

КОНВЕКТИВНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ОБЛАЧНОЙ СРЕДЫ

Б.Я. Шмерлин, М.Б. Шмерлин

ФГБУ “НПО “Тайфун”, г. Обнинск
E-mail: shmerlin@rpatyphoon.ru

Аннотация. В постановке, максимально приближенной к постановке классической задачи Рэлея, рассмотрена задача о конвективной неустойчивости насыщенного водяным паром слоя атмосферы, содержащего конечную по горизонтали область, заполненную облачной средой. Конвективные движения в облачной среде и во влажном насыщенном воздухе сопровождаются выделением (поглощением) скрытой теплоты конденсации. Построены экспоненциально растущие со временем локализованные решения задачи, пространственная структура которых определяется горизонтальным размером области, заполненной облачной средой. Они могут соответствовать формированию облачных кластеров как с восходящими, так и с нисходящими движениями в центре, а также формированию смерчей и “глаза бури” в тропических циклонах.

1. Введение

В исследованиях динамики влажной конвекции используют упрощенный подход, основанный на включении в уравнения конвекции объемного конденсационного источника тепла. При этом возможны две ситуации. Для описания одной из них используются модели с выпадением всей сконденсировавшейся влаги в виде осадков (precipitation convection). Во втором случае используются модели конвекции без выпадения осадков (nonprecipitation convection), в которых сконденсировавшаяся влага в виде взвешенных облачных капель формирует облачную среду. Разница заключается в том, что в первом случае конденсационный источник тепла считается пропорциональным вертикальной скорости на восходящей ветви циркуляции в силу конденсации избытка водяного пара, а на нисходящей ветви циркуляции обращается в нуль в силу отсутствия поглощения тепла на испарение капель. Во втором случае конденсационный источник в

пределах облачной среды в силу испарения капель при нисходящих движениях пропорционален вертикальной скорости независимо от ее знака. За пределами облачной среды в насыщенной водяным паром атмосфере поглощение тепла на нисходящей ветви циркуляции отсутствует.

Ранее для случая конвекции с выпадением осадков нами был предложен подход, позволивший исследовать проблему конвективной неустойчивости насыщенного водяным паром слоя атмосферы аналитическими методами [1,2]. Было обнаружено принципиальное отличие такой конвекции от конвекции Рэля. Оно связано со структурой возмущений, развивающихся при потере устойчивости. В частности, были установлены условия, при которых наибольшей скоростью роста обладают осесимметричные локализованные вихри с восходящими движениями на оси со структурой урагана на ранней стадии развития.

Поглощение тепла конденсации на испарение капель облачной среды при нисходящих движениях в пределах облачного пятна будет усиливать возникающие нисходящие движения. Это должно привести к качественному изменению пространственной структуры наиболее неустойчивых возмущений по сравнению с [1,2]. Ниже соответствующая задача рассмотрена в простейшей двумерной постановке, когда нет зависимости от одной из горизонтальных координат (координаты y). Кроме того, мы используем приближение гидростатики, и для простоты будем рассматривать задачу без вращения.

2. Постановка задачи

Рассматривается слой вязкой теплопроводной насыщенной водяным паром атмосферы толщины h , заключенный между двумя твердыми горизонтальными границами, содержащий конечную по горизонтали область $-x^* \leq x \leq x^*$, заполненную облачной средой. Требуется исследовать устойчивость равновесного состояния.

Поведение малых возмущений равновесного состояния описывается системой уравнений, которую будем рассматривать вместе с краевыми условиями Рэля – скольжения и постоянства температуры на горизонтальных границах [1,2]:

$$\mathbf{u}_t = -\nabla p + g\theta \mathbf{k}_z + \mu \mathbf{u}_{xx} + \nu \mathbf{u}_{zz}, \quad \theta_t + \Gamma w = \mu \theta_{xx} + \nu \theta_{zz} + Q,$$

$$u_x + w_z = 0; \quad u_z = v_z = w = \theta = 0, \quad z = 0, h;$$

$$Q = -\alpha_0 \frac{L_v}{C_p} w \frac{ds}{dz} = \alpha_0 (\gamma_a - \gamma_m) w, \quad |x| \leq x^*; \quad \gamma_m = \gamma_a + \frac{L_v}{C_p} \frac{ds}{dz};$$

$$Q = \alpha_0 (\gamma_a - \gamma_m) w \Theta(w), \quad |x| > x^*; \quad \Theta(w) = 1, w > 0; \quad \Theta(w) = 0, w < 0.$$

Здесь Q - интенсивность конденсационного источника тепла, физический смысл которого пояснен выше. Ввиду ограниченности объема статьи, за разъяснением остальных обозначений отсылаем читателей к [2]. В квазистатическом приближении, рассматриваемом в работе, проекция уравнения для импульса на вертикальную ось заменяется уравнением гидростатики $p_z = g\theta$.

Система уравнений с краевыми условиями допускает разделение переменных. Будем искать решение в виде

$$(u, v, p), (w, \theta, Q) = \{(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{p}) \cos(\pi z / h), (\tilde{w}, \tilde{\theta}, \tilde{Q}) \sin(\pi z / h)\} e^{\kappa t},$$

где волной отмечены амплитуды, не зависящие от z, t . После обезразмеривания в соответствии с [2] (в частности, координата x обезразмерена на масштаб $\sqrt{\mu/\nu}(h/\pi)$), получаем систему уравнений для амплитуд, зависящую от трех безразмерных параметров:

числа Рэлея $R = \frac{g\alpha_0(\gamma_a - \gamma)h^4}{\pi^4 \mu \nu}$, числа,

характеризующего интенсивность конденсационного

тепловыделения $R_m = \frac{g\alpha_0(\gamma_a - \gamma_m)h^4}{\pi^4 \mu \nu}$ и безразмерной скорости

роста возмущений $\sigma = \kappa h^2 / (\pi^2 \nu)$.

3. Вспомогательная задача

Будем рассматривать локализованные возмущения, для которых амплитуда вертикальной скорости $\tilde{w}(x)$ симметрична относительно начала координат $x = 0$, конечное число раз меняет знак в области локализации в окрестности $x = 0$ и отрицательна при всех $|x| \geq x_0$, где x_0 соответствует точке последней смены знака $\tilde{w}(x)$. Пусть для этих возмущений интенсивность

тепловыделения $Q = \alpha_0(\gamma_a - \gamma_m)w$ при $|x| \leq x_0$ и $Q = 0$ при $|x| \geq x_0$. По аналогии с [1,2], амплитуда вертикальной скорости $\tilde{w}(x)$ таких возмущений удовлетворяет интегральному уравнению

$$\tilde{w}(x) = R_m \int_{|x'| \leq x_0} G(x-x') \tilde{w}(x') dx',$$

где функция Грина точечного источника тепла имеет вид:

$$G(x) = \frac{1}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} (\lambda_1 \exp(-\lambda_1|x|) - \lambda_2 \exp(-\lambda_2|x|)),$$

$$\lambda_{1,2}^2 = 1 + \sigma + R/2 \pm \sqrt{R^2/4 + R(1 + \sigma)}.$$

В интегральном уравнении x_0 заранее неизвестно, и удовлетворяет условию $\tilde{w}(x_0) = 0$. Далее будем рассматривать случай $R \geq 0$, соответствующий локализованной в окрестности точечного источника тепла функции Грина.

Задача имеет множество решений, соответствующих различным значениям чисел n, m , которые назовем модами:

$$x_0^{n,m} = \frac{\pi(n+m)}{\sqrt{R_m - R}} = (n+m)x_0^*, \quad x_0^* = \frac{\pi}{\sqrt{R_m - R}}, \quad n \geq 0, m > n.$$

Из всех мод с одинаковым значением n наибольшей скоростью роста обладают моды с номерами $m = n + 1$. С увеличением n скорость роста таких мод возрастает. Далее будем рассматривать только моды с номерами $n, m = n + 1$ и обозначать соответствующую моду одним номером n . Таким образом, $x_0^n = (2n + 1)x_0^*$. Для этих мод

$$\tilde{w}_n(x) = (-1)^n \cos \left[\frac{\pi}{2} (2n + 1) \left(\frac{x}{x_0^n} \right) \right] \cos \left[\left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) \frac{x}{x_0^n} \right], \quad |x| \leq x_0^n,$$

где $0 < \varphi(n, R, R_m) < \pi/2$. В области $|x| > x_0^n$ $\tilde{w}_n(x) < 0$ и экспоненциально затухает на бесконечности. В качестве примера зависимости $\tilde{w}_n(x)$ для первых трех мод приведены на Рис.1.

Каждая из таких мод существует, если $R_m \geq R_m^n$, где R_m^n убывает с ростом номера моды n , $R_m^0 = 6.19$. Для атмосферы $R_m \gg 1$.

Для каждой моды при значениях $R_m \geq R_m^n$ имеется кривая нейтральной устойчивости $R_{crit}^n(R_m)$, соответствующая безразмерной скорости роста моды $\sigma^n = 0$. Безразмерная скорость роста моды меняется от нуля на кривой нейтральной устойчивости до максимального значения $\sigma_{max}^n = R_m/R_m^n - 1$ при $R = 0$. При $R_m \gg 1$ $R_{crit}^0 \approx R_m \left[1 - (\pi/R_m)^{2/3} \right]$ для $n = 0$, $R_{crit}^n \approx R_m - [n(n+1)]^{-1}$ для $n \geq 1$. Кривые нейтральной устойчивости различных мод изображены на Рис.2.

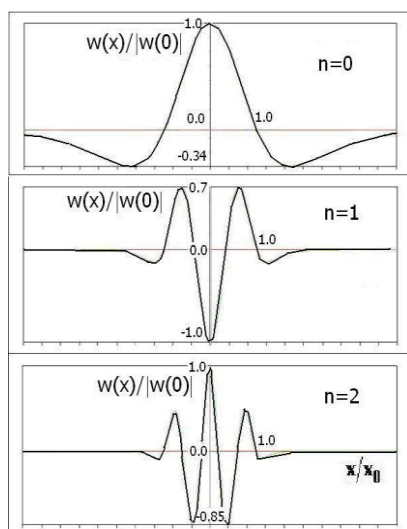


Рис.1. Зависимость $\tilde{w}(x)/|\tilde{w}(0)|$ от x/x_0 для первых трех мод $n = 0, 1, 2$.

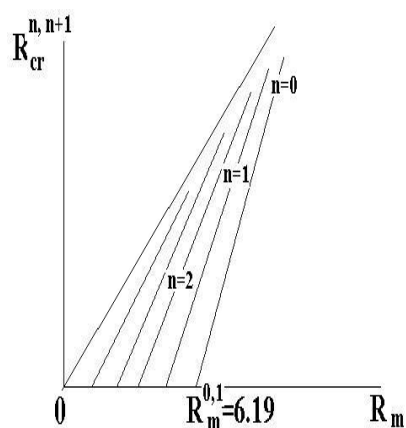


Рис.2. Кривые нейтральной устойчивости различных мод.

4. Решения исходной задачи

Очевидно, мода с номером $n = 0$ является решением исходной задачи, если горизонтальный размер облачной среды заключен в интервале $0 < x^* \leq x_0^*$. Также очевидно, что мода с

номером n является решением исходной задачи, если горизонтальный размер облачной среды заключен в интервале между предпоследним и последним нулями функции $\tilde{w}_n(x)$:

$$[(2n-1)/(2n+1)]x_0^n \leq x^* \leq x_0^n \text{ или } (2n-1)x_0^* \leq x^* \leq (2n+1)x_0^*.$$

Таким образом, значения R_m и R определяют масштаб x_0^* .

Если $0 \leq R \leq R_{\text{crit}}^0(R_m)$, то при всех значениях x^* будет иметь место неустойчивость, а пространственная структура неустойчивого возмущения будет определяться значением x^* в соответствии с приведенным выше неравенством для x^* . Если же $R_{\text{crit}}^{n-1}(R_m) < R < R_{\text{crit}}^n(R_m)$, $n \geq 1$, то при $x^* < (2n-1)x_0^*$ будет иметь место устойчивость, при $x^* \geq (2n-1)x_0^*$ - неустойчивость, и по-прежнему пространственная структура неустойчивого возмущения определяется значением x^* . В случае неустойчивости значениям $x^* = (2n-1)x_0^*$, $n \geq 1$ отвечают два решения - моды с номером n и $n-1$, при этом большей скоростью роста обладает мода с номером n .

Построенные решения являются локализованными в пространстве системами конвективных облачных валов. При наличии вращения в дополнение к полоидальной появляется азимутальная компонента скорости. Как и в [2], в случае осевой симметрии найденным решениям соответствуют полные аналоги, представляющие собой осесимметричные конвективные вихри как с восходящими, так и с нисходящими движениями на оси вихря. В зависимости от анизотропии турбулентного перемешивания (отношения μ/ν), их масштаб меняется от масштаба отдельного конвективного облака (смерча) до масштаба тропического циклона.

Литература

1. Б.Я.Шмерлин, М.В.Калашник, М.Б.Шмерлин. // ЖЭТФ, 2012, т.142, №6(12), с.1265.
2. Б.Я.Шмерлин, М.В.Калашник. // УФН, 2013, т.183, №5, с.497.