ОБРАЗОВАНИЕ СТРУКТУР И ПРОИЗВЕДЕНИЕ СЛУЧАЙНЫХ МАТРИЦ

Е.А.Илларионов, Д.Д.Соколов

Московский государственный университет
egor.mypost@gmail.com, sokoloff.dd@gmail.com

Аннотация. Многие результаты об образовании структур в случайных средах, например, о развитии перемежаемости магнитного поля при работе динамо в случайном потоке несжимаемой жидкости, существенно опираются на изучение поведения произведения большого числа независимых случайных матриц. С точки зрения теории вероятностей речь идет о матричном мультипликативном аналоге центральной предельной теоремы. Разработка этого раздела теории вероятностей была начата в 60-ые годы прошлого столетия Ферстенбергом, по имени которого и принято называть раздел. Применение теории Ферстенберга в физике существенно ограничивалось тем, что представляющие интерес для физики величины (например, показатели Ляпунова) в рамках этой теории выражались через некоторую стандартную функцию (инвариантную меру), для которой было выписано некоторое интегральное уравнение, однако не было предложено эффективных методов решения этого уравнения. Явно это уравнение решается только в исключительных случаях. К настоящему времени методы численного решения уравнения для инвариантной меры удалось развить. Мы представляем их на примере одного из простейших, но физически осмысленных уравнений – уравнения Якоби со случайной кривизной. Это уравнение описывает один из тонких космологических эффектов, отмеченных в свое время Я.Б.Зельдовичем.

Пусть вселенная пространственно однородна и ее пространственная кривизна равна $\overline{K}$. В принципе, эту кривизну можно найти из данных астрономических наблюдений рассматривая связь между расстоянием до стандартного источника света и угловым размером этого источника. Зельдович [1] обратил внимание на то, что во вселенной, однородной лишь в среднем, а среднее значение ее пространственной кривизны равно $\bar{K}$, те же самые наблюдательные тесты дадут в качестве кривизны величину, которая систематически меньше $\bar{K}$. Иными словами, флуктуации плотности приводят к тому, что вселенная кажется более гиперболической. Этот эффект очень небольшой количественно и не стоит в центре современных исследований в космологии, тем не менее он является хорошей моделью того, как развиваются неустойчивости в случайной среде.

Пусть $\gamma(\theta)$ семейство геодезических линий на римановом многообразии, причем все эти геодезические проходят через некоторую точку P, а x – расстояние вдоль геодезической от точки P. В космологических тестах исследуется поведение такого семейства геодезических вблизи базовой геодезической, соответствующей значению $\theta = 0$. Для простоты достаточно ограничиться случаем двух пространственных измерений. Тогда величина

$$y(x) = \left.\frac{\partial y(x,\theta)}{\partial\theta}\right|_{\theta=0}, \qquad (1)$$

называемая полем Якоби, или геодезическим отклонением, удовлетворяет т.н. уравнению Якоби

$$y'' + K(x)y \qquad (2)$$

Здесь производные берутся по *x*, а *K(x)* – гауссова кривизна в *x*. Классические космологические тесты основаны на том, что для отрицательной кривизны y экспоненциально растет с x, при нулевой кривизне этот рост линеен, а при положительной кривизне y – осциллирующая функция x .

Зельдович догадался, что если *K(x)* представляет собой случайный процесс с нулевым средним значением, y все равно растет экспоненциально за счет флуктуаций кривизны, так что наблюдателю кажется, что эффективное значение кривизны отрицательно. Более того, он понял, что этот рост является перемежаемым, так что статистические моменты растут быстрее самой величин y. Мы кратко покажем, как эта задача сводится к изучению произведения случайных матриц.

Пусть для простоты случайный процесс *K(x)* принимает постоянные значения K_n в интервалах между точками *x=(n-1)l* и

$x=nl$, где величина l может быть названы шкалой памяти процесса. Значения K_n предполагаются независимыми и одинаково распределенными. Вводя двумерную вектор-строку $z=(y,\ ly')$ можно перейти к системе линейных уравнений, которые на каждом интервале $((n-1)l,nl)$ имеют постоянные коэффициенты. В таком случае решение в точке n легко выражается через произведение фундаментальных матриц на каждом интервале.

Итак, задача о поведении геодезических отклонений свелась к вычислению произведения независимых случайных матриц. Ее можно рассматривать как некоторое обобщение закона больших чисел и центральной предельной теоремы. В теории вероятностей этот вариант центральной предельной теоремы был впервые изучен Ферстенбергом [2], а затем его результаты были развиты Тутубалиным [3].

В условиях нашей задачи результаты Ферстенберга-Тутубалина можно сформулировать следующим образом. Рассмотрим действие произведения матриц $B(n) = \widehat{B_1}\widehat{B_2}\dots\widehat{B_n}$ на единичной окружности со склеенными диаметрально противоположными точками (PR^1). Вследствие независимости матриц $\widehat{B_\iota}$ полученная последовательность является цепью Маркова. Для широкого класса распределений матриц $\widehat{B_\iota}$ эта цепь является эргодической и показатель Ляпунова (скорость роста решения) строго положителен. Точное значение показателя Ляпунова можно найти из стационарного распределения, к которому сходится всякая эргодическая цепь Маркова: $\lambda = \mathrm{E}\|wB\|$, где распределение конца единичного вектора w совпадает со стационарным распределением, а распределение матрицы B с любой из матриц B_i. По этому распределению могут быть вычислены и точные значения скоростей роста моментов поля: $\gamma_p = \frac{1}{\mathrm{p}}\mathrm{E}\log\|wB\|^p$.

Вся трудность задачи по нахождению стационарной плотности заключается в вычислении переходной плотности рассматриваемой цепи Маркова. Отметим, что до самого последнего времени не предпринималось попыток численного решения подобной задачи.

Детали вычисления переходной плотности описаны в работах Илларионова и др. [4], [5], а проведение расчетов потребовало использования суперкомпьютера МГУ. Суть в том, что потребовалось найти обратное отображение к семейству функций, вид которых оказался достаточно сложным и богатым на особенности. Полученная в результате переходная плотность оказалась к тому же быстро меняющейся функцией, что потребовало использования сетки с большим числом узлов и использования серьезных вычислительных ресурсов.

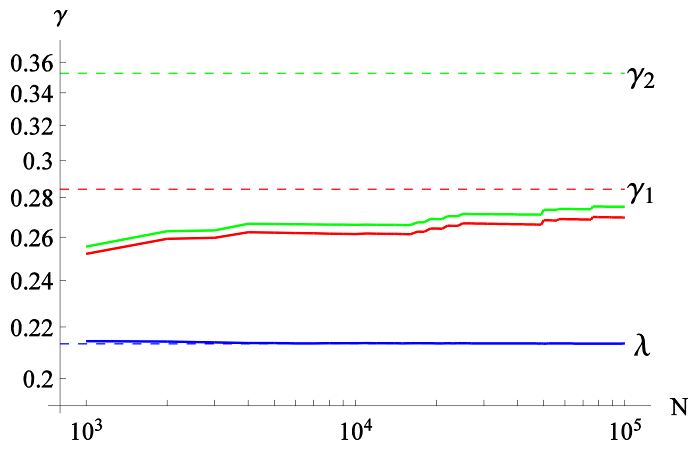
Явный вид стационарной плотности при различных вариантах распределения *K* также представлен в работах [4], [5].

Обратимся к конкретным значениям показателя Ляпунова и моментам старших порядков, вычисленным по полученному распределению для случая *K*, равномерно распределенного на отрезке [-1,1].

Таблица 1: Показатели Ляпунова и скорости роста моментов.

λ	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4
0.2132	0.2843	0.3526	0.4154	0.4708

Из таблицы видно, что действительно имеет место явление перемежаемости: старшие моменты возрастают с увеличением номера момента. Во-вторых, сопоставляя значение показателя Ляпунова с оценкой в работе Михайлова и др. [7], вычисленной путем усреднения больного числа реализаций поля Якоби, обнаруживается высокая степень совпадения результатов для показателя Ляпунова. Так, решения, получаемые путем перемножения матриц, дали значение λ=0.2131, методом усреднения большого числа реализаций λ =0.2133. К сожалению, на этом возможности подобного статистического подхода исчерпываются, что наглядно продемонстрировано на следующем рисунке.



Здесь по горизонтали отложен объем выборки, а графики изображают значения показателя Ляпунова и старших моментов, вычисляемых по данному числу реализаций. Пунктирными линиями отмечены значения показателя Ляпунова и старших моментов, посчитанных по инвариантной мере. С одной стороны, мы видим, что даже относительно небольшая выборка (N=10^3) дает хорошую точность оценки показателя Ляпунова, и дальнейшее увеличение объема выборки на нее уже не влияет. С другой стороны, хотя с увеличением N первый момент приближается к своему точному значению, однако даже при очень больших N остается еще достаточно далеко от него. Для момента второго порядка ситуация оказывается еще хуже. Заметим, что неограниченно увеличивать объем выборки не удастся, поскольку большинство существующий генераторов псевдослучайных чисел имеют конечную длину периода.

Список литературы:

1. *Zeldovich Ya. B., Ruzmaikin A. A., Molchanov S. A., Sokoloff, D. D.* Kinematic dynamo problem in a linear velocity field. J. Fluid Mech. 1984. 144. 1–11

2. *Furstenberg H.* Noncommuting random products. // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. 108. 377–428.

3. *Tutubalin V.N.* A central limit theorem for products of random matrices and some of its applications. Symposia Mathematica. 1977. XXI. 101–116.
4. *Илларионов Е.А., Соколов Д.Д., Тутубалин В.Н.* Стационарное распределение произведения матриц со случайными коэффициентами. Вычислительные методы и программирование. 2012. Т. 13. 218–225.
5. *Илларионов Е.А.* Стационарное распределение для уравнения Якоби с большим случайным параметром кривизны. 2012. Т. 13. 218–225.
6. *Михайлов Е.А., Соколов Д.Д., Тутубалин В.Н.* Фундаментальная матрица для уравнений Якоби со случайными коэффициентами. Вычислительные методы и программирование. 2010. Т. 11. 261–268.