ЭВОЛЮЦИЯ ДЛИННОМАСШТАБНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ СТАЦИОНАРНЫХ КОНВЕКТИВНЫХ МГД СОСТОЯНИЙ

Р.А. Чертовских[1,2], В.А. Желиговский[1,3]

[1]Институт Теории Прогноза Землетрясений
и Математической Геофизики РАН
[2]Технологический Институт Аэронавтики, Бразилия
[3]Университет Ниццы и Софии-Антиполиса, Обсерватория
Лазурного берега, Франция
E-mails: roman@mitp.ru, vlad@mitp.ru

Аннотация. Рассмотрена задача об устойчивости конвективных динамо в плоском вращающемся слое. Изучена эволюция возмущений содержащих большие пространственные и временны́е масштабы стационарных магнитогидродинамических состояний симметричных относительно вертикальной оси. Обсуждаются уравнения, описывающие динамику этих возмущений, и их численные решения.

Свойством магнитных полей Земли и Солнца является иерархия взаимодействующих масштабов. Прямое численное моделирование конвективных динамо в астрофизических объектах затруднено необходимостью использования огромных вычислительных ресурсов для разрешения всех масштабов задачи. Поэтому необходимо совместное использование численных и аналитических подходов. Первой попыткой разрешения сложности, связанной с многомасштабностью земного магнетизма, была сделана в теории средних полей [1], в которой постулируется линейная зависимость средней электродвижущей силы от среднего магнитного поля. В данной работе рассматривается задача об устойчивости с двумя масштабами без использования каких-либо эмпирических условий для замыкания уравнений.

Изучается задача о нелинейной устойчивости конвективных МГД состояний, в которой в возмущении отсутствует полная иерархия масштабов. Мы используем осреднение уравнений для разделения коротко- и длинномасштабной динамики. Уравнения, описывающие длинномасштабные возмущения (амплитудные уравнения) короткомасштабных состояний выведены из основных уравнений магнитной гидродинамики.

Рассматривается плоский горизонтальный слой жидкости, проводящей электрический ток. Слой подогревается снизу и вращается с постоянной скоростью вокруг вертикальной оси. На горизонтальных границах слоя поставлены условия свободной границы, идеального электрического проводника и постоянной температуры. Все поля периодичны с периодом L по горизонтальным направлениям. Магнитное поле генерируется конвекцией Рэлея-Бенара.

МГД система описывается следующими уравнениями:

$$\begin{gathered}\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} = P\nabla^2\boldsymbol{V} + \boldsymbol{V}\times(\nabla\times\boldsymbol{V}) - \boldsymbol{H}\times(\nabla\times\boldsymbol{H}) + PRa\Theta\boldsymbol{e}_3 \\ +P\sqrt{Ta}\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{e}_3 - \nabla P, \\ \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = \frac{P}{P_m}\nabla^2\boldsymbol{H} + \nabla\times(\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{H}), \\ \frac{\partial \Theta}{\partial t} = \nabla^2\Theta - (\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\Theta + V_3, \\ \nabla\cdot\boldsymbol{V} = \nabla\cdot\boldsymbol{H} = 0.\end{gathered} \tag{1}$$

Здесь $\mathbf{V}(\mathbf{x},t) = (V_1, V_2, V_3)$ скорость течения жидкости, $\mathbf{H}(\mathbf{x},t)$ магнитное поле, $\Theta(\mathbf{x},t)$ разность температуры и ее линейного профиля, $P(\mathbf{x},t)$ модифицированное давление, Ra число Рэлея, P число Прандтля, P_m магнитное число Прандтля, Ta число Тейлора, t время, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ и $\mathbf{e}_3$ вертикальный единичный вектор.

Рассматриваем возмущаемое состояние $\mathbf{W}(\mathbf{x}) = (\mathbf{V}, \mathbf{H}, \Theta, P)$, которое принадлежит ветви (параметризованной Ta) стационарных аттракторов системы (1) для $L = 2\sqrt{2}$, $P = 1$, $Ra = 2300$, $P_m = 8$ и $Ta = 674 - 704$, описанной в [2] (ветвь $\mathrm{S}_8^{\mathrm{R1}}$). Характерные пространственные и временны́е масштабы возмущения предполагаются существенно превосходящими масштабы возмущаемого (короткомасштабного) состояния. Определяем длинномасштабные (также называемые медленными) пространственную $\mathbf{X} = \varepsilon(x_1, x_2)$ и временну́ю $T = \varepsilon^2 t$

переменные, где отношение масштабов ε — малый параметр. Предполагаем, что амплитуда возмущения порядка ε. Возмущенное состояние $\mathbf{W} + \varepsilon\mathbf{w}$ удовлетворяет системе уравнений (1), это определяет нелинейную систему уравнений для $\mathbf{w}$. Возмущение ищем в форме степенного ряда $\mathbf{w} = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{w}_i \varepsilon^i$ для коэффициентов $\mathbf{w}_i$, для которых получаем иерархию систем уравнений, которые последовательно решаем. Уравнения, описывающие динамику $\mathbf{w}_0$, усредненного по коротким масштабам, выводим из условий разрешимости (т.е. условий ортогональности правой части уравнений вида $\mathcal{L}\mathbf{u} = \mathbf{f}$ ядру оператора, сопряженного к $\mathcal{L}$) для системы уравнений при ε^2.

При ε^0 (первая система уравнений в иерархии) имеем задачу о ядре оператора линеаризации $\mathcal{L}$ системы (1) в окрестности возмущаемого состояния $\mathbf{W}$. Ядро оператора четырехмерно и первый член в разложении возмущения имеет вид $\mathbf{w}_0 = \sum_{k=1}^{4} c_{0k}(\mathbf{X}, T)\mathbf{S}_k(\mathbf{x})$, где $\mathbf{S}_k(\mathbf{x}) \in \ker \mathcal{L}$, $k = 1 - 4$. Нормализуем нейтральные моды $\mathbf{S}_k$ так, что $\langle \mathbf{S}_k^h \rangle_h = \mathbf{e}_k, \langle \mathbf{S}_k^v \rangle_h = \sum_{m=1}^{2} a_{mk}\, \mathbf{e}_m$ для $k = 1{,}2$ и $\langle \mathbf{S}_k^v \rangle_h = \langle \mathbf{S}_k^h \rangle_h = 0$ для $k = 3{,}4$. Здесь $\langle\cdot\rangle_h$ обозначает среднее по короткомасштабным переменным горизонтальной компоненты поля. Ниже приведена схема вывода системы уравнений для амплитуд $c_{0k}(\mathbf{X}, T)$ и обсуждены ее численные решения.

Соленоидальность $\langle \mathbf{v}_0 \rangle_h$ и $\langle \mathbf{h} \rangle_h$ по медленным переменным влечет представление $(c_{01}, c_{02}) = \mathbf{q}^{\perp} C(T, Y)$, где $C(T, Y)$ скалярная функция, $Y = q_1 X_1 + q_2 X_2$, а $\mathbf{q} = (q_1, q_2)$, $\mathbf{q}^{\perp} = (q_2, -q_1)$, $|\mathbf{q}| = 1$ такие, что $(\mathbf{A}\mathbf{q}^{\perp} \cdot \mathbf{q}) = 0$, $\mathbf{A} = \{a_{mk}\}$. (В этом состоит существенное отличие от теории, описанной в [3](глава 9), где предполагается условие $\langle \mathbf{v}_0 \rangle_h = 0$, которое выполняется, если, например, $\mathbf{W}$ обладает подходящей симметрией.)

Усредняя по короткомасштабным переменным уравнения при ε^1, получаем уравнения, содержащие операторы комбинированного кинематического и магнитного α —эффекта. Поскольку рассматриваемое возмущаемое состояние симметрично относительно вертикальной оси, α —эффект отсутствует и условия разрешимости выполнены автоматически.

Условия разрешимости для уравнений при ε^2 определяют следующую систему уравнений для амплитуд $C(T, Y), c_{03}(T, Y)$ и $c_{04}(T, Y)$:

$$\frac{\partial C}{\partial T} = \alpha \frac{\partial^2 C}{\partial Y^2} + \beta \frac{\partial (C^2)}{\partial Y} + \sum_{k=3}^{4} \xi_k \frac{\partial^2 c_{0k}}{\partial Y^2},$$

$$\varphi \frac{\partial C}{\partial T} + \sum_{k=3}^{4} \psi_k \frac{\partial c_{0k}}{\partial T} = \alpha' \frac{\partial^2 C}{\partial Y^2} + \beta' \frac{\partial (C^2)}{\partial Y} + \sum_{k=3}^{4} \gamma'_k \frac{\partial (C\, c_{0k})}{\partial Y}$$

$$+ \sum_{m=3}^{4} \sum_{k=3}^{4} \delta'_{mk} \frac{\partial (c_{0m} c_{0k})}{\partial Y} + \sum_{k=3}^{4} \xi'_k \frac{\partial^2 c_{0k}}{\partial Y^2} + \sigma C^3, \qquad (2)$$

$$0 = \alpha'' \frac{\partial^2 C}{\partial Y^2} + \beta'' \frac{\partial (C^2)}{\partial Y} + \sum_{k=3}^{4} \gamma''_k \frac{\partial (C\, c_{0k})}{\partial Y}$$

$$+ \sum_{m=3}^{4} \sum_{k=3}^{4} \delta''_{mk} \frac{\partial (c_{0m} c_{0k})}{\partial Y} + \sum_{k=3}^{4} \xi''_k \frac{\partial^2 c_{0k}}{\partial Y^2}.$$

Постоянные коэффициенты системы (2), $\alpha^{\cdot}, \beta^{\cdot}, \gamma_{\cdot}^{\cdot}, \delta_{\cdot}^{\cdot}, \xi_{\cdot}^{\cdot}, \varphi, \psi_{\cdot}$ и σ, вычисляются из решений эллиптических задач в коротомасштабных переменных, решенные численно стандартными псевдоспектральными методами [4] и модификацией стабилизированного метода бисопряженных градиентов [5] с предобуславливанием.

Для возмущаемого состояния, отвечающего $Ta = 675$ и в предположении периодичности амплитуд по Y с периодом 2π, получены следующие результаты. Решение $C \equiv c_{03} \equiv c_{04} \equiv 0$ системы уравнений (2) линейно устойчиво. При численном интегрировании системы для различных начальных данных обнаружены следующие типы поведения решений во времени:

i) релаксация к тривиальным (независящим от Y) стационарным состояниям;

ii) устойчивые бегущие волны (см. Рис. 1);

iii) быстро растущие (вероятно, неограниченно) по амплитуде. В настоящее время авторы проводят детальный анализ решений этого типа.

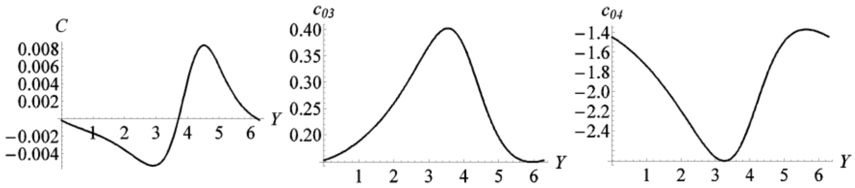

Рисунок 1. Решение системы (2) типа бегущей волны для возмущаемого состояния, отвечающего аттрактору при $Ta = 675$. Показан профиль бегущей волны.

Литература

1. Krause F. and Rädler K.H. *Mean-field magnetohydrodynamics and dynamo theory*. Oxford, Pergamon Press, 1980.
2. Chertovskih R., Gama S.M.A., Podvigina O., Zheligovsky V. Dependence of magnetic field generation by thermal convection on the rotation rate: a case study. *Physica D*, **239**, 2010, 1188-1209.
3. Zheligovsky V.A. *Large-scale perturbations of magnetohydrodynamic regimes: linear and weakly non-linear stability theory*. Lecture Notes in Physics, Springer-Verlag, Heidelberg, 2011.
4. Boyd J.P. *Chebyshev and Fourier Spectral Methods*, Dover, 2001.
5. Sleijpen G.L.G. and Fokkema D.R. BiCGstab(ℓ) for linear equations involving matrices with complex spectrum, *ETNA*, **1**, 1993, 11-32.