

**В. А. Ожередов, Т. К. Бреус**

**РЕЛАКСАЦИОННЫЙ СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ  
И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ К ОБНАРУЖЕНИЮ  
СИНХРОННОСТИ ПРОЦЕССОВ  
В ГЕЛИОБИОЛОГИИ И ХРОНОМЕДИЦИНЕ**

Представлено к печати  
заместителем директора ИКИ РАН  
А. Н. Устиновым

**Релаксационный спектральный анализ и его применение  
к обнаружению синхронности процессов  
в гелиобиологии и хрономедицине**

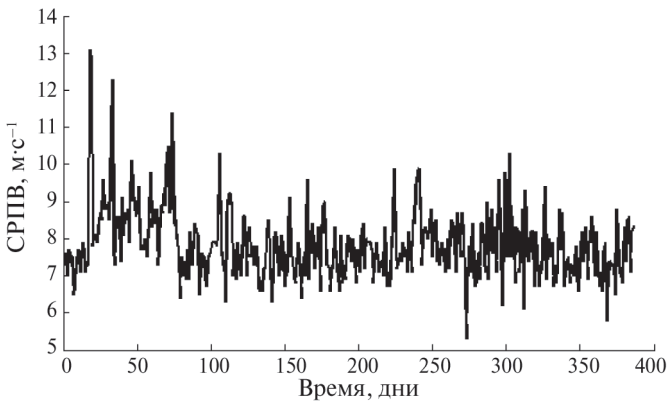
*В. А. Ожередов, Т. К. Бреус*

В изучении слабых взаимосвязей процессов в гелиобиологии и геофизике одну из ведущих ролей играет спектральный анализ. Одинаковое расположение пиков на спектрах двух временных рядов указывает на наличие в них компонент, порождаемых процессами со сходными скоростями протекания. Это позволяет выдвинуть гипотезу об их взаимосвязи, которая при прочих подходах маскируется шумом. В тоже время концепция синхронности протекания некоторых физиологических и гелиогеофизических процессов используется многими исследователями с целью привлечения «резонансного» механизма или механизма захвата частоты внешнего природного фактора для объяснения формирования эндогенной ритмики биологических объектов. До настоящего времени основным носителем информации о биологических и гелиогеофизических сигналах считалась сумма периодических вариаций. Однако далеко не все представляющие интерес временные ряды содержат доминирующие периодические компоненты. Ряд, с разумной точностью не представимый в виде суммы ограниченного числа периодических функций, будем называть существенно аperiodическим (в противоположность, скажем, сумме двух синусоид с иррациональным отношением частот, которая также в строгом смысле не является периодической функцией времени). Эти соображения приводят к необходимости обобщения понятия «период» на существенно аperiodические сигналы через параметр «время релаксации», который вводится в данной работе через усреднённые квадраты конечных разностей. Показано, что для синусоиды время релаксации и период текстуально совпадают. Разработан алгоритм фильтрации шумов и длиннопериодных трендов, основанный на разделении исходного сигнала на быстро и медленно релаксирующие компоненты (применимый не только для одномерных рядов, но и для двумерных изображений), и доказана основная теорема, гарантирующая его работоспособность. Описан метод построения ортонормированного базиса, компоненты которого обладают строго определённым временем релаксации. Результат разложения сигнала по этому базису мы называем релаксационным спектром. С помощью автоматического алгоритма выделения достоверных спектральных пиков популяционных и гелиогеомагнитных временных рядов и выявления сходных пиков через меру Сьеренсена показано, что существуют четыре совпадающих спектральных пика у ежедневных рядов  $Kp$ -индекса геомагнитной активности и смертности от инфаркта миокарда. При этом три из четырёх пиков имеют времена релаксации, предсказываемые ранее в гелиобиологических работах.

*Ключевые слова:* спектральный анализ, фильтрация сигнала, генерация ортонормированного базиса, гелиобиология, геофизика.

## ВВЕДЕНИЕ

В гелиобиофизических исследованиях основное внимание уделяется поиску взаимосвязей физиологических параметров и изменений внешних условий (например, [Владимирский, 2016; Бреус и др., 2010; Зенченко и др., 2013; Халберг и др., 2009; Breus et al., 2008; Cornelissen, 2014; Halberg et al., 2003, 2008a, b; Vladimirkii et al., 1995]). В частности, эти взаимосвязи могут проявлять себя в сходстве скоростей протекания биологических и гелиогеофизических процессов, что формально означает совпадение спектральных пиков временных рядов, разложенных по некоторому подходящему по контексту задачи базису. До настоящего времени основным носителем информации в биологических и гелиогеофизических сигналах считалась сумма периодических вариаций (см. например, [Халберг и др., 2009; Cornelissen, 2014; Halberg et al., 2008a, b]). Отсюда возникла связь гелиобиологии и хрономедицины. Однако далеко не все представляющие интерес временные ряды содержат доминирующие периодические компоненты (см., например, рис. 1 с изображением ежесуточного хода такого физиологического параметра, как скорость распространения пульсовой волны (СРПВ) [Gurfinkel et al., 2012]).



**Рис. 1.** Ежесуточный ход скорости распространения пульсовой волны как пример абсолютно аperiodического временного ряда

Для анализа сходства скоростей изменения отдельных компонент таких временных рядов, по-видимому, необходим аппарат спектрального анализа, основанный на разложении по аperiodическому базису. Традиционно используемые в хронобиологии базисы Фурье и вейвлеты таковыми не являются.

Ниже будет рассмотрено построение полного базиса, позволяющего дать исчерпывающее представление временного ряда через сумму компонент с заранее заданными скоростями изменения, трактуемыми через *время релаксации — промежуток, за который характерное изменение наблюдаемого параметра становится сравнимым с его вариацией за весь период наблюдений*. Именно эта характеристика временного ряда является наиболее важной для исследования синхронности процессов в гелиобиологии. Она не имеет отношения к понятию ритмичности сигнала, вместе с тем, как будет показано ниже, *период является частным случаем времени релаксации*.

## 1. ВРЕМЯ РЕЛАКСАЦИИ И ЕГО ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЧЕРЕЗ КВАДРАТИЧНУЮ ФОРМУ

Предположим, что имеется временной ряд  $[x^1, x^2, \dots, x^N]$ , содержащий  $N = N_0$  отсчётов. Последовательность разностей (отсчётов временного ряда)  $(k + 1)$ -го порядка (или  $k$ -х разностей) является новым временным рядом, рекурсивно определяемым через исходный ряд следующим образом:

$$\Delta_{k+1}^i = \Delta_k^{i+1} - \Delta_k^i, \quad k = 1, 2, \dots; \quad i = 1, 2, \dots, N_k - 1, \quad \Delta_0^i \equiv x^i,$$

где  $N_k$  — это число отсчётов временного ряда разностей  $k$ -го порядка. Очевидно, что  $N_k = N_0 - k$ , и для статистической достоверности выводов имеет смысл рассматривать только такие разности, для которых  $k \ll N_0$ . Соответственно, через  $x$  будем обозначать исходный временной ряд как вектор, и через  $\Delta_k$  — векторное представление его  $k$ -й разности;  $k$ -й степенью вариабельности ряда будем называть отношение:

$$V_k \equiv \frac{\|\Delta_k\|^2}{\|\Delta_0\|^2}. \tag{1}$$

Понятно, что параметр (1) характеризует среднеквадратичную величину изменения  $k$ -й разности  $x$  за один отсчёт по сравнению со среднеквадратичным размахом всего временного ряда, и чем эта ве-

личина больше, тем меньшего времени релаксации следует ожидать. Будем полагать, что время релаксации является однозначной функцией параметра  $V_k$ . Используем синусоидальный сигнал для нахождения явного вида этой зависимости (символ  $J$  вводится для обозначения мнимой единицы).

Рассмотрим синусоиду  $x_i = A \cos(\omega i + \varphi)$ . Тогда

$$\begin{aligned} \Delta_1^i &= A \cdot \cos(\omega i + \omega + \varphi) - A \cos(\omega i + \varphi) = \\ &= -2A \cdot \sin \frac{\omega}{2} \cdot \sin \left( \omega i + \varphi + \frac{\omega}{2} \right) = \\ &= 2A \cdot \sin \frac{\omega}{2} \cdot \cos \left( \omega i + \varphi + \frac{\omega + \pi}{2} \right). \end{aligned}$$

То есть первая разность синусоиды — это синусоида с той же частотой, но с изменёнными амплитудой и фазой, причём изменение амплитуды завязано на частоту. Отсюда немедленно следует, что все последующие разности описываются формулой

$$\Delta_k^i = \left( 2 \sin \frac{\omega}{2} \right)^k A \cdot \cos \left( \omega i + \varphi + k \frac{\omega + \pi}{2} \right). \quad (2)$$

Таким образом, нам достаточно получить выражение для квадрата нормы вектора  $\Delta_0$ , из которого тривиально следует определение  $\|\Delta_k\|^2$ :

$$\begin{aligned} \|\Delta_0\|^2 &= \sum_{i=1}^N A^2 \cdot \cos^2(\omega i + \varphi) = \frac{A^2}{4} \sum_{i=1}^N \left( e^{J\varphi + J\omega i} + e^{-J\varphi - J\omega i} \right)^2 = \\ &= \frac{A^2}{4} \left[ \sum_{i=1}^N e^{2J\varphi + 2J\omega i} + \sum_{i=1}^N e^{-2J\varphi - 2J\omega i} + 2N \right] = \\ &= \frac{NA^2}{2} + \frac{A^2}{4} \left[ e^{2J\varphi} \sum_{i=1}^N e^{2J\omega i} + e^{-2J\varphi} \sum_{i=1}^N e^{-2J\omega i} \right]. \end{aligned}$$

Суммы  $\sum_{i=1}^N e^{2J\omega i}$  и  $\sum_{i=1}^N e^{-2J\omega i}$  представляют собой суммы геометрической прогрессии со знаменателем  $e^{\pm 2J\omega}$ , поэтому

$$\sum_{i=1}^N e^{\pm 2J\omega i} = \frac{e^{\pm 2J\omega(N+1)} - e^{\pm 2J\omega}}{e^{\pm 2J\omega} - 1}. \quad (3)$$

Подставим (3) в выражение для  $\|\Delta_0\|^2$ :

$$\begin{aligned}
\|\Delta_0\|^2 &= \frac{NA^2}{2} + \frac{A^2}{4} \left[ \frac{e^{2J\varphi} \cdot e^{2J\omega N} \cdot e^{2J\omega} - e^{2J\varphi} \cdot e^{2J\omega}}{e^{2J\omega} - 1} + \frac{e^{-2J\varphi} \cdot e^{-2J\omega N} \cdot e^{-2J\omega} - e^{-2J\varphi} \cdot e^{-2J\omega}}{e^{-2J\omega} - 1} \right] = \\
&= \frac{NA^2}{2} + \frac{A^2}{4} \cdot \frac{\cos 2(\omega N + \varphi) - \cos 2(\omega N + \omega + \varphi) - \cos 2\varphi + \cos 2(\omega + \varphi)}{1 - \cos 2\omega} = \\
&= \frac{NA^2}{2} + \frac{A^2}{4} \cdot \frac{\sin(2\omega N + 2\varphi + \omega) \cdot \sin\omega - \sin(\omega + 2\varphi) \sin\omega}{\sin^2\omega} = \\
&= \frac{NA^2}{2} + \frac{A^2}{2} \cdot \frac{\sin\omega N}{\sin\omega} \cdot \cos(\omega(N + 1) + 2\varphi). \tag{4}
\end{aligned}$$

Сложная зависимость (4) однако допускает существенное упрощение, если рассматривать только сигналы с так называемым «истинно-синусоидальным поведением»: с одной стороны, частота  $\omega$  должна быть достаточно большой, чтобы на интервале  $[1, 2, \dots, N]$  укладывалось существенное количество периодов сигнала, и последний был бы похож именно на синусоиду, а не на низкочастотный тренд, с другой —  $\omega$  должна быть сильно меньше частоты Найквиста.

Квадрат нормы  $\|\Delta_0\|^2$  представляет собой сумму двух компонент выражения (4). Сложным поведением обладает только вторая из них, которую мы будем обозначать через  $E$ :

$$E = \frac{A^2}{2} \cdot \frac{\sin\omega N}{\sin\omega} \cdot \cos(\omega(N + 1) + 2\varphi).$$

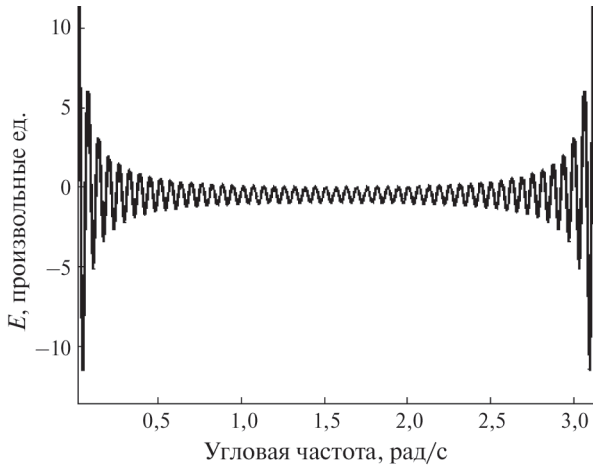
На рис. 2 показано поведение  $E$  при изменении угловой частоты  $\omega$  в ситуации, близкой к наихудшей, т. е. при относительно малом значении числа отсчётов временного ряда  $N = 50$ . Видно, что для частот, далёких от нуля и границы Найквиста, т. е. при «истинно-синусоидальном поведении» сигнала,

$$E \ll \frac{NA^2}{2}.$$

При больших значениях  $N$  величина  $E$  ещё быстрее убывает при удалении от нуля и границы Найквиста. Поэтому вторым слагаемым в выражении (4) будем пренебрегать.

Окончательно имеем, что

$$\|\Delta_0\|^2 \approx \frac{NA^2}{2}.$$



**Рис. 2.** Поведение наиболее сложно зависящей от частоты и начальной фазы синусоиды компоненты выражения для  $\|\Delta_0\|^2$  при изменении частоты синусоидального сигнала

Таким образом, с учётом формулы (2) для  $\|\Delta_k\|^2$  имеем равенство:

$$\|\Delta_k\|^2 = A^2 \left( 2 \sin \frac{\omega}{2} \right)^{2k} \frac{N}{2}$$

и для  $k$ -й степени варибельности ряда получаем формулу:

$$V_k \equiv \frac{\|\Delta_k\|^2}{\|\Delta_0\|^2} = \left( 2 \sin \frac{\omega}{2} \right)^{2k}.$$

Потребуем от сигнала с «истинно-синусоидальным поведением» достаточной гладкости (в противном случае его частота не будет отражать варибельность  $V_k$ ). Гладкость означает, что модули первых разностей временного ряда несравнимо меньше его амплитуды. Из выражения (2) (при  $k = 1$ ) следует, что первые разности временного ряда составляют также синусоидальный временной ряд, амплитуда которого в  $|2 \sin(\omega/2)|$  раз отличается от амплитуды исходного временного ряда, откуда с учётом гладкости получаем, что

$$\left| 2 \sin \frac{\omega}{2} \right| \ll 1, \quad 2 \sin \frac{\omega}{2} \approx \omega.$$

Из последнего равенства следует определения угловой частоты и времени релаксации сигнала:

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega \equiv \left( \frac{\|\Delta_k\|^2}{\|\Delta_0\|^2} \right)^{1/(2k)}, \\ T \equiv 2\pi \left( \frac{\|\Delta_0\|^2}{\|\Delta_k\|^2} \right)^{1/(2k)}. \end{array} \right. \quad (5)$$

Дальнейшее изложение будет основываться на математическом аппарате собственных значений. Поэтому нам потребуется выражение угловой частоты и времени релаксации через квадратичную форму от исходного сигнала.

Введём определение операторов левого и правого сдвига  $B_N^-$  и  $B_N^+$ : для  $\forall x \in \mathbb{R}^N$   $B_N^- x = [x^1, x^2, \dots, x^{N-1}]$ ,  $B_N^+ x = [x^2, x^2, \dots, x^N]$ . Нижний индекс оператора показывает размерность пространства входной переменной — это важно для дальнейших выкладок. При действии каждого из этих операторов на временной ряд получается новый временной ряд, который содержит все элементы исходного кроме последнего в случае левого, и первого в случае правого сдвига. Ниже следуют примеры матричных выражений  $B_N^-$  и  $B_N^+$  для случая временного ряда  $N = 6$ .

$$B^- \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 00 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 00 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 01 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 00 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^+ \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 00 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 01 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 00 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 00 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда можно получить матричную запись рекурсивного соотношения между разностями двух следующих друг за другом порядков: поскольку  $\Delta_{k+1}^i = \Delta_k^{i+1} - \Delta_k^i$ , то

$$\Delta_{k+1} = B_{N-k}^+ \Delta_k - B_{N-k}^- \Delta_k = \left( B_{N-k}^+ - B_{N-k}^- \right) \Delta_k.$$

Следовательно,

$$\|\Delta_{k+1}\|^2 = \Delta_{k+1}^T \Delta_{k+1} = \Delta_k^T \left( B_{N-k}^+ - B_{N-k}^- \right)^T \left( B_{N-k}^+ - B_{N-k}^- \right) \Delta_k. \quad (6)$$



Последовательно применяя (6) ко всем разностям исходного временного ряда от 1-й до  $k$ -й и учитывая, что  $\Delta_0 \equiv x$ , получаем явное выражение для квадрата нормы вектора  $\Delta_k$ :

$$\|\Delta_k\|^2 = x^T \prod_{\alpha=0}^{k-1} \left( B_{N-\alpha}^+ - B_{N-\alpha}^- \right)^T \prod_{\alpha=k-1}^0 \left( B_{N-\alpha}^+ - B_{N-\alpha}^- \right) x. \quad (7)$$

Матрицу квадратичной формы (7) мы будем называть  $R$ -матрицей ( $R$ -matrix) порядка  $k$ , т. е.

$$R[k] \equiv \prod_{\alpha=0}^{k-1} \left( B_{N-\alpha}^+ - B_{N-\alpha}^- \right)^T \prod_{\alpha=k-1}^0 \left( B_{N-\alpha}^+ - B_{N-\alpha}^- \right).$$

Обращаем особое внимание читателя на порядок перемножения матриц в выражении (7) — в первом произведении он прямой, а во втором — обратный.

Таким образом, выражения для угловой частоты и времени релаксации  $k$ -го порядка переписываются в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_k \equiv \left( \frac{x^T R[k] x}{x^2} \right)^{1/(2k)}, \\ T_k \equiv 2\pi \left( \frac{x^2}{x^T R[k] x} \right)^{1/(2k)}. \end{array} \right. \quad (5)$$

Нельзя забывать, что определение (5) выведено исходя из рассмотрения синусоидального сигнала, тогда как  $x$  в общем случае может содержать постоянный уровень или полиномиальный тренд степени меньше  $k$ , что приведёт к бессмысленности определения (5). Покажем это. Пусть временной ряд  $y$ , одинаковый по размерам с  $x$ , представляет собой полином порядка  $y^i = \sum_{\alpha=0}^n c_{\alpha} (i)^{\alpha}$ . Тогда его первая разность представляет собой полином на единицу меньшего порядка и, таким образом,  $(n+1)$ -я разность равна нулю:

$$\begin{aligned} \Delta_1^i &\equiv y^{i+1} - y^i = \sum_{\alpha=0}^n c_{\alpha} (i+1)^{\alpha} - \sum_{\alpha=0}^n c_{\alpha} (i)^{\alpha} = \\ &= c_{\alpha} (i)^{\alpha} + \mathbb{P}_{n-1}(i) + \sum_{\alpha=0}^{n-1} c_{\alpha} (i+1)^{\alpha} - c_{\alpha} (i)^{\alpha} - \sum_{\alpha=0}^{n-1} c_{\alpha} (i)^{\alpha} = \\ &= \mathbb{P}_{n-1}(i) + \sum_{\alpha=0}^{n-1} c_{\alpha} (i+1)^{\alpha} - \sum_{\alpha=0}^{n-1} c_{\alpha} (i)^{\alpha}, \end{aligned}$$

где  $\mathbb{P}_{n-1}(i)$  введено для обозначения полинома  $(n-1)$ -го порядка. Следовательно,  $\|\Delta_{n+1}\|^2 = y^T R[n+1]y = 0$ ,  $y$  принадлежит нуль-пространству оператора  $R[n+1]$  и добавление его к сигналу  $x$  не изменяет числитель (знаменатель) верхней (нижней) формулы в определении (5), зато существенно повлияет на значения квадрата нормы  $x^2$ . Поэтому сигналы с ненулевым средним уровнем и/или полиномиальным трендом вплоть до  $(k-1)$ -го порядка будут иметь неправомерно завышенное время релаксации.

Для разрешения этого парадокса полезно привлечь аппарат собственных значений. Матрица  $R[k]$  симметрична (это тривиально следует из её определения) и положительна, в том смысле, что для  $\forall \xi \in \mathbb{R}^N \xi^T R[k] \xi \geq 0$ , поскольку последнее есть квадрат нормы вектора  $k$ -х разностей сигнала  $\xi$ . Следовательно,  $R[k]$  имеет полный собственный базис  $\{\varphi_j\}_{j=1,2,\dots,N}$ , соответствующий набору собственных значений  $\{\lambda_j\}_{j=1,2,\dots,N}$  в пространстве  $\mathbb{R}^N$ , причём исходя из предыдущего абзаца, любой полиномиальный тренд степени меньше  $k$  представим в виде линейной комбинации собственных векторов с нулевыми собственными значениями. Таким образом, все пространство  $\mathbb{R}^N$  распадается на прямое произведение (естественно, в координатах собственного базиса матрицы  $R[k]$ ) линейных оболочек ненулевых и нулевых собственных векторов  $R[k]$ . Проекцию исходного сигнала на линейную оболочку нулевых собственных векторов  $R[k]$  мы будем называть *неустранимым трендом*  $x_0$ . По определению, неустранимый тренд имеет бесконечное время релаксации, а потому имеет смысл переписать (исправленное) определение (5) в собственных координатах  $R$ -матрицы: если  $x = x_0 + \sum_{j=1, \lambda_j \neq 0}^N \xi^j \varphi_j$ , то

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_k \equiv \left( \frac{\sum_{j=1, \lambda_j \neq 0}^N (\xi^j)^2 \lambda_j}{\sum_{j=1, \lambda_j \neq 0}^N (\xi^j)^2} \right)^{1/(2k)}, \\ T_k \equiv 2\pi \left( \frac{\sum_{j=1, \lambda_j \neq 0}^N (\xi^j)^2}{\sum_{j=1, \lambda_j \neq 0}^N (\xi^j)^2 \lambda_j} \right)^{1/(2k)}. \end{array} \right. \quad (6)$$

Здесь и далее  $N$  мы будем обозначать число «ненулевых» собственных векторов  $R[k]$ . Разумеется, определение (6) применимо, только если рассматриваемый сигнал содержит что-нибудь кроме неустраиваемого тренда.

Для временного ряда СРПВ, график которого представлен на рис. 1, например, время релаксации 2-го, 3-го и 4-го порядка составляет соответственно 4,5; 4,1 и 3,9 дней.

## 2. ОРТОГОНАЛЬНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ

Процессы, совместно участвующие в формировании изучаемых временных рядов, чаще всего сильно различаются по «скоростям протекания». Последний термин, будучи вполне корректно определённым, скажем, в химической кинетике, является по понятным причинам весьма расплывчатым в научных областях, характеризующихся отсутствием физических моделей (примеры: гелиобиология, экономика и компьютерное зрение). Названный параметр вводится для разложения временного ряда в сумму (некоррелированных по причине независимости рассматриваемых процессов) компонент, количество которых пусть для простоты ограничено двумя, каждая из которых по отдельности имела бы место, если бы второй процесс отсутствовал. Заметим, что под процессом не обязательно подразумевается выделенное именованное в науке и/или обыденности понятие — это может быть совокупность явлений, имеющих сходные «скорости протекания».

Традиционно «скорость протекания процесса» в гелиобиологии трактуется с частотной точки зрения, отталкиваясь чаще от преобразования Фурье [Халберг и др., 2009; Cornelissen, 2014; Halberg et al., 2003, 2008a, b] и реже на основе wavelet transform со специальной порождающей функцией, называемой вейвлетом Морле [Зенченко и др., 2013] и используемой при динамическом спектральном анализе Габора. Временные ряды разлагаются в сумму (ортогональных друг другу по причине некоррелированности) компонент, сильно различающихся по частотам в случае Фурье и по параметру масштаба в случае вейвлетов. Так как wavelet transform с порождающей функцией Морле — это преобразование Габора, масштабный параметр здесь также является в обычном смысле этого слова *частотой*, разве что динамически меняющейся во времени. Понятно, что эти концепции будут удовлетворительно работать лишь в применении к временным рядам, представимым в виде сумм ограниченного числа периодических

компонент. Для большинства гелиобиологических и геофизических рядов, типичный представитель которых изображён на рис. 1, они могут привести к неудовлетворительным результатам.

Мы предлагаем некоторую методику, позволяющую разлагать временной ряд в сумму двух некоррелированных компонент с отличающимися в разы значениями времени релаксации. Это позволит отсекаать как быстро и с виду хаотично меняющиеся компоненты сигнала, обычно (и, как мы увидим в одном примере, не всегда справедливо) «записываемые» в шум, так и малоинформативные медленные тренды.

Будем рассматривать сигнал с вычтенным неустранимым трендом (последний абсолютно неинтересен с теоретической точки зрения, однако в практических приложениях будет приписываться наиболее «медленной» компоненте временного ряда) и работать исключительно в собственном базисе релаксационной матрицы. Обозначим за  $x$  координаты исходного сигнала в этом базисе, а за  $z$  — координаты одной из искомым компонент, для определённости — низкочастотной (здесь и далее будет подразумеваться угловая частота релаксации, если не оговорено обратное), и поставим задачу: найти наиболее близкий к  $x$  сигнал  $z$ , обладающий заданной угловой частотой релаксации  $\omega_z < \omega_x$  (символ  $\omega$  обозначает частоту временного ряда, стоящего в нижнем индексе). Таким образом, с формальной точки зрения имеем проблему на условный минимум:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_z \sum_{i=1}^N (z^i - x^i)^2, \\ \frac{\sum_{i=1}^N (z^i)^2 \lambda^i}{\sum_{i=1}^N (z^i)^2} = \omega_z^{2k}. \end{array} \right. \quad (7)$$

Несмотря на кажущуюся простоту и компактность постановки, аналитическое решение задачи (7) отсутствует, а численное — неоправданно ресурсозатратно. Поэтому в данной работе предлагается разлагать  $x$  в сумму компонент  $z$  и  $x - z$ , являющихся решением двухступенчатой оптимизационной задачи: на первом шаге определяется некоторый вектор  $u$ , являющийся решением проблемы.

$$\min_z \sum_{i=1}^N (y^i - x^i)^2 + \gamma \sum_{i=1}^N (y^i)^2 \lambda^i, \quad (7a)$$

$$\frac{\sum_{i=1}^N (y^i)^2 \lambda^i}{\sum_{i=1}^N (y^i)^2} = \omega_z^{2k}. \quad (76)$$

В этом случае ищется минимум достаточно тривиальной квадратичной формы (7a) с параметром  $0 \leq \gamma$ , удовлетворяющем условию (76). Следующая теорема проясняет ситуацию по данной задаче.

**Теорема:** Если  $\omega_z < \omega_x$  и среди ненулевых значений  $R$ -матрицы есть хотя бы два различных, то решение задачи (7a, б) существует и единственно.

**Доказательство:** поскольку минимум (7a) достигается на сигнале

$$y^i = \frac{x^i}{1 + \gamma \lambda^i}, \quad (8)$$

однозначно зависящем от параметра  $\gamma$ , остаётся лишь доказать существование и единственность решения уравнения (76). Покажем вначале, что производная функции

$$F \equiv \frac{\sum_{i=1}^N (y^i(\gamma))^2 \lambda^i}{\sum_{i=1}^N (y^i(\gamma))^2} \quad (9)$$

монотонно убывает:

$$F' \equiv \frac{2 \left[ \sum_{i=1}^N (y^i(\gamma))^2 \right] \sum_{i=1}^N y^i(\gamma) (y^i(\gamma))' \lambda^i - 2 \left[ \sum_{i=1}^N (y^i(\gamma))^2 \lambda^i \right] \sum_{i=1}^N y^i(\gamma) (y^i(\gamma))'}{\left[ \sum_{i=1}^N (y^i(\gamma))^2 \right]^2}. \quad (10)$$

Нас интересует только знак  $F'$ , поэтому мы исключим из рассмотрения знаменатель выражения (10) как заведомо больший нуля (как видно из равенства (8), тождественное равенство нулю сигнала  $y$  не достигается ни при одном допустимом значении  $\gamma$ ). Далее, для

удобства перенесём все индексы вниз и перейдём к двойным суммам в числителе выражения (10); знак равенства при этом сместится на  $\sim$ , означающий «пропорционально»:

$$F' \sim \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \lambda_j y_i^2 y_j y_j' - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \lambda_i y_i^2 y_j y_j'.$$

Учитывая, что

$$y_j' = -\frac{\lambda_j x_j}{(1 + \gamma \lambda_j)^2},$$

получаем:

$$y_j^2 = \frac{x_j^2}{(1 + \gamma \lambda_j)^2} = -\frac{1}{\lambda_j} \left( -\frac{\lambda_j x_j}{(1 + \gamma \lambda_j)^2} \right) x_j = -\frac{x_j}{\lambda_j} y_j'.$$

Последнее равенство правомерно в силу того, что  $\lambda_j > 0$ . Отсюда

$$\begin{aligned} F' &\sim -\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \lambda_j \frac{x_i}{\lambda_i} y_i' y_j y_j' + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \lambda_i \frac{x_i}{\lambda_i} y_i' y_j y_j' = \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N x_i y_i' y_j y_j' - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \lambda_j \frac{x_i}{\lambda_i} y_i' y_j y_j' = \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N x_i \frac{\lambda_i x_i}{(1 + \gamma \lambda_i)^2} \cdot \frac{x_j}{1 + \gamma \lambda_j} \cdot \frac{\lambda_j x_j}{(1 + \gamma \lambda_j)^2} - \\ &- \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\lambda_j}{\lambda_i} x_i \frac{\lambda_i x_i}{(1 + \gamma \lambda_i)^2} \cdot \frac{x_j}{1 + \gamma \lambda_j} \cdot \frac{\lambda_j x_j}{(1 + \gamma \lambda_j)^2}, \\ &\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{x_i^2 x_j^2}{(1 + \gamma \lambda_i)^2 (1 + \gamma \lambda_j)^2} \left[ \frac{\lambda_i \lambda_j}{1 + \gamma \lambda_j} - \frac{\lambda_i^2}{1 + \gamma \lambda_i} \right] = \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{x_i^2 x_j^2}{(1 + \gamma \lambda_i)^3 (1 + \gamma \lambda_j)^3} \left( \lambda_i \lambda_j + \gamma \lambda_i^2 \lambda_j - \gamma \lambda_i^2 \lambda_j - \lambda_i^2 \right) = \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{x_i^2 x_j^2}{(1 + \gamma \lambda_i)^3 (1 + \gamma \lambda_j)^3} \left( \lambda_i \lambda_j + \gamma \lambda_i^2 \lambda_j - \gamma \lambda_i^2 \lambda_j - \lambda_i^2 \right) = \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{x_i^2 x_j^2 \lambda_i \lambda_j}{(1 + \gamma \lambda_i)^3 (1 + \gamma \lambda_j)^3} - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{x_i^2 x_j^2 \lambda_i^2}{(1 + \gamma \lambda_i)^3 (1 + \gamma \lambda_j)^3}. \end{aligned}$$

Рассмотрим два вектора  $\xi$  и  $\eta$  со следующими координатами:

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_i \equiv \frac{x_i \lambda_i}{(1 + \gamma \lambda_i)^{3/2}}, \\ \eta_i = \frac{x_i}{(1 + \gamma \lambda_i)^{3/2}}. \end{array} \right. \quad (11)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{x_i^2 x_j^2 \lambda_i \lambda_j}{(1 + \gamma \lambda_i)^3 (1 + \gamma \lambda_j)^3} &= \left( \sum_{i=1}^N \frac{x_i^2 \lambda_i}{(1 + \gamma \lambda_i)^{3/2} (1 + \gamma \lambda_i)^{3/2}} \right)^2 = \\ &= \left( \sum_{i=1}^N \xi_i \eta_i \right)^2 = \left( \xi^T \eta \right)^2, \\ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{x_i^2 x_j^2 \lambda_i^2}{(1 + \gamma \lambda_i)^3 (1 + \gamma \lambda_j)^3} &= \left( \sum_{i=1}^N \frac{x_i^2 \lambda_i^2}{(1 + \gamma \lambda_i)^3} \right) \cdot \left( \sum_{j=1}^N \frac{x_j^2}{(1 + \gamma \lambda_j)^3} \right) = \\ &= \left( \sum_{i=1}^N \xi_i^2 \right) \cdot \left( \sum_{i=1}^N \eta_i^2 \right) = \|\xi\|^2 \|\eta\|^2. \end{aligned}$$

В силу неравенства Коши  $\left( \xi^T \eta \right)^2 < \|\xi\|^2 \|\eta\|^2$ . Исключение составляет случай коллинеарности векторов  $\xi$  и  $\eta$ , однако тогда, как нетрудно видеть из выражения (11):

$$\frac{\xi_i}{\eta_i} = \lambda_i = \text{const},$$

т. е. имеет место при единственном  $N$ -кратном собственном значении  $R$ -матрицы. Доказательство невозможности этого для  $R$ -матрицы любого порядка выходит за рамки данной работы, поэтому мы ограничимся лишь упоминанием того факта, что в результате огромного количества численных экспериментов такого не наблюдалось ни разу. Отсюда следует, что  $F' < 0$  и функция (7b) монотонно убывает с ростом  $\gamma$ , т. е. решение, если оно есть, единственно. С другой стороны, из выражения (8) тривиально следует, что  $F = \omega_x^{2k}$  при  $\gamma = 0$ , и  $F = 0$  при  $\gamma \rightarrow \infty$ , поэтому решение при  $\omega_z^{2k} < \omega_x^{2k}$  существует. **Теорема доказана.**

На втором шаге алгоритма ищется окончательное решение в виде  $z = \text{су}$ . Заметим, что такое преобразование оставляет постоянной угловую частоту релаксации:

$$\frac{\sum_{i=1}^N (cy^i)^2 \lambda^i}{\sum_{i=1}^N (cy^i)^2} = \frac{c^2}{c^2} \cdot \frac{\sum_{i=1}^N (y^i)^2 \lambda^i}{\sum_{i=1}^N (y^i)^2} = \omega_z^{2k}.$$

Поэтому оптимизация параметра  $c$  приближает  $z$  к  $x$ , не приводя к нарушению равенства (7b):

$$\left. \begin{aligned} \|cy - x\|^2 = c\|y\|^2 - 2cx^T y + \|x\|^2 \rightarrow \min, \\ z = \frac{x^T y}{\|y\|^2} y. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Нетрудно видеть, что разность  $v \equiv x - z$  ортогональна найденному сигналу  $z$ :

$$(x - z)^T z = \frac{x^T y}{\|y\|^2} \left( x^T - \frac{x^T y}{\|y\|^2} y^T \right) y = \frac{x^T y}{\|y\|^2} \left( x^T y - \frac{x^T y}{\|y\|^2} \|y\|^2 \right) = 0.$$

Квадрат нормы временного ряда естественно называть его амплитудной мощностью. Следующая основная теорема гарантирует разложение временного ряда в сумму компонент со временами релаксации, отличающимися на порядок (в подавляющем большинстве случаев в гелиобиологии эти компоненты трактуются либо как «сигнал» и «шум», либо как «модуляция» и «несущий тренд»):

**Теорема (Ожередов, Бреус – 2016):** пусть исходный сигнал представим в виде суммы  $x = z + v$ , где  $z^T v = 0$ . Тогда амплитудные мощности и угловые частоты релаксации перечисленных сигналов связаны неравенством:

$$\|z\|^2 \omega_z^{2k} + \|v\|^2 \omega_v^{2k} \geq \frac{\|z\|^2 + \|v\|^2}{2} \omega_x^{2k}. \quad (13)$$

**Доказательство:** очевидно, что для любой компоненты векторов  $z$  и  $v$  верно следующее:

$$\begin{aligned} (z_i + v_i)^2 - 2(z_i^2 + v_i^2) &= -(z_i^2 + v_i^2 - 2z_i v_i) = -(z_i - v_i)^2 \leq 0, \\ z_i^2 + v_i^2 &\geq \frac{(z_i + v_i)^2}{2}. \end{aligned}$$

Следовательно,



$$\begin{aligned}
z^2 \omega_z^{2k} + v^2 \omega_v^{2k} &= \sum_{i=1}^N z_i^2 \lambda_i + \sum_{i=1}^N v_i^2 \lambda_i = \sum_{i=1}^N [z_i^2 + v_i^2] \lambda_i \geq \\
&\geq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (z_i + v_i)^2 \lambda_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N x_i^2 \lambda_i = \frac{x^2}{2} \omega_x^{2k}.
\end{aligned}$$

С другой стороны, по причине ортогональности компонент  $z$  и  $v$  друг другу,

$$x^2 = (z + v)^T (z + v) = z^T z + 2v^T z + v^T v = z^2 + v^2,$$

откуда следует справедливость выражения (13). **Теорема доказана.**

Как уже было упомянуто выше, практическую значимость имеет фильтрация как разделение либо «сигнала» и «шума», либо «модуляции» и «несущего тренда». В обоих случаях компонента  $z$  имеет несравнимо большее по сравнению с исходным временным рядом  $x$  время релаксации и объясняет не менее 80 % его дисперсии, т. е.:

$$\begin{cases} \omega_z \ll \omega_x, \\ \frac{z^2}{z^2 + v^2} \geq 0,8. \end{cases}$$

Перепишем неравенство (13), разделив обе его части на  $\omega_x^{2k}$ :

$$\|z\|^2 \left( \frac{\omega_z}{\omega_x} \right)^{2k} + \|v\|^2 \left( \frac{\omega_v}{\omega_x} \right)^{2k} \geq \frac{\|z\|^2 + \|v\|^2}{2}.$$

Отношением  $(\omega_z/\omega_x)^{2k}$  можно пренебречь, так как  $k < 1$ , поэтому

$$\left( \frac{\omega_v}{\omega_x} \right)^{2k} \geq \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{z^2}{v^2} \right) = \frac{1}{2} (1 + 4) = \frac{5}{2}.$$

Таким образом, угловая частота релаксации «остатка»  $v$  гарантировано превышает  $\omega_x$ , что и свидетельствует о достигнутом разложении исходного сигнала  $x$  в сумму  $x = z + v$ , где  $\omega_z \ll \omega_x$ .

В качестве полезного примера приведём отнюдь не выделение гладкой составляющей из одномерного сигнала — здесь рассматриваемый метод не имеет визуальных преимуществ перед тысячью других, с тем или иным успехом использующихся (или не использующихся) в гелиобиологии. Вместо этого продемонстрируем работу метода в ситуации, когда основной интерес представляет как раз быстро осциллирующая компонента, обычно записываемая «в шум».



**Рис. 3.** Применение ортогональной фильтрации к изображению: *слева* — исходная фотография; *по центру* — «быстрая компонента»; *справа* — результат контрастирования быстрой компоненты (авторская методика)

Описанный в данном разделе фильтр можно использовать для двумерных полей, если вначале отфильтровать все столбцы (строки), а затем в полученной матрице отфильтровать все строки (столбцы). Примерами двумерного поля являются компоненты RGB-цветного изображения. Применим рассмотренный метод для выделения «тренда» с длиной релаксации 3-го порядка в 25 пикселей к фотографии на рис. 3 слева.

В данном случае нас будет интересовать компонента  $v$ . Применяя специально разработанную для этого примера авторами методику контрастирования, получаем изображение на рис. 3 справа. Видно, что фотография сцены сделана отдельно фотоаппаратом с весьма посредственной технологией сжатия raw-файла (видны «квадратно-гнездовые» артефакты, связанные с особенностями формата jpeg, причём заметно, что их концентрация по всему полю постоянна и не зависит от яркости), и затем на передний план была помещена нарисованная от руки фигура девушки, которая естественно лишена jpeg-артефактов. Таким образом, метод ортогональной фильтрации позволил установить, что данная фотография — подделка.

### 3. СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Выше мы упомянули, что  $R$ -матрица порождает полный ортонормированный базис пространства  $\mathbb{R}^N$ , в котором лежит исходный сигнал, а из формулы (6) следует, что угловая частота релаксации каждой из базисных компонент (обозначим их  $\varphi_i$ ) равна

$$\omega_k[\Phi_i] = \frac{\left( \sum_{j=1, \lambda_j \neq 0}^N (\xi^j[\Phi_i])^2 \lambda_j \right)^{1/(2k)}}{\left( \sum_{j=1, \lambda_j \neq 0}^N (\xi^j[\Phi_i])^2 \right)^{1/(2k)}} = \frac{\left( (\xi^i[\Phi_i])^2 \lambda_i \right)^{1/(2k)}}{\left( (\xi^i[\Phi_i])^2 \right)^{1/(2k)}} = (\lambda_i)^{1/(2k)},$$

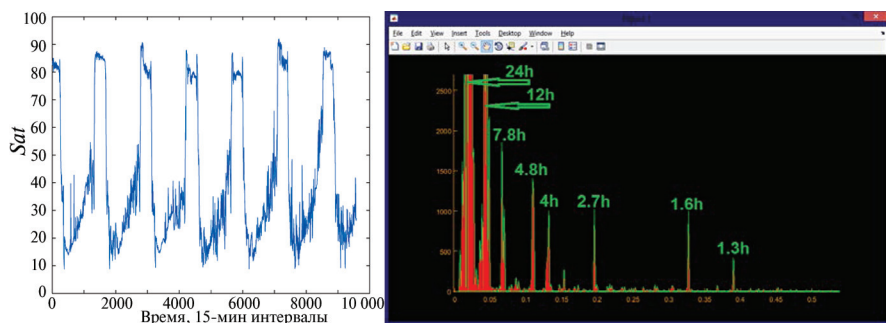
т. е. возведённым в степень  $(1/2k)$ -м собственным значением  $R$ -матрицы. Соотношение

$$\sum_{i=1}^N (\xi^i[x])^2 = x^2,$$

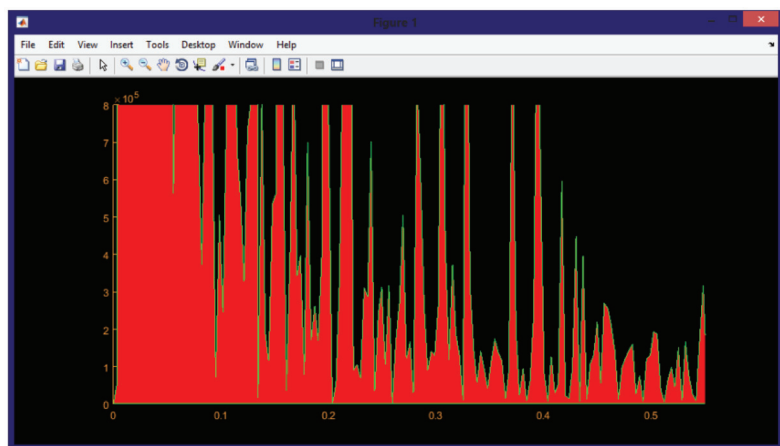
напрямую следующее из известного равенства Парсевалья, позволяет представить любой сигнал как взвешенную сумму собственных векторов  $R$ -матрицы, а квадрат коэффициента перед каждым собственным вектором — как высоту соответствующего спектрального пика, ассоциированного с частотой релаксации  $(\lambda_i)^{1/(2k)}$ . Полученный таким образом спектр, в отличие от спектров Фурье и Морле, не будет завязан на свойства периодичности доминирующих в сигнале компонент. Если природа временного ряда такова, что последний возникает в результате наложения двух или нескольких процессов, которые и близко не обладают периодичностью, но в то же время допускают чёткое деление на «быстрые» и «медленные», этот спектр (назовём его *релаксационным*) более информативен по смыслу, чем спектры Фурье и Морле. Каждый пик спектра интерпретируется не как мощность компоненты заданной частоты, а как мощность компоненты, отвечающей за процесс, протекающий с заданной скоростью, и таким образом величина  $2\pi(\lambda_i)^{-1/(2k)}$  показывает, за какое характерное время мы бы увидели изменение состояния изучаемой системы, если бы на неё влиял только этот, ассоциированный с заданным спектральным пиком, процесс. Рассмотрим примеры.

Для тестирования релевантности метода релаксационного спектрального анализа авторы провели эксперимент длительностью одна неделя. Один раз в 15 мин веб-камера регистрировала изображение, видимое из окна квартиры, и записывала среднюю насыщенность этого изображения как отсчёт временного ряда (рис. 4а). Напомним, что насыщенностью *Sat* пиксела, заданного вектором интенсивности красного, зелёного и синего цветов, т. е.  $\{R, G, B\}$ , называется следующая величина:

$$Sat = 1 - \frac{\min\{R, G, B\}}{\max\{R, G, B\}}.$$



**Рис. 4.** Исходный временной ряд насыщенности *Sat* изображения, регистрируемого веб-камерой в процессе эксперимента (а); релаксационный спектр ряда *Sat* с указанием времени релаксации, соответствующему конкретным пикам (б)



**Рис. 5.** Спектр Фурье временного ряда *Sat*, зарегистрированного веб-камерой

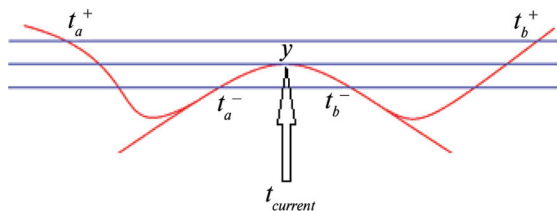
Цвет с большим значением *Sat* воспринимается пользователем как более «сочный, насыщенный», чем цвет с меньшим значением *Sat*. Цвета, у которых *Sat* = 0, соответствует градациям серого, т.е. чёрно-белому изображению. Перед началом эксперимента было ясно, какой ответ должен быть получен в результате спектрального анализа. Насыщенность регистрируемого камерой изображения зависит, во-первых, от времени суток — ночью зажигаются синие и оранжевые фонари, реклама и другие артефактные источники све-

та, насыщенность которых близка к 100 %, цифре, к которой насыщенность видимой днём природной цветовой гаммы и близко не подбирается. То есть должно прослеживаться время релаксации 24 ч. Во-вторых, насыщенность регистрируемого изображения зависит от того, перекрыто ли солнце облаками, причём для больших дождевых облаков и туч время такого перекрытия, во-первых, велико, а во-вторых — оно существенно варьирует, тогда как для кучевых облаков, имеющих примерно один и тоже размер, время перекрытия мало и почти постоянно. Таким образом, спектральные пики должны достаточно часто встречаться вблизи отметки 24 ч, а затем их концентрация должна резко падать. Именно это мы увидели на релаксационном спектре (рис. 4б).

Заметим, что релаксационный спектр получился гораздо разреженнее и потому существенно информативнее спектра Фурье того же ряда (рис. 5).

#### **4. АНАЛИЗ СОВПАДЕНИЙ СПЕКТРАЛЬНЫХ ПИКОВ В ПОПУЛЯЦИОННЫХ И ГЕЛИОГЕОМАГНИТНЫХ РЯДАХ**

Согласно основной концепции гелиобиологии [Бреус и др., 2016; Комаров и др., 2017], сигналы гелиогеомагнитной природы завели биологические часы в живых организмах. До настоящего времени этот тезис интерпретировался так: в популяционных физиологических рядах должны проявляться некоторые из ритмов гелиогеомагнитных рядов. До настоящего времени такие парные ритмы выявлялись в целом ряде работ с помощью расчёта фурье-спектров [Зенченко и др., 2013; Халберг и др., 2009; Breus et al., 2008; Cornelissen, 2014; Halberg et al., 2003, 2008a, b], выделение которых часто затруднялось из-за значительного шума, вызывало неоднозначные ответы и порождало сомнения. В данной работе авторы видоизменяют интерпретацию основной концепции гелиобиологии в виду необходимости обобщения понятия «период» на аperiodические сигналы, встречающиеся в гелиобиологии и гелиогеофизике. Теперь эта гипотеза звучит так: популяционные ряды формируются под действием нескольких процессов, и часть из них существенно связана с гелиогеомагнитными явлениями, а поэтому имеет совпадающую с ними скорость протекания, т.е. то же самое время релаксации. Иными словами, представляется целесообразным в гелиобиологических исследованиях искать совпадение пиков релаксационных спектров. Для объективности совпадающие пики будет искать компьютерная программа.



**Рис. 6.** Иллюстрация расположения вспомогательных временных отсчётов, используемых в алгоритме автоматического поиска спектрального пика

Итак, пусть мы получили спектр. Его можно рассматривать как ряд обычных значений переменной  $y$ , индексируемый переменной  $t$ . Зададим некоторую погрешность  $dy$ , равную, к примеру, 2 % от средней высоты спектра. Необходимо получить все точки  $t$ , соответствующие правдоподобным по отношению к заданной погрешности  $dy$  спектральным пикам. Пусть  $t_{current}$  — точка, являющаяся кандидатом на пик. Введём четыре временных отсчёта (рис. 6):

$$t_a^- = \max \{t, t < t_{current}, y(t) < y(t_{current}) - dy\},$$

$$t_a^+ = \max \{t, t < t_{current}, y(t) > y(t_{current}) + dy\},$$

$$t_b^- = \min \{t, t > t_{current}, y(t) < y(t_{current}) - dy\},$$

$$t_b^+ = \min \{t, t > t_{current}, y(t) > y(t_{current}) + dy\}.$$

Как видно на рис. 6, два из них расположены выше и два ниже  $y(t_{current})$ . Точка  $t_{current}$  является достоверным пиком, если между  $t_a^-$  и  $t_b^-$  имеется существенная (характерный размер больше чем  $dy$ ) выпуклость вверх, а между как  $t_a^+$  и  $t_a^-$ , так и  $t_b^-$  и  $t_b^+$  — существенная выпуклость вниз. Формально это означает выполнение системы строгих неравенств

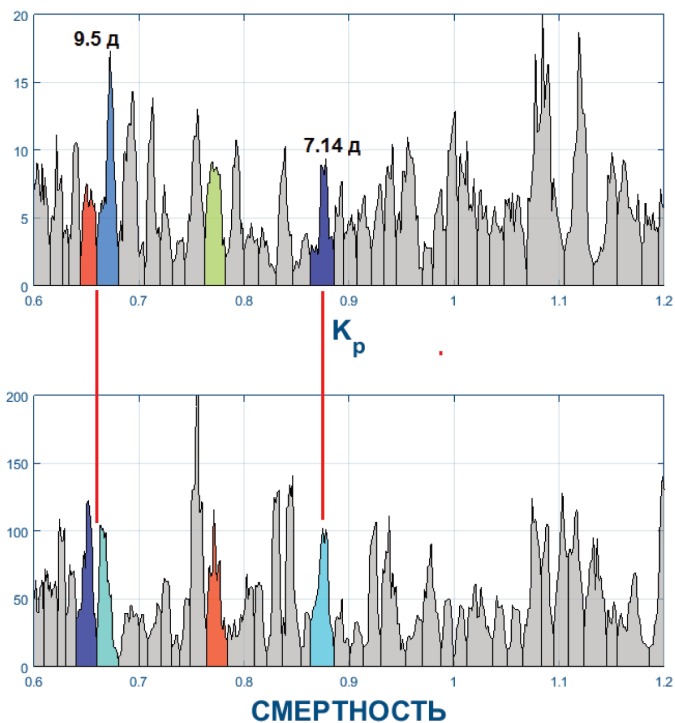
$$t_a^+ < t_a^- < t_b^- < t_b^+.$$

Будем сопоставлять только пики, находящиеся не на краю спектра, т. е. такие, у которых есть соседи слева и справа. Такие пики назовём внутренними. Пусть есть три подряд идущих достоверных пика с координатами  $t_1^*, t_2^*, t_3^*$ , т. е. пик с координатой  $t_2^*$  — внутренний. Назовём интервал  $[t_1^*, t_3^*]$  носителем  $sup_2$  пика с координатой  $t_2^*$ . Объективной мерой совпадения двух спектральных пиков двух разных временных рядов будет степень перекрытия их носителей, выраженная через корреляцию Сьеренсена:

$$C = \frac{|sup_{pop} \cap sup_{geo}|}{\max(|sup_{pop}|, |sup_{geo}|)},$$

где  $sup_{pop}$  — носитель одного из пиков популяционного ряда;  $sup_{geo}$  — носитель сравниваемого с ним пика гелиогеомагнитного ряда, а знак модуля  $|*|$  означает длину одного из носителей или их пересечения. Мы принимаем гипотезу о совпадении пиков, если степень перекрытия носителей, выражаемая коэффициентом корреляции Сьеренсена, была больше 95 %.

На рис. 7 представлен результат поиска совпадающих пиков в спектрах  $K_p$ -индекса и смертности от инфаркта миокарда в Миннесоте, оба ряда имеют скважность один день и протяжённость с 1972 по 1996 г. (24 года). Данные о смертности в Миннесоте (США) любезно предоставлены авторам профессором Францем Халбергом.



**Рис. 7.** Совпадающие пики релаксационных спектров (окрашены) во временных рядах  $K_p$ -индекса и смертности от инфаркта миокарда в Миннесоте

Алгоритм выявил четыре сходных пика, подтвердив высказанную гелиобиологами ранее гипотезу о том, что наиболее сильно влияют на популяцию в целом геомагнитные ритмы с периодами вблизи 7 и 9 дней.

## ВЫВОДЫ

Биологические и гелиогеофизические временные ряды данных, с которыми приходится иметь дело в гелиобиологии, далеко не все содержат доминирующие периодические компоненты. Поэтому возникает необходимость обобщения понятия «период» на существенно апериодические сигналы через параметр «время релаксации», который вводится в работу через усреднённые квадраты конечных разностей. Показано, что для синусоиды время релаксации и период текстуально совпадают. Разработан алгоритм фильтрации шумов и длиннопериодных трендов, основанный на разделении исходного сигнала на быстро и медленно релаксирующие компоненты (применимый не только для одномерных рядов, но и для двумерных изображений), и доказана основная теорема, гарантирующая его работоспособность. Описан метод построения ортонормированного базиса, компоненты которого обладают строго определённым временем релаксации. Результат разложения сигнала по этому базису был нами назван релаксационным спектром. Основные выводы из проведённого в работе исследования:

- релаксационный анализ позволяет обобщить «спектральный» формализм на сигналы, не представимые в виде суммы ограниченного числа квазипериодических компонент;
- возможно разделение временного ряда на «сигнал-шум» или «осцилляция-тренд» в отсутствие адекватных Фурье — или стохастической модели;
- релаксационные спектры рядов  $Kp$ -индекса и смертности от инфаркта миокарда в Миннесоте (США) содержат четыре пика, перекрывающие друг друга на 95 %.

Подтверждена высказанная гелиобиологами ранее гипотеза о том, что наиболее существенно влияют на физиологические показатели биологических объектов (популяцию в целом) геомагнитные ритмы с периодами вблизи семи и девяти дней.

Данная работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект № 15-04-0294517).



## ЛИТЕРАТУРА

- [Бреус и др., 2010] *Бреус Т. К., Гурфинкель Ю. И., Зенченко Т. А., Ожередов В. А.* Сравнительный анализ чувствительности различных показателей сосудистого тонуса к метеорологическим и геомагнитным факторам // Геофизические процессы и биосфера. 2010. Т. 9. № 2. С. 23–36.
- [Бреус и др., 2016] *Бреус Т. К., Бинги В. Н., Петрукович А. А.* Магнитный фактор солнечно-земных связей и его влияние на человека; физические проблемы и перспективы // Успехи физ. наук. 2016. Т. 186. № 5. С. 568–576.
- [Владимирский, 2016] *Владимирский Б. М.* Космическая погода и биосфера: История исследований и современность. М.: URSS, 2016. 112 с.
- [Зенченко и др., 2013] *Зенченко Т. А., Медведева А. А., Хорсева Н. И., Бреус Т. К.* Синхронизация показателей сердечного ритма человека и вариаций геомагнитного поля в диапазоне частот 0,5–3,0 мГц // Геофизические процессы и биосфера. 2013. Т. 12. № 4. С. 73–84 (= *Zenchenko T. A., Medvedeva A. A., Khorseva N. I., Breus T. K.* Synchronization of human heart-rate indicators and geomagnetic field variations in the frequency range of 0.5–3.0 mHz // *Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics*. 2014. V. 50. Iss. 7. P. 736–744).
- [Комаров и др., 2017] *Комаров Ф. И., Рапопорт С. И., Бреус Т. К., Чибисов С. М.* Десинхронизация биологических ритмов как отклик на воздействие факторов внешней среды // Клиническая медицина. 2017. № 6 (принята в печать).
- [Халберг и др., 2009] *Халберг Ф., Корнелиссен Г., Буту Л. А.* и др. Успехи хрономии // Геофизические процессы и биосфера. 2009. Т. 8. № 2. С. 43–74.
- [Breus et al., 2008] *Breus T. K., Zenchenko T. A., Stoilova I., Dimitrova S.* Heliogeomagnetic rhythms are indeed synchronizers of biological “clocks” // UN/ESA/NASA/JAXA/BAS Workshop on “The First Results from the International Heliophysical Year 2007”. Sozopol, Bulgaria, June 2–6, 2008. 2008. P. 70.
- [Cornelissen, 2014] *Cornelissen G.* Cosinor-based rhythmometry // *Theoretical Biology and Medical Modelling*. 2014. URL: <http://www.tbiomed.com/content/11/1/16>
- [Gurfinkel et al., 2012] *Gurfinkel Yu., Breus T., Zenchenko T., Ozheredov V.* Investigation of the Effect of Ambient Temperature and Geomagnetic Activity on the Vascular Parameters of Healthy Volunteers // *Open J. Biophysics*. 2012. V. 2. P. 46–55. doi:10.4236/ojbiphys.2012.22007.
- [Halberg et al., 2003] *Halberg F., Cornélissen G., Bingham Ch.* et al. Chronomics: Imaging in time by phase synchronization reveals wide spectral-biospheric resonances beyond short rhythms // *Neuroendocrinology Letters*. 2003. V. 24. No. 5. P. 355–380.
- [Halberg et al., 2008a] *Halberg F., Cornélissen G., Schwartzkopff O.* Quo vadis chronomics 2008: Measuring variability in us, among us and around us / Eds. Halberg F.,

- Kenner T., Fiser B., Siegelova J. // Proc Noninvasive Methods in Cardiology. Brno, Czech Republic, Oct. 4–7, 2008. 2008. P. 16–25. URL: [http://web.fnusa.cz/files/kfdr2008/sbornik\\_2008.pdf](http://web.fnusa.cz/files/kfdr2008/sbornik_2008.pdf)
- [Halberg et al., 2008b] Halberg F., Cornélissen G., Sothorn RB. et al. Cycles tipping the scale between death and survival (“life”) // Progress of Theoretical Physics. 2008. Suppl. V. 173. P. 153–181.
- [Vladimirskii et al., 1995] Vladimirskii B. M., Narmanskii V. Ya., Temuriantz N. A. Global rhythmic of the solar system in the terrestrial habitat // Biophysics. 1995. V. 40. P. 731–736.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение .....	3
1. Время релаксации и его представление через квадратичную форму .....	4
2. Ортогональная фильтрация .....	11
3. Спектральный анализ .....	18
4. Анализ совпадений спектральных пиков в популяционных и гелиогеомагнитных рядах .....	21
Выводы .....	24
Литература .....	25

## **Relaxation Spectral Analysis and its Application to the Detection of Synchronous Processes in Heliobiology and Chronomedicine**

*V. F. Ozheredov, T. K. Breus*

In the study of weak connection between processes in heliobiology, geophysics and chronomedicine, spectral analysis is played one of the leading roles. The identical arrangement of peaks on the spectra of two time series indicates the presence in them of components generated by processes developing with similar speeds. This allows putting forward a hypothesis about their interconnection, which, with other approaches, is masked by noise. At the same time, the concept of synchronicity of certain physiological and heliogeophysical processes is used by many researchers to attract a «resonant» mechanism or mechanism for capturing the frequency of an external natural factor to explain the formation of endogenous rhythm of biological objects. Until now, the main carrier of information on biological and heliogeophysical signals was the sum of periodic variations. However, not all of the series of interest contain the dominant periodic components. A series that cannot be represented with reasonable accuracy in the form of a sum of a limited number of periodic functions will be called essentially aperiodic (in contrast to the sum of two sinusoids with an irrational frequency ratio, which also in the strict sense is not a periodic function of time). These considerations lead to the necessity of generalizing the concept of «period» to essentially aperiodic signals through the parameter «relaxation time», which is introduced in this paper through the averaged squares of finite differences. It is shown that for a sinusoid the relaxation time and period coincide textually. An algorithm for filtering noise and long-period trends is developed, based on the separation of the original signal into fast and slowly relaxing components (applicable not only for one-dimensional series, but also for two-dimensional images), and a theorem is proved that guarantees its operability. A method for constructing an orthonormal basis whose components have a strictly defined relaxation time is described. The result of the decomposition of the signal over this basis is called the relaxation spectrum. With the help of an automatic algorithm for extracting reliable spectral peaks of population and heliogeomagnetic time series and identifying similar peaks through the Sørensen measure, it is shown that there are four coinciding spectral peaks in the daily series of the  $K_p$  index of geomagnetic activity and mortality from myocardial infarction. In this case, 3 out of 4 peaks have relaxation times, predicted earlier in heliobiological studies.

*Keywords:* spectral analysis, signal filtration, orthonormal basis generating, heliobiology, geophysics.

*Ожередов Вадим Андреевич* — ведущий математик, кандидат физико-математических наук, ojumail@mail.ru

*Бреус Тамара Константиновна* — главный научный сотрудник, доктор физико-математических наук, breus36@mail.ru

055(02)2

ИКИ РАН  
Москва, 117997, Профсоюзная ул., 84/32

Подписано к печати 14.07.2017 г.

Заказ 4163

Формат 60×84/16

Тираж 50

1,47 усл.-печ. л.