны.

Определим волной Римана, обращённой назад, решение, в котором тождественно удовлетворяется уравнение (1.18) и, соответственно, волны, обращённой вперёд, — решение, в котором тождественно удовлетворяется уравнение (1.19). Корректность данного определения будет установлена ниже.

Найдём выражение для  $r(x, t)$ , тождественно удовлетворяющее уравнение (1.19) в некоторой области  $(x, t)$ . Заметим, что для этого необходимо равенство нулю множителя перед  $\left[\frac{3}{4}r + \frac{1}{4}s\right]$ , поскольку  $r(x, t)$  и  $s(x, t)$  линейно независимы. Следовательно,  $\partial r/\partial x \equiv 0$ . Однако, если также и  $\partial r/\partial t \equiv 0$ , то уравнение (1.19) не может быть удовлетворено. Таким образом,  $r(x, t)$  — функция только времени, т.е.  $r = r(t)$ , откуда, очевидно,  $\partial/\partial x(\partial r/\partial t) \equiv 0$  и, значит,  $\partial/\partial x(-g \partial z/\partial x) \equiv 0$ . Следовательно, решение, в котором тождественно удовлетворяется уравнение (1.18), может существовать только для подстилающих поверхностей, задаваемых уравнением для  $z(x)$ , таким, что  $\partial^2/\partial x^2(z) \equiv 0$ , т.е. функция  $z = kx + z_0$  — линейна. Для иных зависимостей, определяющих подстилающую поверхность, решения типа простой волны Римана не существует. Поэтому в дальнейшем будем считать  $\partial z/\partial x = k \equiv \text{const}$ .

Итак,

$$r = -gkt + r_0 \quad (1.20)$$

удовлетворяет уравнению (1.19) тождественно; подставляя (1.20) в уравнение (1.18), имеем:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \left[\frac{3}{4}s - \frac{1}{4}gkt + \frac{1}{4}r_0\right] \frac{\partial s}{\partial x} = -gk. \quad (1.21)$$

Как нетрудно видеть, вдоль  $X(t)$  — интегральных кривых уравнения:

$$\frac{dx}{dt} = u - c = \frac{3}{4}s - \frac{1}{4}gkt + \frac{1}{4}r_0, \quad (1.22)$$

иначе называемых характеристиками, уравнение (1.21) примет вид

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial s}{\partial x} = -gk \Leftrightarrow \frac{ds}{dt} = -gk. \quad (1.23)$$

Проинтегрируем уравнение (1.23):

$$s(X(t), t) = \int_0^t \frac{ds}{dt} dt = -gkt + s(X(0), 0). \quad (1.24)$$

Теперь, подставляя выражение (1.24) в уравнение (1.22), имеем:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{4} \left( -3gkt + 3s(X(0), 0) - gkt + \frac{1}{4}r_0 \right) = -gkt + \frac{3s(X(0), 0) + r_0}{4}. \quad (1.25)$$

Осуществляя интегрирование в (1.25), нетрудно получить выражение для  $X(t)$  в явном виде:

$$X(t) = \int_0^t \frac{dx}{dt} dt = -\frac{1}{2}gkt^2 + \frac{3s(X(0), 0) + r_0}{4}t + X(0). \quad (1.26)$$

Очевидно, что в плоскости  $(x, t)$  интегральные кривые (1.26) являются параболами, откуда следует, что решения уравнений мелкой воды над наклонной плоскостью отличаются от решений классических уравнений мелкой воды слагаемым  $-\frac{1}{2}gkt^2$ , что позволяет оценить точность приближения решения уравнений Сен-Венана решениями классических уравнений как функцию времени.

Аналогичные соотношения, с точностью до обозначений, получаются для волны Римана, обращённой назад:

$$s = -gkt + s_0; \quad (1.27)$$

$$r(X(t), t) = -gkt + r(X(0), 0); \quad (1.28)$$

$$X(t) = -\frac{1}{2}gkt^2 + \frac{3r(X(0), 0) + s_0}{4}t + X(0). \quad (1.29)$$

Если в некоторой области  $(x, t)$  волны Римана, обращённой назад, выполняется  $\frac{\partial s}{\partial x} > 0$ , то интегральные кривые (1.29) расходятся, и, учитывая соотношения (1.17), имеем:  $u = \frac{1}{2}(r_0 + s)$ , откуда:

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial s}{\partial x} \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} > 0$  и, с учётом первого уравнения системы (1.1),

имеем:  $\frac{\partial h}{\partial x} < 0$ , т. е.  $h$  — убывает. Таким образом, мы имеем волну разряжения. Если же в некоторой области  $(x, t)$  выполняется  $\frac{\partial s}{\partial x} < 0$ , то интегральные кривые (1.29) сходятся, и мы имеем волну сжатия. Для области  $(x, t)$ , в которой выполняется  $\frac{\partial s}{\partial x} = 0$ , характеристики представляют собой параллельные прямые, и тогда имеем зону равноускоренного течения.

Такие же (с точностью до знака) результаты получаются для волны, обращённой вперёд ( $s(x, t) = s_0 = \text{const}$ ). Для  $\frac{\partial r}{\partial x} < 0$  имеем волну разряжения, для  $\frac{\partial r}{\partial x} > 0$  — сжатия, а при  $\frac{\partial r}{\partial x} = 0$  — зону равноускоренного течения.

Используя выражения (1.18), (1.19), укажем соотношения в простых волнах. Итак, для волны Римана, обращённой назад, получаем следующую зависимость:

$$\begin{cases} u(x, t) + 2c(x, t) - gzt = u_0 + 2c_0, \\ u(x, t) - 2c(x, t) - gzt = u(x, 0) - 2c(x, 0), \\ \frac{dx}{dt} = \frac{3u(x, 0) + u_0}{4} + \frac{c_0 - 3c(x, 0)}{2} - gkt. \end{cases} \quad (1.30)$$

В случае волны Римана, обращённой вперёд, имеем соотношения:

$$\begin{cases} u(x, t) - 2c(x, t) - gzt = u_0 - 2c_0, \\ u(x, t) + 2c(x, t) - gzt = u(x, 0) + 2c(x, 0), \\ \frac{dx}{dt} = \frac{3u(x, 0) + u_0}{4} + \frac{3c(x, 0) - c_0}{2} - gkt. \end{cases} \quad (1.31)$$

Укажем практически важный частный случай бегущей волны. Волна Римана, обращённая назад ( $r(x, t) = r_0 = \text{const}$ ), называется центрированной, если характеристики (1.20) образуют пучок кривых, выходящих из одной точки  $(\tilde{x}, \tilde{t})$ . Обозначим  $\tilde{s}$  — параметр, принимающий все значения с отрезка  $[s(\tilde{x} - 0, \tilde{t}), s(\tilde{x} + 0, \tilde{t})]$ . Для упрощения записи положим  $\tilde{t} = 0$ ,  $\tilde{x} = 0$ . Тогда решение задаётся условиями:

$$\begin{cases} u(x, t) + 2c(x, t) - gzt = u_0 + 2c_0, \\ x = \frac{3\tilde{s} + u_0 + 2c_0}{4}t - \frac{1}{2}gkt^2. \end{cases} \quad (1.32)$$

Аналогично для центрированной волны Римана, обращённой вперёд ( $s(x, t) = s_0 = \text{const}$ ), обозначая  $\tilde{r}$  — параметр, принимающий все значения с отрезка  $[r(\tilde{x} - 0, \tilde{t}), r(\tilde{x} + 0, \tilde{t})]$ , имеем:

$$\begin{cases} u(x, t) - 2c(x, t) - gzt = u_0 - 2c_0, \\ x = \frac{3\tilde{r} + u_0 - 2c_0}{4}t - \frac{1}{2}gkt^2. \end{cases} \quad (1.33)$$

Следует обратить особое внимание на то, что, как видно из соотношений (1.32), (1.33), у системы (1.1) не существует непрерывных автомодельных решений. Это формально усложняет численный расчёт задач, описываемых данной системой.

Так же как и в классическом случае, решение типа простой волны уплотнения могут существовать только ограниченное время, поскольку в волне сжатия характеристики соответствующего семейства сходятся с ростом времени и градиенты  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial h}{\partial x}$  возрастают по абсолютной величине, вплоть до момента  $t = t_0$ , при котором характеристики пересекаются, а указанные градиенты становятся неограниченными. Укажем промежуток времени  $\Delta t$ , за который характеристики  $r$ -волны уплотнения  $X_1(t)$ ,  $X_2(t)$  пересекутся:

$$\Delta t = \frac{4}{3} \frac{(X_2(0) - X_1(0))}{u(X_1(0), 0) - u(X_2(0), 0) - 2(c(X_1(0), 0) - c(X_2(0), 0))}. \quad (1.34)$$

Используя формулу (1.34), нетрудно вычислить время существования непрерывного решения  $\Delta t_{\min}$ :

$$\Delta t_{\min} = \min_{X_1, X_2} \{ \Delta t \} = -\frac{4}{3} \max_x \left\{ \frac{1}{\frac{\partial u(x, 0)}{\partial x} - 2 \frac{\partial c(x, 0)}{\partial x}} \right\}. \quad (1.35)$$

Аналогичные соотношения получаются для  $s$ -волны уплотнения:

$$\Delta t = \frac{4}{3} \frac{(X_2(0) - X_1(0))}{u(X_1(0), 0) - u(X_2(0), 0) + 2(c(X_1(0), 0) - c(X_2(0), 0))}, \quad (1.36)$$

$$\Delta t_{\min} = \min_{x_1, x_2} \{ \Delta t \} = -\frac{4}{3} \max_x \left\{ \frac{1}{\frac{\partial u(x, 0)}{\partial x} + 2 \frac{\partial c(x, 0)}{\partial x}} \right\}. \quad (1.37)$$

Таким образом, по истечении времени  $\Delta t_{\min}$ , волна уплотнения переходит в разрывное решение. Как известно из теории гиперболических систем, огибающая пересечений характеристик для слабо нелинейных систем, к которым относится система (1.1), также является характеристикой.

Получим условия, которые должны выполняться на линиях разрыва решений. Для этого перепишем систему (1.1) в дивергентном виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial hu}{\partial t} + \frac{\partial hu^2}{\partial x} + \frac{1}{2} g \frac{\partial h^2}{\partial x} = -gh \frac{\partial z}{\partial x}. \end{cases} \quad (1.38)$$

Проинтегрируем уравнения (1.38) по произвольной области  $G$ , гомеоморфной квадрату на плоскости  $(x, t)$ :

$$\begin{cases} \iint_G \left( \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} \right) dG = 0, \\ \iint_G \left( \frac{\partial hu}{\partial t} + \frac{\partial hu^2}{\partial x} + \frac{1}{2} g \frac{\partial h^2}{\partial x} \right) dG = - \iint_G gh \frac{\partial z}{\partial x} dG. \end{cases} \quad (1.39)$$

Преобразуем объёмные интегралы, входящие в левую часть системы (1.39), используя формулу Грина:

$$\begin{cases} \oint_{\partial G} h dx - (hu) dt = 0, \\ \oint_{\partial G} (hu) dx - \left( hu^2 + \frac{1}{2} gh^2 \right) dt = - \iint_G gh \frac{\partial z}{\partial x} dx dt. \end{cases} \quad (1.40)$$

Система (1.40) представляет наиболее общие соотношения, которые, являясь интегральной записью законов сохранения, должны выполняться для произвольного контура  $\partial G$ , и в частности, для содержащего линию разрыва входящих функций.

Пусть  $x = x(t)$  — уравнение линии разрыва обладает непрерывной касательной на отрезке  $[t_1, t_2]$ . Полагая, что функции  $u(x, t)$ ,  $h(x, t)$  терпят разрыв только на линии  $x(t)$ , обозначим:

$$\left. \begin{aligned} u_1(t) &= \lim_{x \rightarrow x(t)-0} u(x,t), & u_2(t) &= \lim_{x \rightarrow x(t)+0} u(x,t), \\ h_1(t) &= \lim_{x \rightarrow x(t)-0} h(x,t), & h_2(t) &= \lim_{x \rightarrow x(t)+0} h(x,t). \end{aligned} \right\} \quad (1.41)$$

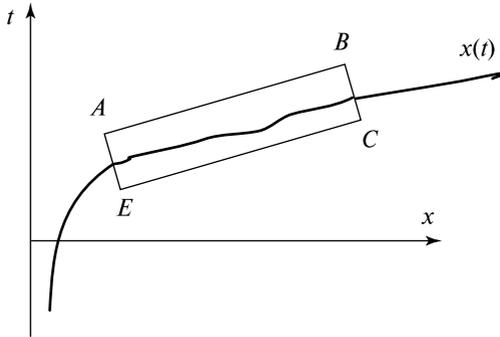
Возьмём в качестве  $\partial G$  контур  $ABCE$ , бесконечно близко при-  
мыкающий линиями  $AB$  и  $CE$  к линии разрыва  $x(t)$ , сверху и снизу  
от неё соответственно (рис. 1.1).

Введя в рассмотрение скорость разрыва  $D = D(t) = x'(t)$ , отку-  
да  $dx = D(t)dt$ , имеем:

$$\left\{ \begin{aligned} &\oint_{AB} (Dh - hu) dt - \oint_{CE} (Dh - hu) dt = 0, \\ &\oint_{AB} \left[ Dhu - \left( hu^2 + \frac{1}{2} gh^2 \right) \right] dt - \oint_{CE} \left[ Dhu - \left( hu^2 + \frac{1}{2} gh^2 \right) \right] dt = \\ &= - \iint_G gh \frac{\partial z}{\partial x} dx dt. \end{aligned} \right. \quad (1.42)$$

В силу произвольности контура  $ABCE$  соотношения (1.42)  
эквивалентны следующим условиям для подынтегральных  
выражений:

$$\left. \begin{aligned} Dh_1 - h_1 u_1 &= Dh_2 - h_2 u_2, \\ Dh_1 u_1 - \left( h_1 u_1^2 + \frac{1}{2} gh_1^2 \right) &= Dh_2 u_2 - \left( h_2 u_2^2 + \frac{1}{2} gh_2^2 \right). \end{aligned} \right\} \quad (1.43)$$



**Рис. 1.1.** Линия разрыва  $x(t)$ , окружённая контуром  $ABCE$ , бесконечно  
близко примыкающим к ней линиями  $AB$  и  $CE$  сверху и снизу

Или, используя оператор [ ] для обозначения скачка функций  $u(x, t)$ ,  $h(x, t)$  на разрыве  $x(t)$  и соотношений (1.41):

$$\left. \begin{aligned} [u] &= u_2(t) - u_1(t), \\ [h] &= h_2(t) - h_1(t), \end{aligned} \right\} \quad (1.44)$$

получим общий вид условий на разрыве:

$$\left. \begin{aligned} D[h] &= [hu], \\ D[hu] &= \left[ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \right]. \end{aligned} \right\} \quad (1.45)$$

Таким образом, условия на разрыве (1.45) совпадают с условиями Гюгонио для мелкой воды над горизонтальной поверхностью. Теперь путём несложных преобразований получаем связь между значениями основных функций и скорости разрыва:

$$\left. \begin{aligned} D &= \frac{h_1 u_1 - h_2 u_2}{h_1 - h_2}, \\ \frac{(h_1 u_1 - h_2 u_2)^2 - (h_1 u_1^2 - h_2 u_2^2)(h_1 - h_2)}{(h_1 - h_2)} &= gH(h_1 - h_2) + \frac{1}{2}g(h_1^2 - h_2^2). \end{aligned} \right\} \quad (1.46)$$

Отсюда находим:

$$u_1 = u_2 - (h_1 - h_2) \sqrt{\frac{1}{2}g \frac{(h_1 + h_2)}{h_1 h_2}}, \quad (1.47)$$

т.е. условия на сильном разрыве для рассматриваемой системы тождественно совпадают с условиями на разрыве для классической системы уравнений мелкой воды. Однако в отличие от классического случая описанные сильные разрывы имеют параболическую траекторию и распространяются с постоянным ускорением, равным  $-gk$ .

Анализ результатов п. 1.2 позволяет предъяснить в явном виде невырожденную замену зависимых и независимых переменных, сводящую систему (1.1) к классической системе уравнений мелкой воды над ровной поверхностью.

Действительно, полагая, как и прежде, что  $k = \frac{\partial z}{\partial x} = \text{const}$ , перепишем (1.1) в виде:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial h}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial x} &= -gk \end{aligned} \right. \quad (1.48)$$

и сделаем следующую замену переменных:

$$\begin{cases} \tilde{x} = x + \frac{1}{2} g k t^2, \\ \tilde{t} = t, \end{cases} \quad (1.49)$$

т. е.

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} + g k \tilde{t} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}}, \\ \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}}. \end{cases} \quad (1.50)$$

Как нетрудно убедиться, преобразование (1.49) является невырожденным, поскольку обладает положительно определённым якобианом:

$$I = \det \begin{vmatrix} \frac{\partial \tilde{t}}{\partial t} & \frac{\partial \tilde{t}}{\partial x} \\ \frac{\partial \tilde{x}}{\partial t} & \frac{\partial \tilde{x}}{\partial x} \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ g k t & 1 \end{vmatrix} = 1. \quad (1.51)$$

Таким образом, применяя (1.50) к (1.48), имеем:

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial \tilde{t}} + (u + g k \tilde{t}) \frac{\partial h}{\partial \tilde{x}} + h \frac{\partial u}{\partial \tilde{x}} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial \tilde{t}} + g \frac{\partial h}{\partial \tilde{x}} + (u + g k \tilde{t}) \frac{\partial u}{\partial \tilde{x}} = -g k. \end{cases} \quad (1.52)$$

Перекомбинируя соответствующим образом слагаемые в (1.52), получим:

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial \tilde{t}} + (u + g k \tilde{t}) \frac{\partial h}{\partial \tilde{x}} + h \frac{\partial (u + g k \tilde{t})}{\partial \tilde{x}} = 0, \\ \frac{\partial (u + g k \tilde{t})}{\partial \tilde{t}} + g \frac{\partial h}{\partial \tilde{x}} + (u + g k \tilde{t}) \frac{\partial (u + g k \tilde{t})}{\partial \tilde{x}} = 0. \end{cases} \quad (1.53)$$

Осуществляя в (1.53) замену  $\tilde{u} \rightarrow u - g k t$  зависимой переменной  $u$ , получаем классическую систему уравнений мелкой воды:

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial \tilde{t}} + \tilde{u} \frac{\partial h}{\partial \tilde{x}} + h \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} = 0, \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} + g \frac{\partial h}{\partial \tilde{x}} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} = 0. \end{cases} \quad (1.54)$$

Такая замена эквивалентна переходу в неинерциальную систему отсчёта, движущуюся с постоянным ускорением  $gk$  вдоль оси  $x$ .

Если  $k \neq \text{const}$ , то такая замена в общем случае невозможна из-за возникновения дополнительных динамических сил, которые приводят к вырождению якобиана (1.51). Таким образом, в случае, когда подстилающая поверхность является наклонной плоскостью переход в соответствующую неинерциальную систему отсчёта (т.е. замена координат) позволяет устранить свободный член в одномерной системе уравнений Сен-Венана (1.1) и оперировать с обычной системой уравнений мелкой воды (1.54).

## Глава 2. ЗАДАЧИ РИМАНА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ МЕЛКОЙ ВОДЫ НА НАКЛОННОЙ ПЛОСКОСТИ

### 2.1. Формулировка задачи Римана

В данном параграфе мы сформулируем задачу о распаде произвольного разрыва для уравнений мелкой воды на ровной поверхности:

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial hu}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} gh^2 + hu^2 \right) = 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

где  $h(x, t)$  — глубина слоя жидкости;  $u(x, t)$  — скорость жидкости;  $g$  — ускорение свободного падения.

В качестве условий Коши используются произвольные кусочно-постоянные начальные значения при  $t = 0$  для левого ( $x < 0$ ) и правого ( $x > 0$ ) полупространств:

$$\begin{cases} u = \tilde{u}_1, & h = \tilde{h}_1, & x < 0; \\ u = \tilde{u}_2, & h = \tilde{h}_2, & x > 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Разрыв (2.2) начальных условий двух полубесконечных жидкостей, характеризуемых постоянными параметрами  $\tilde{u}_1$ ,  $\tilde{h}_1$  и  $\tilde{u}_2$ ,  $\tilde{h}_2$  и граничащих в начальный момент  $t = 0$  вдоль плоскости  $X = 0$ , будем называть произвольным разрывом. Определение течения, возникающего при  $t > 0$  для этих начальных условий, назовём задачей о распаде произвольного разрыва. Так же как и в газовой динамике, эта задача сводится к нахождению плоскосимметричных одномерных течений, удовлетворяющих интегральным законам сохранения для системы уравнений (2.1) с начальными условиями (2.2):

$$\left. \begin{aligned} \oint_c h dx - hu dt &= 0, \\ \oint hu dt - \left[ \frac{1}{2} gh^2 + hu^2 \right] dx &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

Уравнения (2.3) определяют соотношения на поверхностях разрывов, которые должны соблюдаться для устойчивых решений. Таким образом, изначально произвольный разрыв будет эволюционировать, распадаясь на несколько устойчивых разрывов, включающих гидродинамический прыжок и слабый разрыв. Условия динамической совместности разрывных решений, дополненные условием устойчивости (диссипация энергии) для гидродинамического прыжка, определяют конфигурацию устойчивых разрывов, которые вместе с непрерывными течениями описывают эволюцию произвольных начальных данных.

Уравнения (2.3) инвариантны относительно преобразования подобия независимых переменных:  $t' = kt$ ,  $x' = kx$ ,  $k > 0$ . Отсюда, из условия единственности решения задачи, следует их автомодельность [Wind, Vreugdenhil, 1986]. Пусть:

$$\left. \begin{aligned} u(x, t) &= \bar{u}(x', t') = \bar{u}(kx, kt), \\ h(x, t) &= \bar{h}(x', t') = \bar{h}(kx', kt'), \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

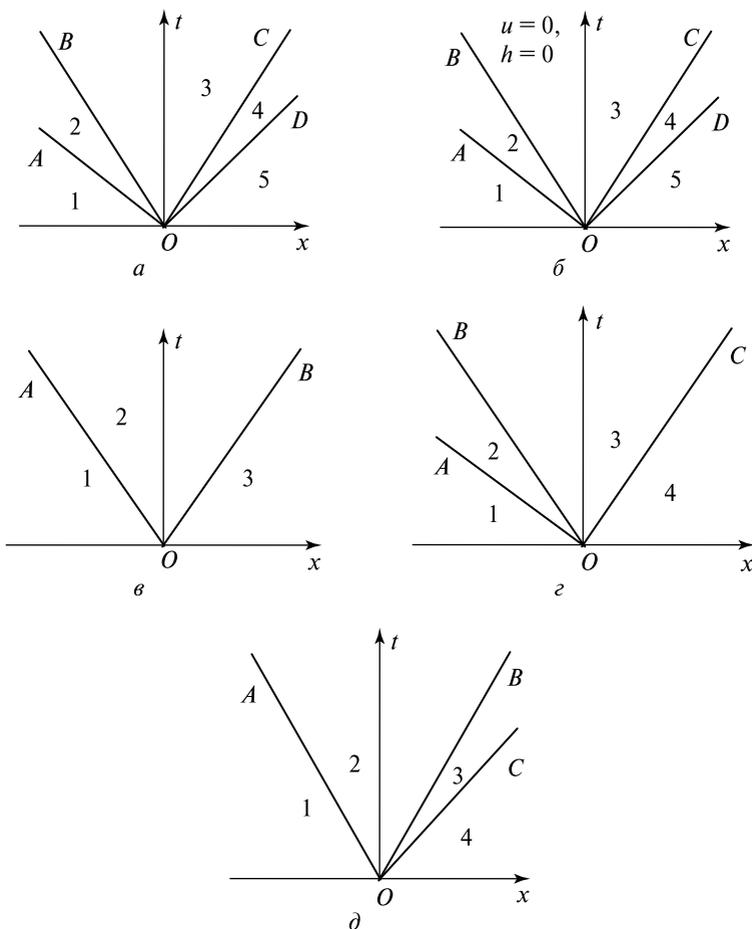
тогда, полагая  $k = \frac{1}{t} > 0$ , имеем:

$$\left. \begin{aligned} u(x, t) &= \bar{u}\left(\frac{x}{t}, 1\right) = \tilde{u}\left(\frac{x}{t}\right), \\ h(x, t) &= \bar{h}\left(\frac{x}{t}, 1\right) = \tilde{h}\left(\frac{x}{t}\right). \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

Таким образом, согласно (2.5), построение автомодельного решения задачи о распаде произвольного разрыва состоит в согласовании элементарных решений типа: постоянные течения, центрированные волны, гидродинамические прыжки — и в определении параметров, характеризующих их области определения.

Схематически автомодельная картина возникающего течения на плоскости  $(x, t)$  изображается одной из пяти возможных конфигураций (рис. 2.1).

Отсутствие иных конфигураций, кроме вышеуказанных, обеспечивается теоремой Цемплена и её простейшими следствиями [Wind, Vreugdenhil, 1986]. Рассмотрение задачи о распаде будем



**Рис. 2.1.** Конфигурации течения: *a* — «две волны разряжения»; *б* — «две волны разряжения и зона вакуума»; *в* — «два гидродинамических прыжка»; *г* — «волна разряжения — гидродинамический прыжок»; *д* — «гидродинамический прыжок — волна разряжения»

проводить следующим способом: отправляясь от конкретных условий (2.2), которые реализуют какую-то одну из указанных конфигураций, непрерывно изменяя параметры задачи (2.3), будем также непрерывно менять решение, переходя при этом через критические значения параметров, отделяющих одну конфигурацию от другой. Перейдём в систему координат, в которой справа жидкость покоится, т. е. в новую систему координат:

$$\begin{cases} u = u_l = \tilde{u}_1 - \tilde{u}_2, \\ x < 0, \end{cases} \quad \begin{cases} u = u_r = \tilde{u}_2 - \tilde{u}_2 = 0, \\ x > 0. \end{cases} \quad (2.6)$$

Пусть для определённости:  $h = h_l = h_1 > h = h_r = h_2$ . Предположим, что условия (2.2) определяют «ю две волны разряжения». В рамках этого предположения получим соотношения, которым должны удовлетворять начальные условия (2.2).

## 2.2. Конфигурация «две волны разряжения»

Данная конфигурация разбивает область определения течения на пять областей, разделённых четырьмя лучами  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$ ,  $OD$  (см. рис. 2.1a). Луч  $OA$ , задаваемый соотношением  $x = y_1 t$ , отделяет область постоянного течения 1, в которой значение  $u$  и  $h$ , задаваемые условиями (1.51), для левой массы жидкости сохраняют свои значения, от области 2 — центрированной волны Римана. В области 2 все соотношения определяются постоянством  $r$ -инварианта Римана, таким образом,  $r = u + 2\sqrt{gh} = \text{const}$ , откуда, обозначая  $\sqrt{gh} = c$ ,  $\frac{1}{2}gh^2 = p$ , имеем:

$$c = c_1 \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{u - u_1}{c_1} \right), \quad (2.7)$$

$$p = p_1 \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{u - u_1}{c_1} \right)^2. \quad (2.8)$$

Соответственно  $y_1 = u_1 - c_1$ , так как луч  $OA$  задаёт характеристику центрированной волны Римана, обращённой назад. Луч  $OB$ , задаваемый соотношением  $x = y_2 t$ , также является характеристикой, отделяющей волну разряжения от области 3 — зоны постоянного течения, т. е.  $y_2 = U - c$ . Лучи  $OC$  и  $OB$  отделяют центрированную волну Римана, обращённую вперёд, от областей 5 и 3 — постоянного течения. Аналогично лучам  $OA$  и  $OB$  лучи  $OC$  и  $OD$  задаются соотношениями  $x = y_3 t$ ,  $x = y_4 t$ , где  $y_3 = u + c$ ,  $y_4 = c$  соответственно.

В области 4 все параметры определены постоянством  $s$ -инварианта Римана:  $s = u - 2c = \text{const}$ , откуда:

$$c = c_2 \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{u}{c_2} \right), \quad (2.9)$$

$$p = p_2 \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{u}{c_2} \right)^2. \quad (2.10)$$

В области 5, как и в области 1, все параметры сохраняют свои значения, так как это зона постоянства течения. Для осуществления данной конфигурации необходимо и достаточно выполнение следующих очевидных соотношений:

$$y_1 < y_2 \leq y_3 < y_4,$$

где

$$y_1 = u_1 - c_1, \quad y_2 = U - c, \quad y_3 = U + c, \quad y_4 = c_2.$$

Таким образом, для области 2 имеем:

$$y_2 - y_1 > 0 \Leftrightarrow (U - c) - (u_1 - c_1) = (U - u_1) + (c_1 - c) > 0, \quad (2.11)$$

учитывая, что  $r = \text{const}$ ,

$$c = c_1 \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{U - u_1}{c_1} \right) = c_1 - \frac{1}{2} (U - u_1), \quad (2.12)$$

откуда  $y_2 = y_1 = \frac{3}{2} (U - u_1)$ , и окончательно:

$$y_2 - y_1 > 0 \Leftrightarrow (U - u_1) > 0. \quad (2.13)$$

Для области 4 аналогично:

$$y_4 - y_3 > 0 \Leftrightarrow c_2 - (c + U) = (c_2 - c) - U > 0, \quad (2.14)$$

учитывая, что  $s = \text{const}$ , выполняется:

$$c = c_2 \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{U}{c_2} \right) = c_2 + \frac{1}{2} U, \quad (2.15)$$

откуда  $y_4 - y_3 = -\frac{3}{2} U$ , и окончательно:

$$y_4 - y_3 > 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{2} U > 0 \Leftrightarrow U < 0.$$

Для области 3 выполнение неравенств носит очевидный характер, действительно:

$$y_3 - y_2 \leq 0 \Leftrightarrow (U + c) - (U - c) > 0. \quad (2.16)$$

Условие положительности функции  $p$  на  $x = y_2 t$  и  $x = y_3 t$  даёт два соотношения:

$$\left(1 - \frac{1}{2} \frac{U - u_1}{c_1}\right) > 0, \quad (2.17)$$

$$\left(1 + \frac{1}{2} \frac{U}{c_2}\right) > 0, \quad (2.18)$$

откуда путём несложных преобразований имеем:

$$u_1 > U - 2c_1 \quad \text{и} \quad U > -2c_2, \quad (2.19)$$

и окончательно:

$$u_1 > -2c_2 - 2c_1. \quad (2.20)$$

Найдём условия для параметров  $u_1, p_1, p_2$ , определяющие существование и единственность  $U$ , удовлетворяющего всем вышеуказанным условиям (2.11), (2.14), (2.16). Заметим, что условия (2.11), (2.14), (2.16) эквивалентны следующей системе неравенств:

$$\begin{cases} c_1 > c, \\ c_2 > c. \end{cases}$$

Учитывая, что  $h_1 > h_2$ , получим

$$c < c_2.$$

Далее, легко получить из условий постоянства инвариантов Римана выражение для величины скорости  $U$  в области 3:

$$U = \frac{1}{2}(u_1 + 2c_1 - 2c_2).$$

Учитывая последнее выражение, условие совместности конфигурации принимает следующий вид:

$$\frac{1}{2} \frac{u_1}{c_1} < \sqrt{\frac{p_2}{p_1}} - 1, \quad (2.21)$$

и окончательно

$$\left. \begin{aligned} u_1 &> -2c_1 - 2c_2, \\ u_1 &< 2c_1 \left( \sqrt{\frac{p_2}{p_1}} - 1 \right). \end{aligned} \right\} \quad (2.22)$$

Условие (2.14) не несёт новых ограничений, так как автоматически выполняется при  $p_1 > p_2$  (что является допущением) и  $U < 0$

что соответствует условию (2.16). Итак, если  $u_1 < 2c_1 \sqrt{\frac{p_2}{p_1} - 1}$  и  $u_1 > -2c_2 - 2c_1$  будет осуществлена конфигурация «две волны разрежения».

Рассмотрим ситуацию, при которой условие  $u_1 > -2c_2 - 2c_1$  нарушено. Покажем, что в этом случае реализуется конфигурация «две волны разрежения» и зона отсутствия жидкости.

### 2.3. Конфигурация «две волны разрежения, разделённые зоной вакуума»

Нарушение условия (2.21) приводит к тому, что корень уравнения

$$p_1(U) = p_1 \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{U - u_1}{c_1} \right)^2 = 0 \quad \text{меньше корня уравнения} \quad p_2(U) = p_2 \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{U}{c_2} \right)^2 = 0, \quad \text{т.е. уравнение } p_1(U) = p_2(U) \text{ не имеет решения.}$$

Значит, реализуется отрыв жидкости, и на лучах  $OB$ ,  $OC$  ( $x = y_2 t$ ,  $x = y_3 t$ ) необходимо поставить условие свободной границы (см. рис. 2.1б):

$$p_1(U) = p_1(U_\alpha) = p_1 \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{U - u_1}{c_1} \right)^2 = 0, \quad (2.23)$$

где  $U_\alpha$  — скорость самого быстрого возмущения в левой волне ( $x = y_2 t$ ), откуда

$$U_\alpha = u_1 + 2c_1. \quad (2.24)$$

Аналогично для  $U_\beta$  — скорости самого быстрого возмущения в правой волне ( $x = y_3 t$ ):

$$p_2(U) = p_2(U_\beta) = p_2 \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{U}{c_2} \right)^2 = 0, \quad (2.25)$$

откуда

$$U_\beta = -2c_2. \quad (2.26)$$

Очевидно, что  $U_\beta > U_\alpha$  обеспечено невыполнением условия (2.20), в противном случае существовал бы корень уравнения  $p_1(U) = p_2(U)$ , что подтверждает совместность данной конфигурации.

Действительно:  $y_1 = u_1 - c_1 < y_2 = u_1 + 2c_1$  и  $y_3 = U_\alpha > y_2 = U_\beta$ , а неравенство  $y_3 = -2c_2 < c_2$  — очевидно.

Итак, в случае  $u_1 < -2c_2 - 2c_1$  имеем конфигурацию «две волны разрежения и зона вакуума».

## 2.4. Конфигурация «два гидродинамических прыжка»

В данном случае область определения течения разбивается лучами  $OA$  и  $OB$  на три области (см. рис. 2.1б). В каждой из этих областей течение постоянно. В области 1 параметры, задаваемые начальными условиями (2.2) для левой массы жидкости, не изменяются. Аналогично, в области 3 параметры совпадают с начальными для правой массы жидкости. Луч  $OA$ , задаваемый уравнением  $x = D_1 t$ , является поверхностью разрыва параметров, на которой должны выполняться условия на гидродинамическом прыжке (условия Гюгонио для мелкой воды). Аналогично луч  $OB$ , определяемый соотношением  $x = D_2 t$ , является поверхностью скачка всех гидродинамических параметров. Условием реализации такой конфигурации служит тривиальное неравенство:

$$y_1 < y_2, \text{ т. е. } D_1 < D_2. \quad (2.27)$$

Для выполнения условия (2.27) необходимо и достаточно существования такого  $h$  ( $h$  — глубина в области 2), что  $h > h_1 > h_2$ . Таким образом, нахождение условий совместности конфигурации сводится к определению ограничений на начальные условия (2.2), обеспечивающих существование вышеуказанного  $h$ .

Запишем соотношения на левом ( $L$ ) и правом ( $R$ ) разрывах для скорости  $U$  как функции  $h$ . Имеем:

$$U_L(h) = u_1 - (h - h_1) \sqrt{\frac{1}{2} g \frac{h + h_1}{hh_1}}, \quad (2.28)$$

$$U_R(h) = (h - h_2) \sqrt{\frac{1}{2} g \frac{h + h_1}{hh_2}}. \quad (2.29)$$

Заметим, что  $U_L(h)$  — монотонно убывающая функция, а  $U_R(h)$  — монотонно возрастающая функция. Поэтому существование решения  $U_L(h) = U_R(h)$  на луче  $]h_1; +\infty[$  эквивалентно следующему соотношению в точке  $h = h_1$  (рис. 2.2):

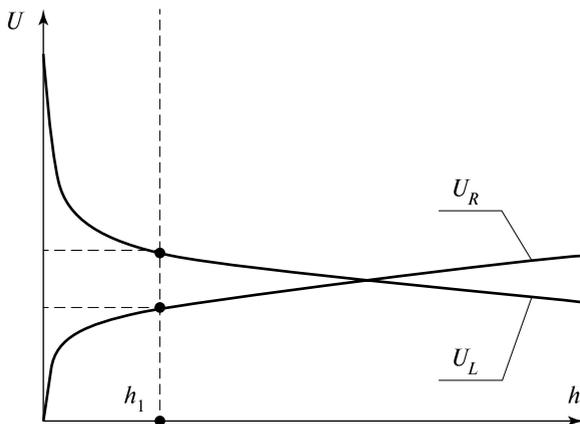


Рис. 2.2. Схематическое взаимное расположение функций  $U_L(h)$  и  $U_R(h)$

$$U_L(h)|_{h=h_1} < U_R(h)|_{h=h_1}. \quad (2.30)$$

Отсюда получаем искомое условие:

$$u_1 > (h_1 - h_2) \sqrt{\frac{1}{2} g \frac{h_1 + h_2}{h_1 h_2}}. \quad (2.31)$$

## 2.5. Конфигурация «гидродинамический прыжок – волна разряжения»

Три луча  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$ , задаваемые соотношениями  $x = y_1 t$ ,  $x = y_1 t$ ,  $x = Dt$ , где  $D$  — скорость распространения гидродинамического прыжка;  $y = U + c$ ;  $y_2 = c_2$ , разбивают определения течения на четыре области (см. рис. 2.1г).

Области 1 и 4 — зоны, в которых все параметры остаются равными начальным условиям (2.2). Область 3 — также является зоной постоянного течения. Все параметры в этой области должны, с одной стороны, соответствовать поверхности гидродинамического прыжка, а с другой — значениям на характеристике  $OB$ .

В области 2 имеем центрированную волну разряжения Римана, обращённую назад, т. е.  $r = u + 2\sqrt{gh} = \text{const}$ , откуда:

$$\left. \begin{aligned} c &= c_1 \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{u - u_1}{c_1} \right), \\ p &= p_1 \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{u - u_1}{c_1} \right)^2. \end{aligned} \right\} \quad (2.32)$$

Условием существования этой конфигурации будет  $D < y_1 < y_2$ , что, в свою очередь, эквивалентно

$$h_2 < h < h_1. \quad (2.33)$$

Найдём соотношения для начальных условий, обеспечивающих неравенство (2.32). Для этого выпишем соотношение в волне Римана для  $u$  и  $h$  на характеристике  $OB$ :

$$h = h_1 \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{u - u_1}{\sqrt{gh_1}} \right)^2. \quad (2.34)$$

Заметим, что область 3 — область постоянного течения, поэтому  $u$  удовлетворяет следующему равенству:

$$u = (h - h_2) \sqrt{\frac{g}{2hh_2}} (h + h_2). \quad (2.35)$$

Таким образом,

$$h = h_1 \left( 1 - \frac{(h - h_2) \sqrt{\frac{g}{2hh_2}} (h + h_2) - u_1}{2\sqrt{gh_1}} \right)^2. \quad (2.36)$$

Рассмотрим функции  $f_2(h) = h_1 \left( 1 - \frac{(h - h_2) \sqrt{\frac{g}{2hh_2}} (h + h_2) - u_1}{2\sqrt{gh_1}} \right)^2$

и  $f_1(h) = h$ . Очевидно, что  $f_2(h)$  является на отрезке  $]h_2; h_1[$  монотонно убывающей функцией, в то время как  $f_1(h)$  — монотонно возрастающей. Обращаясь к рис. 2.3, нетрудно видеть, что существование и единственность корня уравнения  $f_1(h) = f_2(h)$  на отрезке  $]h_2; h_1[$  эквивалентно следующим соотношениям:

$$f_2(h) \Big|_{h=h_2} > f_1(h) \Big|_{h=h_2} = h_2, \quad (2.37a)$$

$$f_2(h)|_{h=h_1} < f_1(h)|_{h=h_1} = h_1. \quad (2.376)$$

Отсюда путём несложных преобразований имеем:

$$\begin{cases} u_1 > 2 \left( \sqrt{\frac{h_2}{h_1}} - 1 \right) \sqrt{gh_1}, \\ u_1 > -2\sqrt{gh_1}, \\ u_1 < -2 \left( \sqrt{\frac{h_2}{h_1}} + 1 \right) \sqrt{gh_1}, \\ u_1 \leq -2\sqrt{gh_1}, \end{cases} \quad (2.38a)$$

$$\begin{cases} u_1 < 2\sqrt{gh_1} - \sqrt{\frac{1}{2}g \frac{h_2 + h_1}{h_1 h_2}} (h_1 - h_2), \\ u_1 < \sqrt{\frac{1}{2}g \frac{h_2 + h_1}{h_1 h_2}} (h_1 - h_2), \\ u_1 < \sqrt{\frac{1}{2}g \frac{h_2 + h_1}{h_1 h_2}} (h_1 - h_2) - 2\sqrt{gh_1}, \\ u_1 > \sqrt{\frac{1}{2}g \frac{h_2 + h_1}{h_1 h_2}} (h_1 - h_2) - 4\sqrt{gh_1}. \end{cases} \quad (2.386)$$

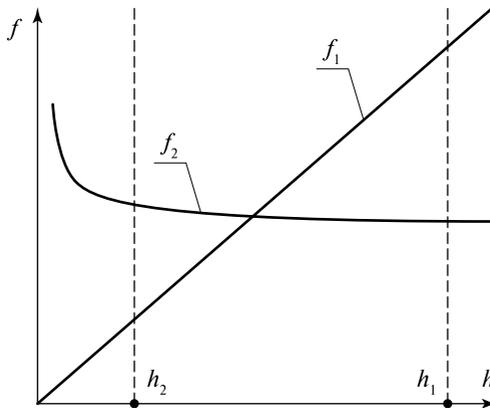


Рис. 2.3. Взаимное схематическое расположение функций  $f_1(h)$  и  $f_2(h)$

Выбирая решения, согласующиеся с физическим смыслом, окончательно имеем:

$$2\sqrt{gh_1} \left( \sqrt{\frac{h_2}{h_1}} - 1 \right) < u_1 < \sqrt{\frac{1}{2}g \frac{h_2 + h_1}{h_1 h_2}} (h_1 - h_2), \quad (2.39)$$

что, как и следовало ожидать, согласуется с предыдущими конфигурациями. В случае, когда в (2.21) или (2.31) имеет место равенство, тогда решение состоит из зоны постоянного течения и волны разряжения, или гидродинамического прыжка соответственно. Действительно, в случае, когда имеет место равенство в (2.31), тогда разрыв (2.2) устойчив, и мы получаем гидродинамический прыжок в чистом виде. В случае с (2.21), при увеличении скорости в конфигурации «две волны разряжения», лучи ОС и ОД сближаются и при равенстве в (2.21) — совпадают, что соответствует обычной звуковой волне. Таким образом, получается одиночная волна разряжения.

В случае  $h_1 < h_2$  все изменения происходят лишь в последней конфигурации, которая зеркально отображается в конфигурацию «гидродинамический прыжок — волна разряжения». При этом все результаты повторяются в точности после замены  $h_1$  на  $h_2$ .

## 2.6. Полное решение для уравнений мелкой воды

В данном разделе найдено решение задачи о распаде произвольного разрыва для уравнений мелкой воды. Произвольному набору начальных условий  $\tilde{u}_1$ ,  $h_1$ ,  $\tilde{u}_2$ ,  $h_2$  мы поставили в соответствие единственную конфигурацию, т.е. определили течение в каждой  $(x, t)$ .

Нами показано, что начальные условия эволюционируют: для  $u_1 < -2c_2 - 2c_1$  — в две волны разряжения и зону вакуума; для

$-2c_2 - 2c_1 < u_1 < 2c_1 \left( \sqrt{\frac{p_2}{p_1}} - 1 \right)$  — в две волны разряжения; для

$2\sqrt{gh_1} \left( \sqrt{\frac{h_2}{h_1}} - 1 \right) < u_1 < \sqrt{\frac{1}{2}g \frac{h_2 + h_1}{h_1 h_2}} (h_1 - h_2)$  — в гидродинамический прыжок и волну разряжения; при  $u_1 > (h - h_2) \sqrt{\frac{1}{2}g \frac{h + h_2}{hh_2}}$  — в два гидродинамических прыжка.

Полученные соотношения на начальные условия позволяют проследить динамику решений при их непрерывном изменении. Так, например, при увеличении  $(\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2)$  (см. рис. 2.1б) зона вакуу-

ма исчезает и присутствуют только две волны разряжения (см. рис. 2.1а). Далее, при переходе происходит уменьшение области волн разряжения вплоть до их полного исчезновения и перехода сначала в один (см. рис. 2.1б), а затем в два гидродинамических прыжка (см. рис. 2.1в). Дальнейшее увеличение  $(\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2)$ , очевидно, приводит лишь к росту интенсивности гидродинамических прыжков.

## 2.7. Решение задачи распада разрыва для наклонной плоскости

Постановка задачи в случае наклонной плоскости отличается лишь дополнительным постоянным членом во втором уравнении систем (1.1), (1.3), описывающем закон изменения импульса в непрерывной и разрывной ситуациях соответственно. Итак, запишем уравнения Сен-Венана для случая наклонной плоскости в виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial h}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -gk. \end{cases} \quad (2.40)$$

Условия Коши для системы (2.40) в точности соответствуют начальным условиям (2.2) для однородной системы (2.1).

Сделаем следующую замену переменных:

$$\begin{cases} \tilde{x} \rightarrow x + \frac{1}{2} gkt^2, \\ \tilde{t} \rightarrow t, \end{cases} \quad (2.41)$$

т. е.

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} + gk\tilde{t} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}}, \\ \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}}. \end{cases} \quad (2.42)$$

Как показано в работе [Dube et al., 1982], преобразование (2.41) является невырожденным, и после осуществления дополнительной замены:

$$\tilde{u} \rightarrow u - gkt \quad (2.43)$$

зависимой переменной  $u$ , система (2.40) переходит в классическую систему уравнений мелкой воды (2.1). Очевидно, что условия

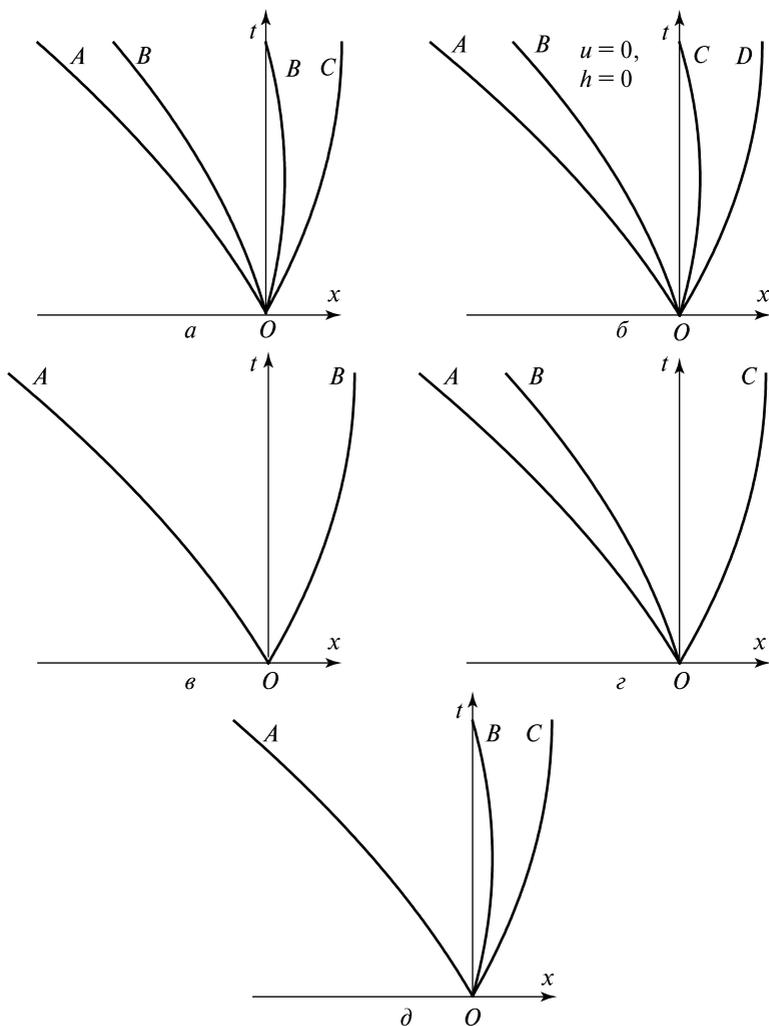
Коши инвариантны относительно замены (2.41), (2.43), поскольку при  $t=0$  данная замена превращается в тождественную подстановку:

$$\begin{cases} \tilde{x} \rightarrow x, \\ \tilde{t} \rightarrow t, \\ \tilde{u} \rightarrow u. \end{cases}$$

Замена (2.41), (2.43) эквивалентна переходу в неинерциальную систему отсчёта, движущуюся с постоянным ускорением  $gk$  вдоль оси  $x$ . Если  $k \neq \text{const}$ , то такая замена в общем случае невозможна из-за возникновения дополнительных динамических сил, которые приводят к вырождению якобиана преобразования (2.41), (2.43). Таким образом, в случае, когда подстилающая поверхность является наклонной плоскостью, переход в соответствующую неинерциальную систему отсчёта (т.е. замена координат) позволяет устранить свободный член в одномерной системе уравнений Сен-Венана (2.40) и оперировать с классической системой уравнений мелкой воды.

Поскольку решение задачи распада разрыва для однородной системы (2.1) уже получены в п. 6, для решения основной задачи распада разрыва над наклонной плоскостью остаётся лишь выполнить преобразование обратное преобразованию (2.41), (2.43). Поскольку начальные условия инвариантны относительно преобразования (2.41), (2.43), а выбор конфигурации, как показано в п. 6, полностью определяется начальными условиями  $\tilde{u}_1, h_1, \tilde{u}_2, h_2$ , очевидно, что закон выбора конфигурации для наклонной плоскости тождественно совпадает с результатами п. 6.

Необходимо отметить, что совпадение решений задач распада разрыва над горизонтальной и наклонной плоскостями носит достаточно условный характер. Действительно, несмотря на формальное совпадение всех соответствующих конфигураций, конфигурации соответствующие системе уравнений Сен-Венана, описывают принципиально иные физические процессы, обусловленные дополнительной скатывающей силой, действующей на жидкость и прямо пропорциональной тангенсу угла наклона подстилающей плоскости. Как показано в работе [Dube et al., 1982], характеристики в данной ситуации становятся ветвями парабол, а области постоянства течения переходят в зоны равноускоренного течения, кроме того, принципиально меняются соотношения в простых волнах Римана.



**Рис. 2.4.** Принципиальный вид найденных конфигураций: *a* — «две волны разряжения»; *б* — «две волны разряжения и зона вакуума»; *в* — «два гидродинамических прыжка»; *г* — «волна разряжения – гидродинамический прыжок»; *д* — «гидродинамический прыжок – волна разряжения»

Для наглядности приведём принципиальный вид найденных конфигураций (рис. 2.4), а также соотношения в центрированной волне Римана и вид уравнений, задающих характеристики в случае наклонной плоскости:

$$\begin{cases} u(x, t) + 2c(x, t) - gzt = u_0 + 2c_0, \\ x = \frac{3\tilde{s} + u_0 + 2c_0}{4}t - \frac{1}{2}gkt^2 \end{cases} \quad (2.44)$$

— центрированная волна Римана, обращённая назад;

$$\begin{cases} u(x, t) - 2c(x, t) - gzt = u_0 - 2c_0, \\ x = \frac{3\tilde{r} + u_0 - 2c_0}{4}t - \frac{1}{2}gkt^2 \end{cases} \quad (2.45)$$

— центрированная волна Римана, обращённая вперёд;

$$X(t) = \int_0^t \frac{dx}{dt} dt = -\frac{1}{2}gkt^2 + \frac{3s(X(0), 0) + r_0}{4}t + X(0) \quad (2.46)$$

— уравнения характеристик мелкой воды над наклонной плоскостью.

Кроме того, полезно явно выразить минимальное время, за которое отображение на плоскость  $(x, t)$  произвольной характеристики  $X(t)$ , либо гидродинамического прыжка (как известно из теории гиперболических уравнений [Wind, Vreugdenhil, 1986], сильные разрывные волны в слабонелинейных системах, к которым относятся системы (1.1), (2.40), распространяются вдоль характеристик. Этот факт следует из того, что в слабонелинейных системах огибающая пересечения характеристик одного семейства также является характеристикой [Wind, Vreugdenhil, 1986; Марчук и др., 1983] и успеваает пересечь ось ординат  $t$ :

$$t_{critical} = \frac{(3s(X(0), 0) + r_0) \pm \sqrt{(3s(X(0), 0) + r_0)^2 + 32gkX(0)}}{4gk}. \quad (2.47)$$

В случае, когда произвольный разрыв совмещён с началом координат  $(0, 0)$  формула (2.47) заметно упрощается:

$$t_{critical} = \frac{3s(X(0), 0) + r_0}{2gk}. \quad (2.48)$$

В заключение хочется ещё раз обратить внимание на невозможность использования стандартной процедуры аппроксимации граничных условий непротекания в численных методах типа распада разрыва для уравнений мелкой воды над наклонным дном.

Это обуславливается отсутствием в решении задачи распада произвольного разрыва для системы (2.40) областей постоянного течения, что, в свою очередь, приводит к невозможности существования, как угодно малых областей покоя и, таким образом не даёт возможности реализовать условие непротекания стандартным способом. Однако, как видно из (2.48), на временах, меньших  $\min_{X(t)} \{t_{cr}(X(t))\}$ , область равноускоренного течения можно приближённо считать областью постоянного течения, оценка погрешности для данной ситуации приведена в работе [Марчук и др., 1983]. Точная реализация граничных условий в случае неоднородной системы уравнений мелкой воды является предметом отдельных исследований.

## Глава 3. ОБОБЩЁННАЯ ТЕОРИЯ МЕЛКОЙ ВОДЫ

### 3.1. Модернизированные уравнения мелкой воды. Инварианты Римана

В настоящем параграфе мы выпишем модернизированные уравнения мелкой воды с учётом адвективного переноса горизонтального импульса и найдём соответствующие инварианты Римана. Традиционный вывод уравнений подразумевает гидростатическое приближение для давления, при котором только вертикальный градиент давления уравновешивает гравитационное ускорение:

$$p = g \int_0^h \rho dz + p_a, \quad (3.1)$$

при этом пренебрегают вертикальными ускорениями по сравнению с вертикальным градиентом давления, возникающим вследствие движения жидкости [Stelling, 1983; Wind, Vreugdenhil, 1986].

Заключительный шаг в обосновании приближения мелкой воды включает усреднение уравнения переноса горизонтального импульса и уравнения непрерывности по глубине [Stelling, 1983] нелинейным слагаемым типа:

$$R = \int_0^h (u_p - \bar{u})^2 dz = \int_0^h (u')^2 dz, \quad (3.2)$$

описывающим эффект адвективного переноса импульса, обусловленный отличием  $u' = u_p - \bar{u}$  горизонтального поля скорости  $u_p$  от усреднённой по глубине величины  $\bar{u}$ , являющейся переменной в уравнениях мелкой воды. Этим отличием обычно пренебрегают, предполагая, что горизонтальные скорости не зависят от верти-

кальной координаты в начальный момент времени и в системе отсутствуют внешние возмущения, способные привести к необходимости учёта таких слагаемых. В противном случае эти слагаемые учтены соответствующей параметризацией либо следует решать полную систему уравнений Эйлера гидродинамики несжимаемой жидкости.

В настоящей работе мы интересуемся влиянием адвекции импульса вследствие вертикальной неоднородности начальных данных, полагая начальную скорость  $u_p(x, z, t)|_{t=0} = u_0(x, z)$  медленно зависящей от вертикальной координаты и равной:

$$u_0(x, z) = \bar{u}_0(x) + k_0 h_0(x), \quad (3.3)$$

где  $\bar{u}_0(x)$  — усреднённая по глубине начальная скорость. В этом случае наиболее естественная параметризация адвективных членов в уравнениях мелкой воды:  $R = k_0 h(x, t)$ . В этом случае запишем следующую систему модернизированных уравнений мелкой воды:

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{(h+H)}{h} \frac{\partial h}{\partial x} = 0, \end{cases} \quad (3.4)$$

здесь  $h(x, t)$  — глубина слоя жидкости;  $u(x, t)$  — осреднённая по глубине скорость жидкости;  $g$  — ускорение свободного падения,  $H = k_0/g$  — приведённый коэффициент, характеризующий адвективный перенос импульса.

В настоящем параграфе найдём соответствующие инварианты Римана. Для дальнейших преобразований будем использовать матричную форму системы (3.4):

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial t} \\ \frac{\partial u}{\partial t} \end{pmatrix} + \left\| \begin{array}{cc} u & h \\ g \frac{(h+H)}{h} & u \end{array} \right\| \times \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Рассмотрим матрицу  $\mathbf{A}$ :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} u & h \\ g \frac{(h+H)}{h} & u \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Система уравнений (3.4) является гиперболической в широком смысле, если матрица  $\mathbf{A}$  обладает двумя независимыми

вещественными собственными векторами и соответствующими различными собственными числами. Итак, для определения вида системы (3.4) найдём собственные числа матрицы  $A$ :

$$\det \left\| \begin{array}{cc} u-\lambda & h \\ g \frac{(h+H)}{h} & u-\lambda \end{array} \right\| = (u-\lambda)^2 - g(H+h), \quad (3.7)$$

откуда

$$\lambda_{1,2} = u \pm \sqrt{g(h+H)}. \quad (3.8)$$

Введём обозначение

$$c = \sqrt{g(H+h)}. \quad (3.9)$$

Таким образом, в нашем случае система уравнений (3.4) имеет два различных вещественных собственных значения и описывается двумя соответствующими собственными векторами:

$$\ell_1 = \left( -\frac{c}{h}, 1 \right), \quad (3.10)$$

$$\ell_2 = \left( \frac{c}{h}, 1 \right). \quad (3.11)$$

Как и следовало ожидать, наличие дополнительного слагаемого не нарушило гиперболичности уравнений. Поэтому дальнейшее изучение системы (3.4) удобнее проводить, записав её в инвариантах Римана. Для этого сначала приведём систему (3.4) к характеристическому виду умножением на соответствующие собственные векторы.

Умножая (3.9) на левый собственный вектор  $\ell_1$ , имеем

$$-\frac{c}{h} \left( \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{(H+h)}{h} \frac{\partial h}{\partial x} = 0, \quad (3.12)$$

откуда

$$-\frac{c}{h} \left( \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} - c \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{c^2}{h} \frac{\partial h}{\partial x} = 0. \quad (3.13)$$

И окончательно:

$$-\frac{c}{h} \left( \frac{\partial h}{\partial t} + (u-c) \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial u}{\partial t} + (u-c) \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (3.14)$$

Аналогично, умножая (3.4) на правый собственный вектор  $\ell_2$ , имеем

$$\frac{c}{h} \left( \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{(H+h)}{h} \frac{\partial h}{\partial x} = 0, \quad (3.15)$$

откуда

$$\frac{c}{h} \left( \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + c \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{c^2}{h} \frac{\partial h}{\partial x} = 0. \quad (3.16)$$

И окончательно:

$$\frac{c}{h} \left( \frac{\partial h}{\partial t} + (u+c) \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial u}{\partial t} + (u+c) \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (3.17)$$

Внесём  $\frac{c}{h}$  под знак дифференцирования, для этого найдём функцию  $\varphi(h)$  такую, что  $\frac{\partial \varphi}{\partial h} = \frac{c}{h}$ , действительно, считая  $h$  функцией  $\varphi$ , имеем

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x}. \quad (3.19)$$

Таким образом,

$$\varphi(h) = \int \frac{c}{h} dh = \int \frac{\sqrt{g(h+H)}}{h} dh. \quad (3.20)$$

Осуществляя интегрирование в (3.20), имеем

$$\varphi(h) = 2\sqrt{g(h+H)} + \sqrt{gH} \ln \left| \frac{\sqrt{g(H+h)} - \sqrt{gH}}{\sqrt{g(H+h)} + \sqrt{gH}} \right|, \quad (3.21)$$

или, вводя обозначения

$$\tilde{c} = \sqrt{gH}, \quad (3.22)$$

получаем следующее выражение для  $\varphi(h)$ :

$$\varphi(h) = 2c + \tilde{c} \ln \left| \frac{c - \tilde{c}}{c + \tilde{c}} \right|. \quad (3.23)$$

Знак модуля в выражении (3.23) раскрывается тривиально, поскольку, как нетрудно видеть для неотрицательных  $h, H$ , выражение

под знаком модуля неотрицательно, а для положительных  $h$  строго больше нуля. Выполним замену зависимых переменных  $u, h$  на  $r, s$ . Такая замена впервые была предложена Риманом для уравнений газовой динамики. Переменные  $r, s$  носят названия инвариантов Римана, поскольку вид уравнений, записанных в этих переменных, инвариантен относительно замены независимых переменных, определяемой переходом от лагранжевых координат к эйлеровым и наоборот.

Итак, выпишем выражения для  $r, s$  и  $u, h$ , определяющие формулы перехода:

$$r = u + \varphi(h); \quad s = u - \varphi(h), \quad (3.24)$$

откуда

$$u = \frac{r+s}{2}; \quad h = \varphi^{-1}(r-s). \quad (3.25)$$

Корректность (3.25) следует из выражения для  $\varphi(r, s)$ :

$$\varphi(r, s) = \frac{r-s}{2}, \quad (3.26)$$

и положительности производной для  $\varphi^{-1}$  как функции  $h(x, t)$ ; действительно:

$$\left(\varphi^{-1}(h)\right)' = \frac{h}{2c(h)} > 0. \quad (3.27)$$

Далее, преобразуя полученные формулы и комбинируя соответствующие слагаемые, имеем для  $s(x, t)$ :

$$\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial s}{\partial t} \right) + (u-c) \left( \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial s}{\partial x} \right) - \frac{8g}{(r-s)} \left( \frac{(r-s)}{8g} \left( \frac{\partial r}{\partial t} - \frac{\partial s}{\partial t} \right) + \frac{(r-s)(u-c)}{8g} \left( \frac{\partial r}{\partial x} - \frac{\partial s}{\partial x} \right) \right) \right] = 0,$$

откуда

$$\frac{1}{2} \left[ \frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial s}{\partial t} + (u-c) \left( \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial s}{\partial x} \right) - \frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial s}{\partial t} - (u-c) \left( \frac{\partial r}{\partial x} - \frac{\partial s}{\partial x} \right) \right] = 0.$$

После сокращений и приведения подобных слагаемых

$$\frac{\partial s}{\partial t} + (u-c) \frac{\partial s}{\partial x} = 0. \quad (3.28)$$

Аналогично для  $r(x, t)$ :

$$\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial s}{\partial t} \right) + (u+c) \left( \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial s}{\partial x} \right) - \frac{8g}{(r-s)} \left( \frac{r-s}{8g} \left( \frac{\partial r}{\partial t} - \frac{\partial s}{\partial t} \right) + \frac{(r-s)(u+c)}{8g} \left( \frac{\partial r}{\partial x} - \frac{\partial s}{\partial x} \right) \right) \right] = 0,$$

откуда

$$\frac{1}{2} \left[ \frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial s}{\partial t} + (u+c) \left( \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial s}{\partial x} \right) - \frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial s}{\partial t} - (u+c) \left( \frac{\partial r}{\partial x} - \frac{\partial s}{\partial x} \right) \right] = 0.$$

И окончательно

$$\frac{\partial r}{\partial t} + (u+c) \frac{\partial r}{\partial x} = 0. \quad (3.29)$$

### **3.2. Непрерывные и разрывные решения модернизированных уравнений мелкой воды. Анализ полученных решений**

Система уравнений (3.28), (3.29) хорошо известна и формально ничем не отличается от соответствующей системы в инвариантах Римана для классической модели мелкой воды. Таким образом, все результаты, полученные для инвариантов Римана в рамках модели мелкой воды, можно формально использовать для модернизированной модели. Однако необходимо учитывать, что при переходе от инвариантов  $r, s$  к искомым функциям  $u, h$  данное соответствие будет нарушено, и решения для переменных  $u, h$  в рамках модели мелкой воды принципиально отличаются от решений модернизированной модели.

По определению, принятому в газовой динамике, волной Римана или бегущей волной называют течение, в котором постоянен один из инвариантов Римана. Рассмотрим случай постоянства  $r$ -инварианта, итак  $r(x, t) = r_0 = \text{const}$ , т.е. мы имеем волну Римана, обращённую назад. Тогда уравнение (3.29) удовлетворяется тождественно, а уравнение (3.28) служит для определения  $s(x, t)$ .

Рассмотрим интегральные кривые уравнения:  $\frac{dx}{dt} = u - c$ .

В плоскости  $(x, t)$  эти кривые, иначе называемые характеристиками,

очевидно, являются прямыми линиями, так как вдоль них, как следует из уравнения (3.28), постоянен  $s$ -инвариант Римана, т. е.:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\partial s}{\partial t} + (u - c) \frac{\partial s}{\partial x} = 0. \quad (3.30)$$

Таким образом, вдоль характеристик постоянны оба инварианта Римана, т. е. постоянны и сами искомые функции  $u, h$ .

Если в некоторой области  $(x, t)$  выполняется  $\frac{\partial s}{\partial x} > 0$ , то интегральные кривые образуют расходящийся пучок прямых, и, учитывая соотношения (3.25), имеем

$$u = \frac{1}{2}(r_0 + s), \quad (3.31)$$

откуда

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial s}{\partial x} \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} > 0. \quad (3.32)$$

С учётом первого уравнения системы (3.4) имеем:  $\frac{\partial h}{\partial x} < 0$ , т. е.  $h$  убывает. Таким образом, мы имеем волну разряжения. Если же в некоторой области  $(x, t)$  выполняется  $\frac{\partial s}{\partial x} < 0$ , то интегральные кривые образуют сходящийся пучок прямых, и мы имеем волну сжатия. Для области  $(x, t)$ , в которой выполняется  $\frac{\partial s}{\partial x} = 0$ , характеристики являются параллельными прямыми, и мы имеем зону постоянного течения.

Такие же (с точностью до знака) результаты получаются при  $s(x, t) = s_0 = \text{const}$ , тогда уравнение интегральных кривых имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = u + c. \quad (3.33)$$

Для  $\frac{\partial r}{\partial x} < 0$  мы имеем волну разряжения, для  $\frac{\partial r}{\partial x} > 0$  — сжатия, а при  $\frac{\partial r}{\partial x} = 0$  — зону постоянного течения.

Используя выражения (3.23), (3.24), укажем соотношения в простых волнах. Итак, для волны Римана, обращённой вперёд, получаем следующую зависимость:

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x, t) - 2c(x, t) - \tilde{c} \ln \left( \frac{c(x, t) - \tilde{c}}{c(x, t) + \tilde{c}} \right) = \\ = u(x, 0) - 2c(x, 0) - \tilde{c} \ln \left( \frac{c(x, 0) - \tilde{c}}{c(x, 0) + \tilde{c}} \right), \\ \frac{dx}{dt} = u - c. \end{array} \right. \quad (3.34)$$

В случае волны Римана, обращённой назад, имеем соотношения

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x, t) + 2c(x, t) + \tilde{c} \ln \left( \frac{c(x, t) - \tilde{c}}{c(x, t) + \tilde{c}} \right) = \\ = u(x, 0) + 2c(x, 0) + \tilde{c} \ln \left( \frac{c(x, 0) - \tilde{c}}{c(x, 0) + \tilde{c}} \right), \\ \frac{dx}{dt} = u + c. \end{array} \right. \quad (3.35)$$

Укажем практически важный частный случай бегущей волны. Волна Римана, обращённая назад ( $r(x, t) = r_0 = \text{const}$ ), называется центрированной, если характеристики образуют пучок прямых, выходящих из одной точки  $(x_0, t_0)$ . Таким образом, в этом случае

$$s(x, t) = s \left( \frac{x - x_0}{t - t_0} \right) \quad (3.36)$$

и решение задаётся условиями

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x, t) - 2c(x, t) - \tilde{c} \ln \left( \frac{c(x, t) - \tilde{c}}{c(x, t) + \tilde{c}} \right) = \\ = u(x_0, t_0) - 2c(x_0, t_0) - \tilde{c} \ln \left( \frac{c(x_0, t_0) - \tilde{c}}{c(x_0, t_0) + \tilde{c}} \right), \\ \frac{x - x_0}{t - t_0} = u - c. \end{array} \right. \quad (3.37)$$

Аналогично для волны Римана, обращённой назад ( $s(x, t) = s_0 = \text{const}$ ):

$$\left\{ \begin{aligned} & u(x, t) + 2c(x, t) + \tilde{c} \ln \left( \frac{c(x, t) - \tilde{c}}{c(x, t) + \tilde{c}} \right) = \\ & = u(x_0, t_0) + 2c(x_0, t_0) + \tilde{c} \ln \left( \frac{c(x_0, t_0) - \tilde{c}}{c(x_0, t_0) + \tilde{c}} \right), \\ & \frac{x - x_0}{t - t_0} = u + c. \end{aligned} \right. \quad (3.38)$$

Так же, как и в классическом случае, решение типа простой волны уплотнения могут существовать только ограниченное время, поскольку в волне сжатия характеристики соответствующего семейства сходятся с ростом времени, и градиенты  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial h}{\partial x}$  возрастают по абсолютной величине, вплоть до момента  $t = t_0$ , при котором характеристики пересекаются, а указанные градиенты становятся неограниченными. Как известно из теории гиперболических систем, огибающая пересечений характеристик для слабо нелинейных систем, к которым относится система (3.4), также является характеристикой.

Получим условия, которые должны выполняться на линиях разрыва решений. Для этого перепишем систему (3.4) в дивергентном виде и проинтегрируем по произвольной области  $G$ , гомеоморфной квадрату на плоскости  $(x, t)$ :

$$\left\{ \begin{aligned} & \iint_G \left( \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} \right) dG = 0, \\ & \iint_G \left( \frac{\partial hu}{\partial t} + \frac{\partial hu^2}{\partial x} + \frac{1}{2} g \frac{\partial h^2}{\partial x} + gH \frac{\partial h}{\partial x} \right) dG = 0. \end{aligned} \right. \quad (3.39)$$

Преобразуем объёмные интегралы, входящие в систему (3.39), используя формулу Грина:

$$\left\{ \begin{aligned} & \oint_{\partial G} h dx - (hu) dt = 0, \\ & \oint_{\partial G} (hu) dx - \left( hu^2 + \frac{1}{2} gh^2 + gHh \right) dt = 0. \end{aligned} \right. \quad (3.40)$$

Система (3.40) представляет наиболее общие соотношения, которые, являясь интегральной записью основных законов сохра-

нения, должны выполняться для произвольного контура  $\partial G$ , и в частности, для содержащего линию разрыва входящих функций.

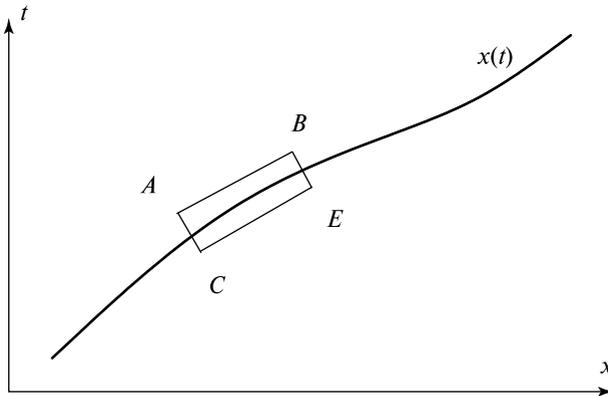
Пусть  $x = x(t)$  — уравнение линии разрыва, обладающее непрерывной касательной на отрезке  $[t_1, t_2]$ . Полагая, что функции  $u(x, t)$ ,  $h(x, t)$  терпят разрыв только на линии  $x(t)$ , обозначим

$$\begin{aligned} u_1(t) &= \lim_{x \rightarrow x(t)-0} u(x, t); & u_2(t) &= \lim_{x \rightarrow x(t)+0} u(x, t); \\ h_1(t) &= \lim_{x \rightarrow x(t)-0} h(x, t); & h_2(t) &= \lim_{x \rightarrow x(t)+0} h(x, t). \end{aligned} \quad (3.41)$$

Возьмём в качестве  $\partial G$  контур  $ABCE$ , бесконечно близко прилегающий линиями  $AB$  и  $CE$  к линии разрыва  $x(t)$ , слева и справа от неё соответственно (рис. 3.1). Введём в рассмотрение скорость разрыва  $D = D(t) = x'(t)$ , откуда  $dx = D(t) dt$ , имеем

$$\begin{aligned} & \oint_{AB} (Dh - hu) dt - \oint_{CE} (Dh - hu) dt = 0, \\ & \oint_{AB} \left( Dhu - \left( hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 + gHh \right) \right) dt - \oint_{CE} \left( Dhu - \left( hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 + gHh \right) \right) dt = 0. \end{aligned} \quad (3.42)$$

В силу произвольности контура  $ABCE$  (см. рис. 3.1) соотношения (3.42) эквивалентны следующим условиям для подынтегральных выражений:



**Рис. 3.1.** Линия разрыва  $x(t)$ , окружённая контуром  $ABCE$ , бесконечно близко примыкающим к ней линиями  $AB$  и  $CE$  сверху и снизу

$$\left. \begin{aligned} Dh_1 - h_1 u_1 &= Dh_2 - h_2 u_2, \\ Dh_1 u_1 - \left( h_1 u_1^2 + \frac{1}{2} g h_1^2 + g H h_1 \right) &= Dh_2 u_2 - \left( h_2 u_2^2 + \frac{1}{2} g h_2^2 + g H h_2 \right). \end{aligned} \right\} \quad (3.43)$$

Или, при использовании оператора [ ] для обозначения скачка функций  $u(x, t)$ ,  $h(x, t)$  на разрыве  $x(t)$  и соотношений (3.41):

$$\left. \begin{aligned} [u] &= u_2(t) - u_1(t), \\ [h] &= h_2(t) - h_1(t), \end{aligned} \right\} \quad (3.44)$$

общий вид условий на разрыве будет иметь вид

$$\left. \begin{aligned} D[h] &= [hu], \\ D[hu] &= \left[ hu^2 + \frac{1}{2} g h^2 + g H h \right]. \end{aligned} \right\} \quad (3.45)$$

Таким образом, условия на разрыве (3.45) также отличаются от классических. Очевидно, что классические условия являются предельным случаем условий (3.45) при стремлении  $H \rightarrow 0$ .

Теперь путём несложных преобразований получаем связь между значениями основных функций и скорости разрыва:

$$\left. \begin{aligned} D &= \frac{h_1 u_1 - h_2 u_2}{h_1 - h_2}, \\ \frac{(h_1 u_1 - h_2 u_2)^2 - (h_1 u_1^2 - h_2 u_2^2)(h_1 - h_2)}{(h_1 - h_2)} &= g H (h_1 - h_2) + \frac{1}{2} g (h_1^2 - h_2^2), \end{aligned} \right\} \quad (3.46)$$

откуда находим:

$$u_1 = u_2 - (h_1 - h_2) \sqrt{\frac{1}{2} g \frac{(h_1 + h_2 + 2H)}{h_1 h_2}}. \quad (3.47)$$

Как отмечалось в п. 3.1, отличия непрерывных решений системы (3.4) от решений классической системы обусловлены изменением вида инвариантов Римана (3.24) и скорости распространения слабых возмущений (3.9). Поэтому сравнение будем проводить на основе этих выражений. Для удобства приведём выражения аналогичных величин для уравнений классической мелкой воды, будем обозначать их с индексом  $k$ . Выражение для скорости распространения слабых разрывов  $c_k$  имеет вид  $c_k = \sqrt{gh}$ . Отличия для инвариантов Римана заключаются в ином виде функции  $\phi(h)$ :

$$\Phi_k = 2\sqrt{gh} = 2c_k. \quad (3.48)$$

Скачок скорости  $[u]_k$  на ударном переходе определяется следующим соотношением:

$$[u]_k = (h_2 - h_1) \sqrt{\frac{1}{2} g \frac{(h_1 + h_2)}{h_1 h_2}}. \quad (3.49)$$

Покажем, что выражения (3.48), (3.49) являются нулевым приближением для асимптотического разложения по степеням  $H$  соответствующих выражений системы (3.4). Вообще говоря, данное утверждение следует из очевидного предельного перехода от системы (3.4) к классической системе при  $H \rightarrow 0$ . Однако представляется целесообразным явно выписать данные разложения, поскольку их вид позволяет получить необходимые оценки зависимости решения от  $H$ . Итак, разложим соотношения (3.21), (3.29), (3.47) в ряд Тейлора в окрестности точки  $H = \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  — некоторое положительное число, т. е. представим в виде

$$f(H) = f(H, x, t) \Big|_{H=\varepsilon} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\partial^{(k)} f(H, x, t)}{\partial H^k} \Big|_{H=\varepsilon} \frac{(H-\varepsilon)^k}{k!}. \quad (3.50)$$

Для получения наглядной оценки вышеуказанной зависимости достаточно ограничиться первыми тремя членами разложения (3.50). Таким образом, получаем приближение скорости распространения слабых разрывов с точностью до  $o(H^3)$ :

$$c(H, x, t) \approx \sqrt{g(h+\varepsilon)} \left( 1 + \frac{(H-\varepsilon)}{2h} - \frac{(H-\varepsilon)^2}{8h^2} + \frac{(H-\varepsilon)^3}{16h^3} \right). \quad (3.51)$$

Аналогично для  $\varphi(H, x, t)$ :

$$\begin{aligned} \varphi(H, x, t) \approx & \ln \left( \frac{\sqrt{g(\varepsilon+h)} - \sqrt{g\varepsilon}}{\sqrt{g(\varepsilon+h)} + \sqrt{g\varepsilon}} \right) - \sqrt{\frac{1}{\varepsilon(\varepsilon+h)}} (H-\varepsilon) - \\ & - \frac{1}{2} \sqrt{\varepsilon(\varepsilon+h)} \left( \varepsilon + \frac{1}{2}h \right) (H-\varepsilon)^2 - \\ & - \frac{1}{6} \left( \sqrt{\frac{1}{\varepsilon(\varepsilon+h)}} \left( \varepsilon + \frac{1}{2}h \right)^2 - 2\sqrt{\varepsilon(\varepsilon+h)} \right) (H-\varepsilon)^3. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Представим также  $[u](H, x(t))$ :

$$[u](H, x(t)) \approx (h_2 - h_1) \sqrt{\frac{1}{2} g \frac{(h_2 + h_1 + 2\varepsilon)}{h_2 h_1}} \times \left( 1 + \frac{H}{(h_2 + h_1 + 2\varepsilon)} - \frac{1}{2} \frac{H^2}{(h_2 + h_1 + 2\varepsilon)^2} + \frac{1}{2} \frac{H^3}{(h_2 + h_1 + 2\varepsilon)^3} \right). \quad (3.53)$$

Из (3.51), (3.52) нетрудно видеть, что для непрерывных решений отношение  $I = \frac{H}{2h}$  является индикатором применимости классических уравнений мелкой воды. Аналогично для разрывных решений (3.53) индикатором  $I$  выступает безразмерная комбинация  $\frac{H}{h_1 + h_2}$ , или в исходных обозначениях:  $I = \frac{H}{g}$ . Для задач, в которых  $I \ll 1$ , использование классической модели мелкой воды является корректным и вполне оправданным.

## Глава 4. ЗАДАЧИ РИМАНА ДЛЯ МОДЕРНИЗИРОВАННЫХ УРАВНЕНИЙ МЕЛКОЙ ВОДЫ

### 4.1. Постановка задачи Римана для модернизированных уравнений мелкой воды

В данном параграфе мы сформулируем задачу о распаде произвольного разрыва для модернизированных уравнений мелкой воды на ровной поверхности. Для удобства приведём исходные уравнения:

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{(h+H)}{h} \frac{\partial h}{\partial x} = 0, \end{cases} \quad (4.1)$$

В качестве условий Коши используются произвольные кусочно-постоянные начальные условия при  $t = 0$  для левого ( $x < 0$ ) и правого ( $x > 0$ ) полупространств:

$$\begin{cases} u = u_1, & h = h_1, & x < 0, \\ u = u_2, & h = h_2, & x > 0. \end{cases} \quad (4.2)$$

Разрыв начальных условий двух полубесконечных жидкостей, характеризуемых постоянными параметрами  $u_1, h_1, u_2, h_2$  и граничащих вдоль плоскости  $X = 0$  в начальный момент  $t = 0$ , будем называть произвольным разрывом. Определение течения, возникающего при  $t > 0$  для этих начальных условий, назовём задачей о распаде произвольного разрыва. Так же, как и в газовой динамике, эта задача сводится к нахождению плоскосимметричных одномерных течений, удовлетворяющих интегральным законам

сохранения для системы уравнений (4.1) с начальными условиями (4.2) [Garvine, 1987]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \oint_{\partial G} h dx - (hu) dt = 0, \\ \oint_{\partial G} (hu) dx - \left( hu^2 + \frac{1}{2} gh^2 + gHh \right) dt = 0. \end{array} \right. \quad (4.3)$$

Уравнения (4.3) определяют соотношения на поверхностях разрывов, которые должны соблюдаться для устойчивых решений. Таким образом, изначально произвольный разрыв будет эволюционировать, распадаясь на несколько устойчивых разрывов, включающих гидродинамический прыжок и слабый разрыв. Условия динамической совместности разрывных решений, дополненные условием устойчивости (диссипация энергии) для гидродинамического прыжка, определяют конфигурацию устойчивых разрывов, которые вместе с непрерывными течениями описывают эволюцию произвольных начальных данных.

Уравнения (4.3) инвариантны относительно преобразования подобия независимых переменных:  $t' = kt$ ,  $x' = kx$ ,  $k > 0$ . Отсюда из условия единственности решения задачи следует их автомодельность. Пусть

$$u(x, t) = u'(x', t') = u'(kx, kt) \quad \text{и} \quad h(x, t) = h'(x', t') = h'(kx, kt),$$

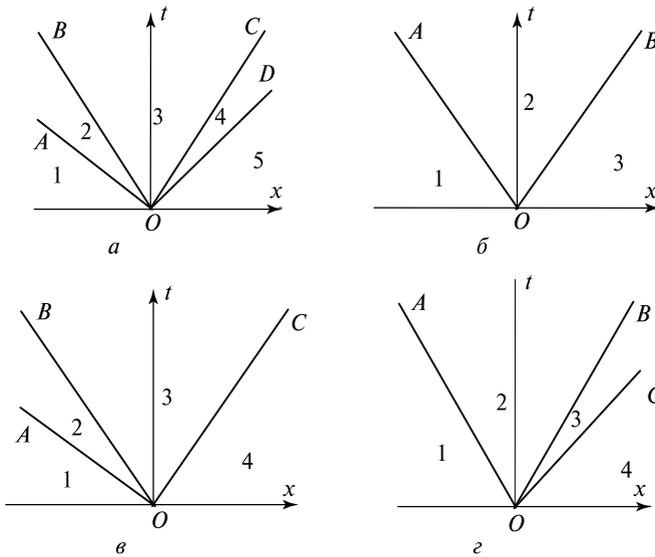
тогда, полагая  $k = \frac{1}{t} > 0$ , имеем

$$u(x, t) = u' \left( \frac{x}{t}, 1 \right) = u'' \left( \frac{x}{t} \right) \quad \text{и} \quad h(x, t) = h' \left( \frac{x}{t}, 1 \right) = h'' \left( \frac{x}{t} \right).$$

Таким образом, построение автомодельного решения задачи о распаде произвольного разрыва состоит в согласовании элементарных решений типа: постоянные течения, центрированные волны, гидродинамические прыжки — и в нахождении параметров, характеризующих их области определения.

Схематически автомодельная картина возникающего течения на плоскости  $(x, t)$  изображается одной из четырёх возможных конфигураций (рис. 4.1*a–e*):

- «две волны разряжения» (*a*);
- «два гидродинамических прыжка» (*b*);
- «волна разряжения — гидродинамический прыжок» (*в*);
- «гидродинамический прыжок — волна разряжения» (*г*).



**Рис. 4.1.** Конфигурации течения: *a* — «две волны разряжения»; *б* — «два гидродинамических прыжка»; *в* — «волна разряжения — гидродинамический прыжок»; *г* — «гидродинамический прыжок — волна разряжения»

Отсутствие иных конфигураций, кроме вышеуказанных, обеспечивается теоремой Цемплена и её простейшими следствиями [Stoker, 1957].

Рассмотрение задачи о распаде разрыва будем проводить следующим способом: отправляясь от конкретных условий (4.2), которые реализуют какую-то одну из указанных конфигураций, непрерывно изменяя параметры задачи (4.2), будем непрерывно менять решение, переходя при этом через критические значения параметров, отделяющих одну конфигурацию от другой.

Перейдём к системе координат, в которой жидкость справа покоится, т. е. в новой системе координат

$$\begin{cases} u = u_1 - u_2, & x < 0, \\ u = u_2 - u_2 = 0, & x > 0. \end{cases} \quad (4.4)$$

Пусть для определённости  $h_1 > h_2$ . Предположим, что условия (4.2) определяют конфигурацию «две волны разряжения». В рамках этого предположения получим соотношения, которым должны удовлетворять начальные условия (4.2).

## 4.2. Конфигурация «две волны разряжения»

В данной конфигурации (см. рис. 4.1а) область определения течения разбивается на пять областей, разделённых четырьмя лучами:  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$ ,  $OD$ . Луч  $OA$ , задаваемый соотношением  $x = y_1 t$ , отделяет область постоянного течения 1, в которой значения  $u$  и  $h$ , определяемые условиями (4.2) для жидкости слева, сохраняют свои значения, от области 2 — центрированной волны Римана.

В области 2 все соотношения определяются постоянством  $r$ -инварианта Римана, таким образом

$$r = u + 2\sqrt{g(h+H)} + \sqrt{gH} \ln \left( \frac{\sqrt{g(h+H)} - \sqrt{gH}}{\sqrt{g(h+H)} + \sqrt{gH}} \right) = \text{const},$$

откуда, обозначая

$$\sqrt{g(h+H)} = c, \quad (4.5)$$

$$\varphi(c) = 2\sqrt{g(h+H)} + \sqrt{gH} \ln \left( \frac{\sqrt{g(h+H)} - \sqrt{gH}}{\sqrt{g(h+H)} + \sqrt{gH}} \right), \quad (4.6)$$

имеем

$$r = u + \varphi(c), \quad (4.7)$$

$$u = u_1 + \varphi(c_1) - \varphi(c). \quad (4.8)$$

Соответственно  $y_1 = u_1 - c_1$ , так как луч  $OA$  задаёт характеристику центрированной волны Римана, обращённой назад. Луч  $OB$ , задаваемый соотношением  $x = y_2 t$ , также является характеристикой, отделяющей волну разряжения от области 3 — зоны постоянного течения, т.е.  $y_2 = U - c$ . Лучи  $OC$  и  $OD$  отделяют центрированную волну Римана, обращённую вперёд, от областей 5 и 3 — постоянного течения. Аналогично лучам  $OA$  и  $OB$ , лучи  $OC$  и  $OD$  задаются соотношениями

$$x = y_3 t, \quad x = y_4 t, \quad y_3 = u + c, \quad y_4 = c$$

соответственно. В области 4 все параметры определены постоянством  $s$ -инварианта Римана:  $s = u - \varphi(c)$ , откуда

$$u = u_2 - \varphi(c_2) + \varphi(c) = \varphi(c) - \varphi(c_2), \quad (4.9)$$

последнее равенство следует из условия  $u_2 = 0$ .

В области 5, как и в области 1, все параметры сохраняют свои значения, так как это зона постоянства течения. Для осуществле-

ния данной конфигурации необходимо и достаточно выполнение следующих очевидных соотношений:

$$y_1 < y_2 \leq y_3 < y_4, \quad (4.10)$$

где  $y_1 = u_1 - c_1$ ,  $y_2 = U - c$ ,  $y_3 = U + c$ ,  $y_4 = c_2$ .

Таким образом, для области 2 имеем

$$y_2 - y_1 > 0 \Leftrightarrow (U - c) - (u_1 - c_1) = (U - u_1) + (c_1 - c) > 0; \quad (4.11)$$

принимая во внимание, что  $r = \text{const}$ , получим

$$\varphi(c) - \varphi(c_1) = u_1 - U, \quad (4.12)$$

откуда  $\varphi(c_1) - \varphi(c) + (c_1 - c) > 0$ , и окончательно:

$$y_2 - y_1 > 0 \Leftrightarrow \varphi(c_1) - \varphi(c) + (c_1 - c) > 0. \quad (4.13)$$

Для области 4 аналогично:

$$y_4 - y_3 > 0 \Leftrightarrow c_2 - (c + U) > 0, \quad (4.14)$$

учитывая, что  $s = \text{const}$ ,

$$\varphi(c_2) - \varphi(c) = u_2 - U, \quad (4.15)$$

откуда окончательно:

$$y_4 - y_3 > 0 \Leftrightarrow \varphi(c_2) - \varphi(c) + (c_2 - c) > 0. \quad (4.16)$$

Для области 3 выполнение неравенств носит очевидный характер, действительно:

$$y_3 - y_2 \leq 0 \Leftrightarrow (U + c) - (U - c) > 0. \quad (4.17)$$

Далее, принимая во внимание  $h_1 > h_2$  и монотонное возрастание  $\varphi(c)$ , из неравенств (4.13), (4.16) и соотношений (4.12), (4.15) получим

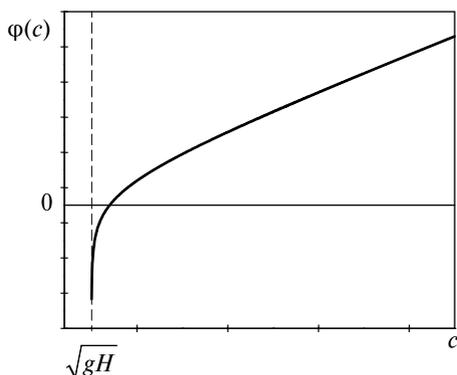
$$\begin{cases} \varphi(c_1) + c_1 > \varphi(c) + c \Leftrightarrow c_1 > c, \\ \varphi(c_2) + c_2 > \varphi(c) + c \Leftrightarrow c_2 > c. \end{cases} \quad (4.18)$$

Таким образом, должно иметь место следующее неравенство:

$$c < c_2. \quad (4.19)$$

Из (4.12), (4.15) можно получить выражение для  $\varphi(c)$  через параметры начальных условий (4.2):

$$\varphi(c) = \frac{1}{2}(u_1 + \varphi(c_1) + \varphi(c_2)), \quad (4.20)$$



**Рис. 4.2.** Неявная зависимость  $\varphi(c)$

а использование условия монотонного возрастания  $\varphi(c)$  позволяет переписать (4.18) в более удобной и окончательной форме:

$$u_1 < \varphi(c_2) - \varphi(c_1). \quad (4.21)$$

Найдём условия для параметров (4.2), определяющие существование и единственность значения скорости звука  $c$  в области 3, удовлетворяющего всем вышеуказанным условиям. Уравнение для нахождения  $c$  — это (4.20). Чтобы эффективней рассмотреть поставленную задачу, полезно построить график функции  $\varphi(c)$ ,  $c > \sqrt{gH}$  (рис. 4.2).

Очевидно, что уравнение (4.20) имеет единственное решение при любом значении правой части, причём решение  $c^* > \sqrt{gH}$ . Таким образом, при выполнении условия (4.21) будет реализована конфигурация «две волны разряжения».

Важно отметить, что решение уравнения (4.20) всегда положительно, каковы бы ни были значения параметров  $u_1$ ,  $h_1$ ,  $h_2$ , а это приводит к невозможности осуществления конфигурации «двух волн разряжения» с зоной вакуума между ними, которая присутствует и играет существенную роль в классическом случае.

### 4.3. Конфигурация «два гидродинамических прыжка»

В данном случае (см. рис. 4.1б) область определения течения разбивается лучами  $OA$  и  $OB$  на три области, в каждой из которых течение постоянно. В области 1 параметры, задаваемые начальными

условиями (4.2) для жидкости слева, не изменяются. Аналогично, в области 3 параметры совпадают с начальными для жидкости справа. Луч  $OA$ , задаваемый уравнением  $x = D_1 t$ , является поверхностью разрыва параметров, на которой должны выполняться условия на гидродинамическом прыжке (условия Гюгоню для мелкой воды). Аналогично, луч  $OB$ , определяемый соотношением  $x = D_2 t$ , является поверхностью скачка всех гидродинамических параметров.

Условием реализации такой конфигурации служит тривиальное неравенство  $y_1 < y_2$ , т. е.

$$D_1 < D_2. \quad (4.22)$$

Для выполнения этого условия необходимо и достаточно существования такого  $h$  ( $h$  — глубина в области 2), что  $h > h_1 > h_2$ . Таким образом, нахождение условий совместности конфигурации сводится к определению ограничений на начальные условия (4.2), обеспечивающих существование вышеуказанного  $h$ .

Запишем соотношения на левом и правом разрывах для скорости  $U$  как функции  $h$ . Имеем

$$U_1(h) = u_1 - (h - h_1) \sqrt{\frac{g}{2hh_1}(h + h_1 + 2H)}, \quad (4.23)$$

$$U_2(h) = (h - h_2) \sqrt{\frac{g}{2hh_2}(h + h_2 + 2H)}. \quad (4.24)$$

Заметим, что  $U_1(h)$  — монотонно убывающая функция, а  $U_2(h)$  — монотонно возрастающая функция. Поэтому существование решения уравнения

$$U_1(h) = U_2(h) \quad (4.25)$$

на луче  $(h_1; +\infty)$  эквивалентно следующему соотношению в точке  $h = h_1$ :

$$U_1(h)|_{h=h_1} < U_2(h)|_{h=h_1}, \quad (4.26)$$

откуда получаем искомое условие:

$$u_1 > (h_1 - h_2) \sqrt{\frac{g}{2h_1 h_2}(h_1 + h_2 + 2H)}. \quad (4.27)$$

При выполнении (4.27) осуществляется конфигурация «два гидродинамических прыжка».

#### 4.4. Конфигурация «волна разряжения — гидродинамический прыжок»

В данной конфигурации область течения разбивается тремя лучами:  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$ , задаваемыми соотношениями  $x = y_1 t$ ,  $x = y_2 t$ ,  $x = Dt$  соответственно (см. рис. 4.16). Здесь  $D$  — скорость распространения гидродинамического прыжка;  $y_1 = u_1 - c_1$ ;  $y_2 = U - c$ .

Области 1 и 4 — зоны, в которых все параметры остаются равными начальным условиям (4.2). Область 3 также является зоной постоянного течения. Все параметры в этой области должны, с одной стороны, соответствовать поверхности гидродинамического прыжка, а с другой, — значениям на характеристике  $OB$ .

В области 2 имеем центрированную волну разряжения Римана, обращённую назад, т. е.  $r = u + \varphi(c) = \text{const}$ , откуда

$$u = u_1 + \varphi(c_1) - \varphi(c). \quad (4.28)$$

Условием существования этой конфигурации будет:  $D > y_2 > y_1$ , что, в свою очередь, эквивалентно:

$$h_2 < h < h_1. \quad (4.29)$$

Найдём соотношения для начальных условий (4.2), обеспечивающих справедливость неравенства (4.29).

Выпишем соотношение в волне Римана для  $u$  и  $h$  на характеристике  $OB$ :

$$u = u_- = u_1 + \varphi(c_1) - \varphi(c). \quad (4.30)$$

Заметим, что область 3 — область постоянного течения, поэтому  $u$  удовлетворяет равенству:

$$u = u_+ = (h - h_2) \sqrt{\frac{g}{2hh_2}} (h + h_2 + 2H). \quad (4.31)$$

Таким образом, имеем следующее уравнение для нахождения  $h$ :

$$(h - h_2) \sqrt{\frac{g}{2hh_2}} (h + h_2 + 2H) + \varphi(c) = u_1 + \varphi(c_1). \quad (4.32)$$

Функция в левой части (4.32), как нетрудно проверить, является монотонно возрастающей, что позволяет без труда получить необходимые условия. Действительно, для того чтобы корень уравнения (4.32) существовал и удовлетворял условию (4.29), необходимо и достаточно, чтобы скорость  $u_1$  удовлетворяла следующему соотношению:

$$\varphi(c_2) - \varphi(c_1) < u_1 < (h_1 - h_2) \sqrt{\frac{g}{2h_1 h_2} (h_1 + h_2 + 2H)}. \quad (4.33)$$

Таким образом, при выполнении (4.33) реализуется конфигурация «волна разряжения – гидродинамический прыжок».

В случае, когда в (4.21) или (4.27) имеет место равенство, тогда решение состоит из зоны постоянного течения и волны разряжения, или гидродинамического прыжка соответственно. Действительно, в случае, когда имеет место равенство в (4.27), тогда разрыв (4.2) устойчив, и мы получаем гидродинамический прыжок в чистом виде. В случае с (4.21), при увеличении скорости в конфигурации «две волны разряжения», лучи  $OC$  и  $OD$  сближаются и при равенстве в (4.21) — совпадают, что соответствует обычной звуковой волне. Таким образом, получается одиночная волна разряжения.

В случае  $h_1 < h_2$  все изменения происходят лишь в последней конфигурации (см. рис. 4.1з), которая зеркально отображается в конфигурацию «гидродинамический прыжок – волна разряжения» (см. рис. 4.1з). При этом все результаты повторяются в точности после замены  $h_1$  на  $h_2$ .

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе проводится обобщение классической теории мелкой воды на случай течений над неровной подстилающей поверхностью. Показано, что решения, характерные для классической задачи, существуют тогда и только тогда, когда в качестве подстилающей поверхности берётся наклонная плоскость. Получены частные решения уравнений мелкой воды над наклонной плоскостью и проанализированы особенности этих решений как отличия от решений классических уравнений. Исследование указанных решений продемонстрировало необходимость отказа от постановки условий непротекания на твёрдой стенке для граничной задачи течения мелкой воды над наклонной плоскостью.

Найденные частные решения позволили предъявить невырожденное преобразование зависимых и независимых переменных, сводящее уравнения Сен-Венана для наклонной плоскости к классическим уравнениям мелкой воды. Указанное преобразование обеспечило эффективное рассмотрение задачи о распаде произвольного разрыва кусочно-постоянных начальных данных над наклонной плоскостью. Показано, что решение этой задачи существенным образом отличается от решения классических уравнений мелкой воды, несмотря на полное совпадение условий выбора конфигураций, реализующих решение обеих задач. Совпадение указанных условий обусловлено тем, что характеристики системы уравнений над наклонным дном являются ветвями парабол, имеющими касание второго порядка с соответствующими характеристиками классической системы уравнений мелкой воды. Существенные отличия данных решений определяются принципиальными расхождениями в соотношениях, описывающих простые волны Римана в соответствующих постановках задачи. Это, в свою очередь, делает невозможным частное решение типа постоянного течения для системы уравнений мелкой воды над наклонным дном.

Проанализированы условия, при которых решения обеих задач можно приближённо считать совпадающими.

В настоящей работе газодинамическая аналогия для уравнений мелкой воды обобщена на случай, когда начальные условия неоднородны по вертикальной координате. Предложена простейшая параметризация адвективного слагаемого, допускающая полный теоретический анализ решений типа простых волн и задачи Римана для модернизированных уравнений мелкой воды. Найденные частные решения типа простых волн позволили найти безразмерный параметр, ограничивающий пределы применимости классических уравнений мелкой воды и пренебрежения адвективным переносом импульса.

Найдено решение задачи о распаде произвольного разрыва для модифицированных уравнений мелкой воды. Произвольному набору начальных условий  $u_1, h_1, u_2, h_2$  мы поставили в соответствие единственную конфигурацию, т.е. определили течение в каждой точке  $(x, t)$ .

Показано, что при выполнении  $u_1 < \varphi(c_2) - \varphi(c_1)$  начальные условия эволюционируют в две волны (см. рис. 4.1а), при

$u_1 > (h_1 - h_2) \sqrt{\frac{g}{2h_1 h_2} (h_1 + h_2 + 2H)}$  начальные условия эволюционируют в два гидродинамических прыжка (см. рис. 4.1б), а при

$\varphi(c_2) - \varphi(c_1) < u_1 < (h_1 - h_2) \sqrt{\frac{g}{2h_1 h_2} (h_1 + h_2 + 2H)}$  — в волну разрежения и гидродинамический прыжок (см. рис. 4.1в). Полученные соотношения также позволяют проследить динамику решений при непрерывном изменении начальных условий.

## ЛИТЕРАТУРА

- [Беликов, Семенов, 1997] *Беликов В. В., Семенов А. Ю.* Численный метод распада разрыва для решения уравнений теории мелкой воды // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1997. Т. 37. № 8. С. 1006–1019.
- [Вольцингер, Пяковский, 1977] *Вольцингер Н. Е., Пяковский Р. В.* Теория мелкой воды. Океанологические задачи и численные методы. Л.: Гидрометеиздат, 1977. 310 с.
- [Ландау, Лифшиц, 1988] *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. 4. Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 736 с.
- [Марчук и др., 1983] *Марчук А. Г., Чубаров Л. Б., Шокин Ю. И.* Численное моделирование цунами. Новосибирск: Наука, 1983.
- [Уизем, 1977] *Уизем Г. В.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 567 с.
- [Шокин, Яненко, 1985] *Шокин Ю. И., Яненко Н. Н.* Метод дифференциального приближения. Применение к газовой динамике. Новосибирск: Наука, 1985. 368 с.
- [Alcrudo, Garcia-Navarro, 1993] *Alcrudo F., Garcia-Navarro P.* A high resolution Godunov-type scheme in finite volumes for the 2D shallow water equation // Intern. J. Numerical Methods in Engineering. 1993. V. 16. P. 489–505.
- [Charney et al., 1950] *Charney J. G., Fjortoft R., Von Neumann J.* Numerical integration of the barotropic vorticity equation // Tellus. 1950. V. 2. Iss. 4. P. 237–254.
- [Dowling, Ingersoll, 1989] *Dowling T. E., Ingersoll A. P.* Jupiter's Great Red Spot as a shallow-water system // J. Atmospheric Sciences. 1989. V. 46. N. 21. P. 3256–3278.
- [Dube et al., 1982] *Dube S. K., Sinha P. C., Roy G. D.* The numerical simulation of storm surgers along the Bangla Desh coast // Dynamics of Atmospheres and Oceans. 1985. V. 9. P. 121–133.
- [Garvine, 1987] *Garvine R. W.* Estuary plume and fronts in shelf waters: a layer modele // J. Physical Oceanography. 1987. V. 17. P. 1877–1896.
- [Gottelmann, 1999] *Gottelmann J.* A spline collocation scheme for the spherical shallow water equations // J. Computational Physics. 1999. V. 148. N. 1. P. 291–298.

- [Hendershott, 1981] *Hendershott M.C.* Long waves and ocean tides. Ch. 10 // Evolution of Physical Oceanography: Scientific Surveys in Honor of Henry Stommel / Eds. B.A. Warren, C. Wunsch. Cambridge: MIT Press, 1981. P. 292–341.
- [Johns et al., 1982] *Johns B., Dube S.K., Sinha P.C., Mohanty U.C., Rao A.D.* The simulation of continuously deforming lateral boundaries in problems involving the shallow-water equations, *Computers and Fluids*. 1982. V. 10. N. 2. P. 105–116.
- [Lighthill, 1957] *Lighthill M.J.* *River waves*, Naval hydrodynamics publication 515 National Academy of Sciences — National Research Council, 1957.
- [Nihoul, Ronday, 1975] *Nihoul J.C.J., Ronday F.C.* *The influence of tidal stresses on the residual circulation* // *Tellus*. 1975. V. 29. P. 484–490.
- [Ogink et al., 1986] *Ogink H.J.M., Grijzen J.G., Wijbenga A.J.H.* Aspects of flood level computations // Intern. Symp. Flood Frequency and Risk Analysis. Baton Rouge, USA, 1986 (also Delft Hydraulics Comm. 357).
- [Platzman, 1972] *Platzman G.W.* *Two-dimensional free oscillations in natural basins* // *J. Physical Oceanography*. 1972. V. 2. N. 2. P. 117–138.
- [Shokin, Chubarov, 1980] *Shokin Y.I., Chubarov L.B.* Finite-difference simulation of tsunami propagation // Theoretical and experimental fluid mechanics / Eds. U. Muller et al. Berlin: Springer, 1980. P. 599–606.
- [Simons, 1980] *Simons T.J.* Circulation models of lakes and inland seas // *Canadian bulletin of fisheries and aquatic sciences*. 1980. V. 203. Ottawa: Dept. of Fisheries and Oceans, 1980. 146 p.
- [Spotz et al., 1998] *Spotz W.F., Taylor M.A., Swarztrauber P.N.* Fast shallow-water equation solvers in latitude-longitude coordinates // *J. Computational Physics*. 1998. V. 145. N. 1. P. 432–444.
- [Stelling, 1983] *Stelling G.S.* *On the construction of the computational methods for shallow-water flow problems*: PhD thesis Delft Univ. of Technology. 1983.
- [Stoker, 1948] *Stoker J.J.* The formation of breakers and bores // *Communications on Pure and Applied Mathematics*. 1948. N. 1. P. 1–87.
- [Stoker, 1957] *Stoker J.J.* *Water Waves: The Mathematical Theory with Applications*. N. Y.: Interscience, 1957.
- [Vreugdenhil, 1994] *Vreugdenhil C.B.* *Numerical methods for shallow-water flow*. Dordrecht, Netherlands: Kluwer, 1994.
- [Wind, Vreugdenhil, 1986] *Wind H.G., Vreugdenhil C.B.* Rip-current generation near structures // *J. Fluid Mechanics*. 1986. V. 171. P. 459–476.

## Оглавление

|   |    |
|---|----|
| Введение  | 3  |
| Глава 1. Автомодельные течения мелкой воды на наклонной плоскости   | 8  |
| 1.1. Инварианты Римана для уравнений мелкой воды над неоднородной поверхностью  | 8  |
| 1.2. Частные решения уравнений мелкой воды на наклонной плоскости. Преобразование уравнений Сен-Венана в классические уравнения мелкой воды | 11 |
| Глава 2. Задачи Римана для уравнений мелкой воды на наклонной плоскости   | 21 |
| 2.1. Формулировка задачи Римана   | 21 |
| 2.2. Конфигурация «две волны разряжения»  | 24 |
| 2.3. Классификация «две волны разрежения, разделённые зоной вакуума»  | 27 |
| 2.4. Конфигурация «два гидродинамических прыжка»  | 28 |
| 2.5. Конфигурация «гидродинамический прыжок – волна разряжения»   | 29 |
| 2.6. Полное решение для уравнений мелкой воды   | 32 |
| 2.7. Решение задачи распада разрыва для наклонной плоскости   | 33 |
| Глава 3. Обобщённая теория мелкой воды  | 38 |
| 3.1. Модернизированные уравнения мелкой воды. Инварианты Римана   | 38 |
| 3.2. Непрерывные и разрывные решения модернизированных уравнений мелкой воды. Анализ полученных решений                                     | 43 |
| Глава 4. Задачи Римана для модернизированных уравнений мелкой воды  | 51 |
| 4.1. Постановка задачи Римана для модернизированных уравнений мелкой воды   | 51 |
| 4.2. Конфигурация «две волны разряжения»  | 54 |
| 4.3. Конфигурация «два гидродинамических прыжка»  | 56 |
| 4.4. Конфигурация «волна разряжения – гидродинамический прыжок»   | 58 |
| Заключение  | 60 |
| Литература  | 62 |