

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования «Московский государственный университет имени
М.В. Ломоносова»

Механико-математический факультет

Кафедра теории вероятностей

На правах рукописи

Илларионов Егор Александрович

ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПРОЦЕССОВ И ЯВЛЕНИЙ СОЛНЕЧНОЙ
АКТИВНОСТИ

1.3.1 – Физика космоса, астрономия

Диссертация на соискание ученой степени доктора
физико-математических наук

Москва

2026

Оглавление

Введение	4
1. Обзор существующих подходов	35
2. Оценка параметров роста векторных полей в случайных средах	49
2.1. Модель поля Якоби	51
2.2. Вывод показателя Ляпунова и скоростей роста моментов поля Якоби	54
2.3. Метод оценки скоростей роста статистических моментов векторного поля в модели с обновлениями	61
2.4. Изотропная модель магнитного поля в случайной среде . . .	65
2.5. Анизотропная модель магнитного поля в случайной среде .	72
2.6. Сопоставление с короткокоррелированным приближением .	80
2.7. Обобщение на случай смеси гауссовских распределений . . .	84
2.8. Выводы	87
3. Оценка параметров динамо-моделей с помощью нейродифференциальных уравнений	92
3.1. Нейродифференциальные уравнения	93
3.2. Нейродифференциальная модель динамо	97
3.3. Синтетические эксперименты	100
3.4. Средний профиль солнечного цикла	108
3.5. Выводы	110

4. Сегментация активных областей на изображениях солнечного диска	114
4.1. Набор данных	114
4.2. Модель сегментации корональных дыр на изображениях солнечного диска	133
4.3. Анализ результатов сегментации корональных дыр	143
4.4. Задача сегментации корональных дыр на синоптических картах	160
4.5. Построение каталога синоптических карт	162
4.6. Модель сегментации корональных дыр на синоптических картах	169
4.7. Анализ каталога синоптических карт корональных дыр . . .	170
4.8. Сопоставление с методом пороговой сегментации	177
4.9. Выводы	181
5. Параметрическое описание структуры активных областей	192
5.1. Каталог групп солнечных пятен	193
5.2. Постановка задачи понижения размерности данных	195
5.3. Модель параметризации групп пятен	197
5.4. Исследование структуры пространства параметров, связь с физическими параметрами	202
5.5. Оценка сложности активных областей	212
5.6. Модель классификации групп пятен	214
5.7. Другие приложения моделей понижения размерности	216
5.8. Выводы	230
6. Восстановление параметров солнечной активности по архивным данным	235
6.1. Оцифровка каталогов Цюрихской обсерватории	236
6.1.1. Процедура автоматического распознавания рукописных каталогов Цюрихской обсерватории	240
6.1.2. Настройка базовой модели распознавания рукописного текста	241
6.1.3. Адаптивная модель распознавания рукописного текста	251

6.1.4.	Широтно-временные диаграммы пятен, факелов и протуберанцев	254
6.1.5.	Выводы	260
6.2.	Восстановление гелиографических координат солнечных пя- тен в период минимума Дальтона	266
6.2.1.	Структура каталогов и методики наблюдений О. Фло- жержа	266
6.2.2.	Восстановление координат в прямоугольной сетке . . .	269
6.2.3.	Восстановление координат в косой сетке	276
6.2.4.	Восстановление координат в ромбической сетке	282
6.2.5.	Восстановление координат пятен на основе наблюде- ний солнечных затмений	287
6.2.6.	Оценка точности измерений	296
6.2.7.	Выводы	297
7.	Заключение	312
	Библиография	319

Введение

Принято считать, что первые регулярные наблюдения за солнечной активностью (солнечными пятнами), проводимые в научных целях, были начаты Г. Галилеем в начале 17 века. К сегодняшнему дню накоплен ряд данных продолжительностью более 400 лет, что является уникальным для научных измерений в целом. Относительно регулярные наблюдения в прошлом перешли сегодня в практически непрерывный мониторинг Солнца, проводимый спутниковыми и наземными телескопами. Современные наблюдения ежедневно формируют поток данных, объем которого соответствует десяткам лет исторических наблюдений.

Большой временной охват данных и высокая пространственно-временная детализация, достигнутая к сегодняшнему дню, дает основу для проведения разнообразных статистических исследований и сопоставления результатов с теоретическими моделями. Однако на практике анализ наблюдательных данных существенно затрудняется рядом факторов.

Прежде всего, поскольку речь идет об анализе сложных структур и процессов, требуется выработка способа представления этих объектов более компактным образом, при этом сохраняющем ключевую информацию об объекте. В качестве наглядного примера можно привести изображение группы солнечных пятен, которая обладает сложной геометрической структурой. Ее можно пробовать описать, например, количеством пятен, ядер, и размерами по широте и долготе, однако очевидно, что такое описание передает лишь наиболее общие свойства и теряет детали, которые могут быть важны для приложений. В частности, такое описание не позволяет восстановить исходный образ группы.

При анализе многолетних рядов данных возникает естественная пробле-

ма согласования неоднородных данных. За 400 лет происходила эволюция представлений о том, что и как следует наблюдать, сменялись наблюдатели и совершенствовалась техника. Как пример, индекс числа солнечных пятен (Sunspot number), составленный из отдельных серий, подвергается периодическим пересмотрам и вопрос методологии продолжает оставаться дискуссионным.

Существенной проблемой является доступность и полнота исторических данных. Большой пласт архивных данных представлен лишь в бумажных каталогах, а многое из того, что удалось отсканировать в электронный вид, для систематического анализа требует проведения трудоемкой процедуры оцифровки текста и зарисовок. Ситуация осложняется и тем, что многие важные детали методик нам неизвестны, и оцифровка является одновременно этапом реконструкции.

Хотя современные наблюдательные данные сразу представлены в цифровом виде и значительно более однородны (с учетом, однако, проблемы деградации измерительных приборов), тем не менее нельзя сказать, что они систематически изучены. Большой физический объем данных ограничивает возможности их полного исследования, и на практике приходится ограничиваться лишь существенно прореженной подвыборкой. Тем самым, задача обработки и извлечения полезной информации из больших массивов данных является вызовом для современной науки и вычислительных технологий. Перспективным инструментом анализа становятся современные методы машинного обучения, показавшие свою эффективность в ряде других областей. Более подробно эти вопросы обсуждаются в первой части диссертации, посвященной обзору текущего состояния исследований.

Конечно, информация, полученная из наблюдений, составляют лишь часть физики Солнца. Современная физика Солнца развивается в результате объединения наблюдательных данных, теорий, численного и лабораторного эксперимента. Численное моделирование является важной частью проверки теорий и порой заменяет собой данные, которые нет возможности наблюдать. Однако и его возможности небезграничны. Дело в том, что ряд важных, например, для теории динамо, показателей получается как предельные (по времени) выражения, усредненные по ансамблю реализаций.

Объем реализаций, необходимый для приближения к точному результату, на практике бывает сложно оценить. Более того, для систем, в которых присутствуют эффекты перемежаемости, т.е. маловероятных, но экстремальных реализаций, значимо влияющие на статистические свойства, это число может превосходить доступные вычислительные возможности. Отсюда вытекает актуальная для современной физики Солнца задача – развитие аналитическим методов оценки предельных статистических свойств и их сопоставление с численными оценками. Этому вопросу будет посвящена вторая часть диссертационной работы. Основным вопросом станет оценка скорости роста магнитного поля, магнитной энергии и, в общем случае, старших статистических моментов магнитного поля в случайном потоке проводящей среды. Разработка метода получения оценок начнется с рассмотрения более простого примера, возникшего из работ Я.Б. Зельдовича, при этом сохраняющего черты более сложных систем.

При дальнейшем сопоставлении моделей динамо и наблюдательных данных встает вопрос о выборе конкретных значений и форме функциональных зависимостей, входящих в динамо-модели. Так, одной из центральных проблем в теории динамо среднего поля является выбор вида функции подавления альфа-эффекта. Далеко не однозначным является и вопрос о том, что именно следует использовать в качестве наблюдаемого эквивалента решениям, получаемым из динамо-моделей. Как следствие, методы численного оценивания на основе наблюдательных данных заменяются феноменологическими аргументами, которые иногда дополняются некоторым перебором по пространству возможных параметров для поиска наилучшего согласия. Современные методы машинного обучения позволяют вывести этот процесс на качественно новый уровень. Замена неизвестных функциональных зависимостей в системах дифференциальных уравнений на нейронные сети приводит к так называемым нейродифференциальным уравнениям, для которых ставится задача оптимизации функционала, построенного на решении этой системы. В частности, задача может быть сформулирована как максимизация соответствия решения системы и наблюдательных данных. Используя методы градиентной оптимизации, подбираются оптимальные параметры модели. Во третьем разделе диссер-

тации исследуется приложение метода нейродифференциальных уравнений для калибровки маломодовых динамо-моделей на основе многолетнего наблюдательного ряда по солнечной активности.

Анализ наблюдательных данных, в сравнении с данными, полученными численным моделированием, содержит дополнительный этап, связанный с обработкой исходных данных. Например, для подсчета числа Вольфа необходимо на изображениях диска Солнца выделить солнечные пятна, а для многих моделей прогноза космической погоды – корональные дыры. Практика показывает, что результат обработки имеет решающее значение для последующих выводов. Доступные методы можно разделить на ручные и автоматические. В первом случае результат будет напрямую зависеть от эксперта, проводящего обработку данных. Поддержание многолетней однородности получаемых рядов является чрезвычайно трудоемкой задачей, и успех в реализации этой программы удавалось достичь, в ограниченном объеме, лишь нескольким наблюдательным центрам. В связи с этим предпринимались неоднократные попытки автоматизировать данные процедуры.

Несмотря на все разнообразие предложенных ранее автоматических процедур, трудно выделить те, которые были бы приняты однозначно. Разумеется, изучение разных подходов необходимо для выявления наиболее перспективных идей, однако когда необходимо произвести конкретные расчеты на основе параметров активных областей, выясняется, что в зависимости от метода обработки, параметры могут различаться в несколько раз. Проблема усугубляется еще и тем, что измерительные приборы со временем деградируют, и для тех из них, что находятся на орбите, калибровка или оценка степени деградации затруднена. Поскольку большинство стандартных моделей и алгоритмов обработки опирается на предположение об однородности данных, для них требуется либо регулярная перенастройка, либо специфическая нормировка данных. Разнообразие способов решения этих вопросов также сказывается на том, что конечные параметры активных областей допускают широкий диапазон. Во многом в силу этих причин ручная обработка данных продолжает считаться эталонной, а задачей для исследователей является разработка методов, способных воспроизводить

работу экспертов-наблюдателей. Этому вопросу будет посвящен четвертый раздел диссертации.

Интересно отметить, что характерные черты проблем и задач, упомянутых выше, встречаются и в совершенно других областях науки. Пожалуй, ярким примером служит вопрос перевода текстов с одного языка на другой. Профессиональный перевод является эталоном, и целью машинного перевода является приближение к эталону. Долгое время развитие машинного перевода шло путем наращивания объема и сложности правил про каждый из языков. В прошлом десятилетии подход принципиально изменился и основой машинного перевода стали модели машинного обучения. В результате качество перевода существенно повысилось и стало вплотную приближаться к профессиональному. Аналогичные примеры успешного применения машинного обучения есть и в других областях, что подтверждает потенциал данного подхода и интерес к его изучению.

Идея моделей машинного обучения состоит в том, что вместо построения алгоритма (программы) через набор явных решающих правил, задается достаточное широкое параметрическое семейство функций и производится подбор оптимальных параметров так, чтобы минимизировать функцию ошибки, вычисляемую на наборе данных. Соответственно, если при построении набора явных правил успех в первую очередь зависит от того, насколько получится сформулировать такой набор правил, то при использовании машинного обучения на первый план выходит объем данных, возможность выбранного параметрического семейства функций описывать сложные зависимости и то, насколько выбранная функция ошибки соответствует сути решаемой задачи. Хотя составление функции ошибки является непростой задачей, однако в ряде случаев сформулировать критерии успеха оказывается проще, чем явным образом формулировать правила действий. В частности, к этой группе относятся многие задачи компьютерного зрения, и поэтому неслучайно, что методами машинного обучения здесь удается достигать результатов, которые еще недавно казались недоступными (см. обзор [240]).

Отметим еще одну полезную особенность моделей машинного обучения. Точность модели напрямую зависит от того, насколько значимыми ока-

жуются признаки объекта, которые вычисляются в процессе работы модели. Практика показывает, что признаки, сформированные в процессе решения одной задачи, могут быть полезны и при решении другой задачи, либо сами по себе нести некоторую новую информацию об объекте. Это позволяет использовать модели машинного обучения не только как инструмент решения отдельной задачи, но и как метод изучения данных, их свойств и взаимосвязей. Развитию этой идеи посвящена пятая часть диссертации.

Развитие современных методов анализа данных, в частности, основанных на машинном обучении, способно помочь раскрыть потенциал больших серий наблюдательных данных. Причем не только современных, но и исторических. В качестве примера можно привести многолетние каталоги Цюрихской обсерватории, в которых представлены ежедневные координаты наблюдений солнечных пятен, факелов и протуберанцев. Эта информация ранее систематически не изучалась просто потому, что ручная оцифровка десятка тысяч страниц с несколькими миллионами записей не представляется реализуемой, а автоматические процедуры распознают рукописный текст значительно хуже, чем печатный. И если для повседневных нужд приблизительная, даже с ошибками, оцифровка небольших текстов может быть приемлема, то для научного анализа на больших сериях ошибки могут приводить, например, либо к появлению, либо к пропуску аномальных явлений, представляющих интерес для понимания диапазона и регулярности параметров солнечной активности. Трудность построения моделей на больших сериях данных связана еще и с тем, что необходима обучающая выборка, создание которой часто оказывается трудоемким и времязатратным процессом. Более того, каждая новая задача, даже на одних и тех же данных, требует своей соответствующей обучающей выборки. Это приводит в необходимости развития новых методов обучения моделей, которые не требуют постоянного участия экспертов в создании обучающих наборов данных. В шестой части диссертации разрабатываются методы оцифровки данных, учитывающих физических контекст задачи и адаптирующихся под естественные вариации, которым подвержены многолетние серии наблюдений. В частности, предлагается подход, заменяющий обучающую выборку, создаваемую вручную, искусственными вспомогательными зада-

чами, не требующими участия экспертов, но решение которых приводит к решению исходной задачи.

В следующем разделе кратко резюмируем цели диссертации.

Цель работы

Диссертация посвящена развитию новых численных и аналитических параметрического описания процессов и явлений солнечной активности и изучению свойств полученных параметров в контексте солнечной физики.

Сформулируем основные цели диссертации:

- **Оценка параметров роста магнитного поля и его старших статистических моментов на начальной стадии динамо.** При численной оценке скоростей роста возникает необходимость моделирования и усреднения по большому ансамблю реализаций на большом временном интервале. Вопрос о том, насколько достаточен объем выборки, и соответственно, достоверны результаты численных оценок, остается открытым до тех пор, пока в дополнение к численному подходу не будет предложен аналитический и проведено необходимое сопоставление при различных управляющих параметрах проводящей среды. Вначале изучим вопрос на упрощенном модельном примере, предложенном Я.Б. Зельдовичем, а затем перенесем разработанный подход на задачу динамо.
- **Оценка параметров динамо-моделей на основе наблюдательных данных.** Подбор параметров для модели динамо зачастую основывается на феноменологических аргументах и некотором переборе в области возможных значений. Целью работы будет состоять в том, чтобы перейти непосредственно к задаче численной оптимизации для параметров и функциональных зависимостей в динамо-моделях. Для разделения эффектов, связанных с ограничениями самой динамо-модели и методов оптимизации, рассматриваются наиболее простые маломодовые модели, физические механизмы которых хорошо известны. В качестве неизвестных компонент модели будет

выступать вид функции подавления альфа-эффекта и динамо-число. Для их оценки применяется подход на основе нейродифференциальных уравнений, а в качестве задачи оптимизации ставится максимизация соответствия решения модели и среднего профиля наблюдаемых циклов солнечной активности.

- **Разработка метода сегментации активных областей на изображениях солнечного диска, воспроизводящего результат работы экспертов-наблюдателей.** Ручная обработка изображений (которая сегодня продолжает оставаться эталоном) основана на многолетнем опыте и экспертизе – понятиях, которые трудно поддаются формализации и, соответственно, прямой реализации в автоматическом алгоритме. Целью будет разработка подхода, основанного на машинном обучении, призванного воспроизводить работу эксперта-наблюдателя. Кроме того, ожидается, что модель сможет одинаково обрабатывать как изображения солнечного диска, так и синоптические карты. Это требование хотя и является естественным и выполняется при ручной обработке, однако представляет собой трудную задачу для автоматических процедур. В качестве конкретного примера областей рассматриваются корональные дыры (КД).
- **Построение параметрического описания геометрической структуры групп солнечных пятен методами машинного обучения.** Базовые параметры группы пятен, такие как площадь, размеры, наклон группы, изучены достаточно хорошо. Но с другой стороны, они не исчерпывают всю информацию о структуре группы. Вопрос о том, какие еще параметры группы являются значимыми, остается открытым. Целью диссертационной работы будет анализ многолетнего ряда наблюдений групп солнечных пятен и применение методов машинного обучения для поиска и вычисления новых значимых характеристик.
- **Восстановление параметров солнечной активности из архивных наблюдений.** Здесь будут рассмотрены несколько серий исто-

рических каталогов. Первая серия представляет собой рукописные таблицы из архива Цюрихской обсерватории, содержащие координаты пятен, факелов и протуберанцев. Объем архива (свыше 10 тысяч страниц) затруднителен для ручной оцифровки, а стандартные методы автоматической оцифровки дают слишком высокий процент ошибок. Целью будет разработка метода на основе машинного обучения, который был бы в состоянии автоматически адаптироваться к возможным изменениям документа и обеспечивал уровень точности оцифровки, приемлемый для дальнейшего анализа ряда данных. При этом необходимо учитывать ограниченность обучающей выборки, поэтому основной этап обучения будет проходить на искусственных вспомогательных задачах, не требующих ручной разметки данных, но приводящих к решению основной задачи. Вторая серия данных, покрывающая период минимума Дальтона, содержит записи о временах прохождения диска Солнца и солнечных пятен через прицельную сетку, расположенную по лучу зрения. В записях не содержится точного описания конфигурации сетки, более того, известно, что она время от времени менялась, также, как и способ отсчета времени (звездное и солнечное). Соответственно, целью работы будет реконструкция методики наблюдения и гелиографических координат пятен.

Одним из важных показателей успеха в разработке новых методов является степень их вовлечения в дальнейшие исследования. В диссертационной работе на основе предложенных методов создаются новые базы данных и процессы для их регулярного обновления. Для расширения возможностей дальнейшего развития предложенных методов, программный код публикуется в открытом доступе.

Актуальность работы

Сведение описания сложных процессов и явлений к более простому виду является, пожалуй, первым шагом любого исследования. Долгое вре-

мя вопрос определения и вычисления подходящего набора характеристик (параметров) объектов решался эвристически и ограничивался выделением наиболее общих свойств. Современный этап развития науки и физики Солнца в частности открывает возможность сбора больших серий данных и постановки задачи задачи напрямую на данных. Одновременно это является и вызовом для методов и технологий. Для раскрытия потенциала больших данных необходимо развитие новых принципов и методов работы с данными. Как показывает сопоставление с другими областями, в которых машинное обучение добилося значимых успехов (например, в задаче обработки естественного языка), качественный скачок в точности и широте решаемых задач произошел в тот момент, когда удалось подобрать эффективное параметрическое описание объектов (на примере моделей естественного языка – векторного представления слов, в котором близость векторов отражает смысловую близость между словами). Аналогичная задача поиска репрезентативной параметризации возникает и для описания сложных процессов и явлений в солнечной физике. Для ее решения, в зависимости от задачи, могут применяться как методы машинного обучения, так и методы классической математической физики. Отметим ряд актуальных направлений:

- **Количественная оценка показателей эволюции магнитных полей.** При определенных условиях в случайной среде возникает процесс самовозбуждения магнитного поля, однако задача оценки скорости роста поля является трудной как для численных, так и для аналитических методов. Прямое численное моделирование ансамбля реализаций может осложняться явлением перемежаемости, вследствие которого необходимое числа реализаций может оказаться недостижимо большим. Аналитические методы позволяют давать оценки лишь при существенных упрощениях, не свойственных реальной задаче. Разработка новых численных и аналитических методов необходима для дальнейшего прогресса в описании качественного и количественного поведения магнитных более в условиях, приближенных к Солнцу.

- **Калибровка динамо-моделей на основе наблюдательных данных.** Модели солнечного динамо служат как численной лабораторией для проверки различных теорий, так и в ряде случаев инструментом прогноза солнечной активности. Значимость получаемых результатов напрямую зависит от того, насколько хорошо модельное решение согласуется с наблюдательными данными, что в свою очередь является следствием тонкого и подбора параметров модели. С привлечением методов машинного обучения открывается возможность более полной и точной калибровки динамо-моделей под различные целевые функции, что в дальнейшем позволит уточнить исследования, проводимые на их основе. В частности, открывается возможность решения проблемы замыкания непосредственно из наблюдательных данных.
- **Методы машинной обработки данных, воспроизводящие работу астрономов-экспертов.** Поток современных наблюдательных данных уже несопоставим с возможностями его ручной обработки, как это еще было в прошлом веке. При этом стандартные автоматические процедуры по качеству уступают тому уровню, который стал эталонным на протяжении многолетней работы астрономов. Соответственно, для получения сопоставимых по качеству результатов необходимо развитие новых принципов построения моделей машинной обработки наблюдательных данных.
- **Выявление взаимосвязей в больших объемах данных высокой размерности.** Стандартные статистические методы являются удобным инструментом исследования и анализа данных, пока количество параметров остается небольшим. Актуальной тенденцией в современной науке является объединение наблюдений различной природы в единый набор параметров для дальнейшего поиска и выявления новых взаимосвязей. Для этого необходимо развитие новых методов, способных эффективно работать в пространствах высокой размерности и с выборками большого размера.

- **Создание многолетних рядов данных по солнечной активности.** Существенный прогресс в этом направлении связан с тем, что архивные каталоги многих обсерваторий были отсканированы и выложены в открытый доступ. Благодаря этому удалось заполнить целый ряд пробелов в сериях наблюдений. Однако ввиду того, что реконструкциям из исторических данных присуща большая доля неопределенности, возникла актуальная задача о перекрестном сопоставлении данных независимых наблюдателей. Для ее решения необходим более глубокий анализ доступных каталогов и восстановление параметров солнечной активности из как можно большего числа источников.

Большинство моделей, предлагаемых в диссертационной работе, основаны на методах машинного обучения. Актуальность и перспективность этого направления обуславливается успехами подобных методов в других прикладных областях. Для развития методов машинного обучения в физике Солнца сегодня есть все подходящие условия. Во-первых, проведена большая работа по систематизации и публикации в открытом доступе больших серий наблюдательных данных, как современных, так и исторических. Во-вторых, путь развития моделей, пройденный в других прикладных областях, создает задел для адаптации этих методов к задачам физики Солнца. Наконец, необходимые вычислительные ресурсы и объемы хранилищ данных постепенно становятся доступными большому числу исследовательских групп. Совокупность этих факторов показывает, что заявленные в работе цели и методы отвечают актуальным задачам и возможностям современной науки.

Результаты, выносимые на защиту

Защищаемые положения диссертационной работы:

- 1) Для исследования начальной стадии динамо в конвективной зоне Солнца разработан аналитический метод оценки скоростей роста статистических моментов векторных полей на основе моделей случайной

среды с конечным временем памяти. Получены оценки скоростей роста магнитного поля и магнитной энергии в изотропной и осесимметричной анизотропной среде. Оценены пороговые значения числа Струхаля для применимости аналитических методов и показано согласие этих методов с результатами численного моделирования. Показано, что в пределах малого времени памяти эти оценки согласуются с оценками в приближении коротких временных корреляций. Исследованы механизмы роста статистических моментов векторных полей, основанные на сочетании резонансных эффектов и эффектов перемешиваемости и получены оценки относительного вклада этих эффектов.

- 2) На основе разработанных нейродифференциальных уравнений для маломодовых моделей солнечного динамо получены оценки для динамо-числа и функции подавления альфа-эффекта (*alpha-quenching*), позволяющие воспроизвести средний профиль солнечного цикла, построенного на основе многолетнего индекса солнечных пятен. Показано, что существует широкий спектр значений для динамо-числа и профилей функции подавления, дающих согласие с наблюдательными данными, и описана зависимость между этими параметрами. На основе синтетических данных показано, что вариативность восстанавливаемых параметров динамо-модели снижается при использовании более полного набора данных о магнитном поле и при этом повышается точность оценки параметров. Полученные результаты демонстрируют возможность использования нейродифференциальных моделей для адаптации динамо-моделей под наблюдательные данные.
- 3) Предложен метод анализа корональных дыр (КД), основанный на машинном обучении с применением нейронных сетей, позволяющий преодолеть ограничения алгоритмов, базирующихся на явных правилах, неполно учитывающих вариативность среды. Созданы каталоги границ и параметров КД. Найдены параметры КД, обладающие высокой корреляцией со скоростью солнечного ветра, и показано, что эта корреляция заметно выше, чем у ранее предлагавшихся алгорит-

мов выделения КД. Показано, что основной вклад в долговременные вариации солнечного ветра создают низкоширотные КД. Доказано существование асимметрии в стадиях развития и амплитудах КД между северным и южным полушариями. На основе построенных широтно-временных диаграмм фотосферного магнитного поля и магнитного поля в КД показано, что помимо переноса магнитного потока с низких широт, должны существовать и другие механизмы формирования полярных КД.

- 4) Предложен, основанный на машинном обучении на многолетних рядах изображений групп солнечных пятен, подход для создания полного, но компактного описания групп солнечных пятен. Разработанные модели позволяют получить компактный набор параметров, однозначно описывающих детальную геометрическую структуру групп солнечных пятен и позволяющий проводить количественное сравнение групп между собой. Показано, что среди новых параметров содержатся параметры, тесно связанные со стандартными физическими свойствами групп: угол наклона, площадь, протяженность, а также то, что на их основе воспроизводятся основные наблюдательные закономерности включая асимметрию между северным и южным полушарием. Показано, что точность восстановления исходного образа группы зависит от числа параметров, описывающих группу. Предложен метод количественной оценки сложности геометрической структуры группы, согласующийся с известными стадиями ее развития. Сравнение оценок с классами групп солнечных пятен по Цюрихской системе продемонстрировало его достаточно высокую точность.
- 5) На основе разработанных моделей машинного обучения выполнена оцифровка многолетних рукописных каталогов Цюрихской обсерватории и восстановлены координаты солнечных пятен, факелов и протуберанцев в конце 19 – начале 20 веков. Полученные координаты солнечных пятен детализируют и дополняют информацию о положении и строении групп пятен из каталогов Гринвичской обсерватории и позволяют сделать вывод о согласии в методиках идентификации

пятен в этих двух обсерваториях. Построенные широтно-временные диаграммы показывают новые особенности солнечной активности в период столетнего солнечного минимума в начале 20 века: асимметрию в фазах миграции факелов к полюсам в северном и южном полушариях, высокую корреляцию числа протуберанцев и солнечных пятен в 13 и 14 цикле и их аномально низкое соотношение в цикле 15.

- 6) Разработаны методы обработки и интерпретации исторических данных, являющихся единственным прямым свидетельством о долгосрочных вариациях солнечной активности. На основе каталогов солнечных пятен О. Флержера (18–19 века), и реконструкции его методик транзитных наблюдений восстановлены координаты 527 положений солнечных пятен для 154 дней наблюдений в период особого режима солнечной активности, известного как минимум Дальтона. Показано, что используемая методика дает высокую точность измерения координат объектов на диске Солнца. Получены широтно-временные диаграммы распределения солнечных пятен, дополняющие и связующие между собой более краткосрочные наблюдения других астрономов, что позволяет уточнить характер солнечной цикличности в период минимума Дальтона. Показано, что в этот период существовали долгоживущие группы пятен, наблюдаемые более одного солнечного оборота, имела асимметрия пятенной активности между северным и южным полушарием. Получены новые свидетельства аномальной длительности цикла 4. Возможно и существование короткого (потерянного) цикла между 4-ым и 5-ым. Отсутствие измерений в 1793–94 годах не позволяет сделать окончательный выбор между этими двумя возможностями.

Научная новизна работы

Новизна работы складывается из ряда факторов. Тематика работы – параметрическое описание процессов и явлений солнечной активности – опре-

деляет новое направление в методах изучения солнечной активности. Его возникновение связано с тем, что все чаще исследователи обращаются к данным, имеющим высокую размерность (например, снимки высокого пространственного и временного разрешения, совокупность разноплановых наблюдений в один и тот же момент времени), и суммарный объем которых превосходит возможности стандартных компьютеров и методов обработки. Все это представляет собой существенную трудность для анализа, однако интерес к изучению подкрепляется тем, что большой объем данных, потенциально, несет в себе новую информацию для физики. Соответственно, необходимо формирование и систематическое исследование новой группы методов, позволяющих эффективно исследовать объекты сложной структуры, обнаруживать и использовать взаимосвязи в больших данных.

В диссертационной работе предлагаются новые аналитические и численные методы для параметрического описания процессов и явлений солнечной активности. Предложенный метод аналитической оценки скоростей роста статистических моментов позволил впервые описать набор механизмов, приводящих к росту неустойчивости в уравнении Якоби со случайным параметром, и оценить скорости роста. В задаче о росте магнитного поля и магнитной энергии предложенный метод впервые позволит выйти за ограничения изотропной модели случайного потока и получить оценки скоростей роста для анизотропной модели.

В основе численных моделей, предложенных в работе, лежат современные подходы, основанные на машинном обучении. Предлагаются новые модели и методы обучения. Большое внимание уделяется вопросам оценки точности моделей, интерпретируемости моделей и физическому анализу результатов.

Для реализации моделей потребовалась разработка новых комплексов программ, в том числе, позволяющих проводить вычисления на графических процессорах. В работе использовались ресурсы суперкомпьютерного комплекса Ломоносов-2 МГУ. Комплексы программ выложены в открытый доступ в репозитории <https://github.com/observethesun/>, в частности:

- <https://github.com/observethesun/helio> – комплекс программ

для чтения, обработки и записи в различных форматах наблюдений по солнечной активности;

- https://github.com/observethesun/coronal_holes – комплекс программ для обучения модели сегментации корональных дыр на диске Солнца;
- https://github.com/observethesun/synoptic_maps – комплекс программ для создания синоптических карт и выделения корональных дыр;
- https://github.com/observethesun/sunspot_groups – комплекс программ для обучения модели параметризации формы групп солнечных пятен;
- <https://github.com/observethesun/dynamoNDE> – комплекс программ для создания и обучения нейродифференциальных моделей динамо;
- <https://github.com/observethesun/halpha> – комплекс программ для создания и обучения моделей по оцифровке даты и времени снимков из архива обсерватории Сакраменто-Пик.

В процессе работы были созданы и представлены в открытом доступе новые базы данных:

- сайт <https://observethesun.ru/>, представляющий карты активных областей, индексы и прогноз солнечной активности;
- Каталог синоптических карт и карт корональных дыр https://sun.njit.edu/coronal_holes;
- Каталог карт КД и карт магнитных полей КД <https://sun.njit.edu/monitor>;
- Каталог координат пятен, факелов и протуберанцев по наблюдениям Цюрихской обсерватории https://github.com/observethesun/zurich_catalogs;

- Каталог координат пятен по наблюдениям О. Фложерга <https://github.com/observethesun/Flaugergues>;
- Каталог параметров групп солнечных пятен Кисловодской обсерватории https://github.com/observethesun/sunspot_groups;
- Набор из 100 тысяч аннотированных примеров рукописных чисел из архивных каталогов https://github.com/observethesun/handwritten_numbers;
- Каталог оцифрованных значений дат и времени снимков из архива обсерватории Сакраменто-Пик <https://doi.org/10.5281/zenodo.18392561>.

Область применения результатов

В работе были предложены новые методы для исследования вопросов солнечной активности. Анализ результатов работы моделей показывает их высокую точность и устойчивость. Таким образом, предложенные модели могут быть внедрены в программы обработки наблюдательных данных по солнечной активности. В частности, некоторые из моделей уже участвуют в сознании и регулярном обновлении баз данных.

Отметим, что для исходный код большинства моделей представлен в открытом доступе, что позволяет, с одной стороны, верифицировать и воспроизвести результаты исследований, а с другой стороны, разработанный код может быть использован в дальнейших исследованиях.

Созданные в рамках работы новые базы данных могут служить основой для дальнейших исследований солнечной активности.

Отметим также, что выделение методов анализа больших серий данных в самостоятельную область исследования в рамках физики Солнца должно способствовать систематическому исследованию и развитию новой области.

Апробация работы и публикации

Результаты диссертации опубликованы в 25 статьях в изданиях, входящих в перечень ВАК:

- 1) Е. А. Илларионов. Методы машинного обучения в физике Солнца // Успехи физических наук. 2025. Т. 195, № 4, с. 395–415. DOI: 10.3367/ufnr.2025.02.039872.
- 2) E. Illarionov, V. Kisielius, R. Stepanov, K.M. Kuzanyan. Neural differential equations for the solar dynamo // Physical Review E. 2026. V. 113, issue, article L053202. DOI: 10.1103/dpsp-bwkh.
- 3) E. Illarionov, A. Tlatov, I. Berezin, N. Skorbezh. Correlation of coronal hole area indices and solar wind speed // Solar Physics, 2025. V. 300, issue 9, article 123. DOI: 10.1007/s11207-025-02530-z.
- 4) E. A. Illarionov, D. D. Sokoloff. Relative efficiency of three mechanisms of vector fields growth in a random media // Physical Review E. 2023. V. 107, issue 4, article 044110. DOI: 10.1103/PhysRevE.107.044110.
- 5) E. Illarionov, R. Arlt. Sunspot positions from observations by Flaugergues in the Dalton minimum // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2023. V. 523, N. 2, p. 1809–1821. DOI: 10.1093/mnras/stad1489.
- 6) E. Illarionov, R. Arlt. Reconstruction of the solar activity from the catalogs of the Zurich observatory // Solar Physics. 2022. V. 297, issue 7, article 79. DOI: 10.1007/s11207-022-02015-3.
- 7) E. Illarionov, A. Tlatov. Parametrization of sunspot groups based on machine learning approach // Solar Physics. 2022. V. 297, issue 2, article 19. DOI: 10.1007/s11207-022-01955-0.
- 8) E. A. Illarionov, D. D. Sokoloff. Finite memory time and anisotropy effects for initial magnetic energy growth in random flow of conducting media // Physical Review E. 2021. V. 104, issue 1, article 015214. DOI: 10.1103/PhysRevE.104.015214.

- 9) E. Illarionov, A. Kosovichev, A. Tlatov. Machine-learning approach to identification of coronal holes in solar disk images and synoptic maps // *Astrophysical Journal*. 2020. V. 903, N. 2, article 115. DOI: 10.3847/1538-4357/abb94d.
- 10) E. A. Illarionov, A. G. Tlatov. Segmentation of coronal holes in solar disk images with a convolutional neural network // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2018. V. 481, N. 4, p. 5014–5021. DOI: 10.1093/mnras/sty2628.
- 11) E. A. Illarionov, D. D. Sokoloff. Growth rate of the initial magnetic energy in isotropic velocity field with non-Gaussian distribution // *Magnetohydrodynamics*. 2023. V. 51, N. 1, p. 23–27. DOI: 10.22364/mhd.59.1.2.
- 12) Е. А. Илларионов, Д. Д. Соколов, С. С. Павленко. Флуктуации времени памяти и взрывной рост моментов в системах уравнений со случайными коэффициентами // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2026. Т. 66, № 1, с. 19–23. DOI: 10.7868/S3034533226010025.
- 13) V. Kisielius, E. Illarionov. Machine learning for reconstruction of polarity inversion lines from solar filaments // *Solar Physics*. 2024. V. 299, issue 5, article 69. DOI: 10.1007/s11207-024-02324-9.
- 14) M. A. Reiss, K. Muglach, C. Mostl, C. N. Arge, R. Bailey, V. Delouille, T. M. Garton, A. Hamada, S. Hofmeister, E. Illarionov, R. Jarolim, M. S. Kirk, A. Kosovichev, L. Krista, S. Lee, C. Lowder, P. J. MacNeice, A. Veronig. The observational uncertainty of coronal hole boundaries in automated detection schemes // *Astrophysical Journal*. 2021. V. 913, N. 1, article 28. DOI: 10.3847/1538-4357/abf2c8.
- 15) M. A. Reiss, K. Muglach, E. Mason, E. E. Davies, S. Chakraborty, V. Delouille, C. Downs, T. M. Garton, J. A. Grajeda, A. Hamada, S. G. Heinemann, S. Hofmeister, E. Illarionov, R. Jarolim, L. Krista, C. Lowder, E. Verwichte, C. N. Arge, L. E. Boucheron, C. Foullon, M. S. Kirk, A.

- Kosovichev, A. Leisner, C. Mostl, J. Turtle, A. Veronig. A community data set for comparing automated coronal hole detection schemes // *Astrophysical Journal, Supplement Series*. 2024. V. 271, N. 1, article 6. DOI: 10.3847/1538-4365/ad1408.
- 16) A. Aatiya, V. Sadykov, A. Kosovichev, I. N. Kitiashvili, V. Oria, G. M. Nita, E. Illarionov, P. M. O’Keefe, F. Francis, C.-J. Chong, P. Kosovich, R. D. Marroquin. Predicting solar proton events of solar cycles 22–24 using goes proton and soft-x-ray flux features // *Astrophysical Journal, Supplement Series*. 2024. V. 270, N. 1, article 15. DOI: 10.3847/1538-4365/ad0a6c.
 - 17) R. D. Marroquin, V. Sadykov, A. Kosovichev, I. N. Kitiashvili, V. Oria, G. M. Nita, E. Illarionov, P. M. O’Keefe, F. Francis, C. J. Chong, P. Kosovich, A. Ali. Statistical study of the correlation between solar energetic particles and properties of active regions // *Astrophysical Journal*. 2023. V. 952, N. 2, article 97. DOI: 10.3847/1538-4357/acdb65.
 - 18) Д. Д. Соколов, А. А. Чикина, Е. А. Илларионов. Средний квадрат геодезического отклонения в задаче Зельдовича о распространении света во Вселенной с неоднородностями. *Астрономический журнал*. 2021. Т. 98, № 5, с. 355–362. DOI: 10.31857/S0004629921050078.
 - 19) S. Pavlenko, E. Illarionov, D. Sokoloff. Memory time fluctuations and instabilities in random media // *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics*. 2025. V. 119, N. 3-4, p. 382–388. DOI: 10.1080/03091929.2025.2455175.
 - 20) В. Киселюс, Е.А. Илларионов, Р.А. Степанов, К.М. Кузанын. Сопоставление одношагового и многошагового подхода к прогнозированию индекса солнечной активности // *Известия РАН. Серия физическая*. 2025. Т. 89, № 7, с. 1143–1148. DOI: 10.7868/S3034646025070218.
 - 21) А. П. Очир-Горяева, Д. Д. Соколов, Е. А. Илларионов. Эффекты длинной памяти при развитии неустойчивости в случайной среде //

- 22) K. Whitman, R. Egeland, I. G. Richardson, C. Allison, P. Quinn, J. Barzilla, I. Kitiashvili, V. Sadykov, H. M. Bain, M. Dierckxsens, M. L. Mays, T. Tadesse, K. T. Lee, E. Semones, J. G. L., M. Núñez, S. M. White, S. W. Kahler, A. G. Ling, D. F. Smart, M. A. Shea, V. Tenishev, S. F. Boubrahimi, B. Aydin, P. Martens, R. Angryk, M. S. Marsh, S. Dalla, N. Crosby, N. A. Schwadron, K. Kozarev, M. Gorby, M. A. Young, M. Laurenza, E. W. Cliver, T. Alberti, M. Stumpo, S. Benella, A. Papaioannou, A. Anastasiadis, I. Sandberg, M. K. Georgoulis, A. Ji, D. Kempton, C. Pandey, L. Gang, J. Hu, G. P. Zank, E. Lavasa, G. Giannopoulos, D. Falconer, Y. Kadadi, I. Fernandes, M. A. Dayeh, A. Muñoz-Jaramillo, S. Chatterjee, K. D. Moreland, I. V. Sokolov, I. I. Roussev, A. Taktakishvili, F. Effenberger, T. Gombosi, Z. Huang, L. Zhao, N. Wijsen, A. Aran, S. Poedts, A. Kouloumvakos, M. Paassilta, R. Vainio, A. Belov, E. A. Eroshenko, M. A. Abunina, A. A. Abunin, C. C. Balch, O. Malandraki, M. Karavolos, B. Heber, J. Labrenz, P. Kühl, A. G. Kosovichev, V. Oria, G. M. Nita, E. Illarionov, P. M. O’Keefe, Y. Jiang, S. H. Ferreira, A. Ali, E. Paouris, S. Aminalragia-Giamini, P. Jiggins, M. Jin, C. O. Lee, E. Palmerio, A. Bruno, S. Kasapis, X. Wang, Y. Chen, B. Sanahuja, D. Lario, C. Jacobs, D. Toit Strauss, R. Steyn, B. Jabus van den, B. Swalwell, C. Waterfall, M. Nedal, R. Miteva, M. Dechev, P. Zucca, A. Engell, B. Maze, H. Farmer, T. Kerber, B. Barnett, J. Loomis, N. Grey, B. J. Thompson, J. A. Linker, R. M. Caplan, C. Downs, T. Török, R. Lionello, V. Titov, M. Zhang, and P. Hosseinzadeh. Review of solar energetic particle models // *Advances in Space Research*. 2022. V. 72, N. 12, p. 5161–5242. DOI: 10.1016/j.asr.2022.08.006.
- 23) V. M. Sadykov, I. N. Kitiashvili, A. S. Dalda, V. Oria, A. G. Kosovichev, E. A. Illarionov. Compression of Solar Spectroscopic Observations: a Case Study of Mg II k Spectral Line Profiles Observed by NASA’s IRIS Satellite // *Труды конференции International Conference on Content-Based Multimedia Indexing*. IEEE, 2021. P. 106–111. DOI:

10.1109/cbmi50038.2021.9461879.

- 24) О. А. Андреева, Е.А. Илларионов. Вариации некоторых индексов солнечной активности и магнитные поля корональных дыр 25-го цикла // Геомагнетизм и аэронавигация. 2025. Т. 65, № 5, с. 590–598. DOI: 10.7868/S3034502225050035.
- 25) А. Г. Тлатов, Е. А. Илларионов, И. А. Березин, А. Д. Шрамко. Прогнозирование солнечных вспышек и фоновых потоков рентгеновского излучения по данным синоптических наземных наблюдений с помощью методов машинного обучения // Космические исследования. 2020. Т. 58, № 6, с. 479–484. DOI: 10.31857/S0023420620060102.

По материалам работы были сделаны доклады более чем на 30 научных конференциях и симпозиумах. Отметим некоторые из них:

- Физика плазмы в Солнечной системе, ИКИ РАН, 2026, 2025, 2024, 2023, 2022, 2021, 2019, 2018
- Солнечная и солнечно-земная физика, ГАО РАН, 2025 (ИЗМИРАН), 2024, 2023, 2022, 2021, 2020, 2019, 2018
- Machine Learning and Computer Vision in Heliophysics, Sofia, Bulgaria, 2025
- The Fifth Russian Conference on Magnetohydrodynamics, Пермь, 2024
- Всероссийская астрономическая конференция ВАК-2024, САО РАН, 2024
- Зимняя школа по механике сплошных сред, Пермь, 2023, 2021
- IAU Symposium 365, Ереван, Армения, 2023
- Machine Learning in Heliophysics, Boulder, United States, 2022
- 15th Quadrennial Solar-Terrestrial Physics Symposium, India, 2022
- Успехи российской астрофизики, 2021, 2018

- IV Russian Conference on Magneto Hydrodynamics, Пермь, 2021
- Applications of Statistical Methods and Machine Learning in the Space Sciences, United States, 2021
- P.L. Chebyshev-200, Москва, 2021
- Heliophysics 2050, United States, 2021
- Space Weather Workshop, United States, 2021
- Ломоносовские чтения 2021, Москва, 2021
- Machine Learning in Heliophysics, Амстердам, 2019
- Data Science Summer School, Париж, 2019
- Всероссийская астрономическая конференция – 2017 «Астрономия: познание без границ», Ялта, 2017

Отдельные результаты стали темой публикаций в СМИ, например:

- <https://academia.interfax.ru/ru/news/articles/5877>;
- <https://nauka.tass.ru/nauka/10332743>;
- <https://nauka.tass.ru/nauka/15119033>;
- <https://trends.rbc.ru/trends/futurology/62c8281c9a794744f130edee>.

В процессе работы над диссертацией под руководством автора был успешно выполнен грант РФФИ № 20-72-00106. Ряд работ, представленных в диссертации, проводился при поддержке грантами РФФИ №№ 23-22-00165, 21-72-20067, РФФИ №№ 15-02-06271, 15-02-01407-а, 16-32-00056, 17-52-53203, 18-02-00098, 18-02-0008, и рядом НИР на базе МГУ и Московского центра фундаментальной и прикладной математики.

В процессе работы на диссертацией автор был приглашенным ученым в ряде зарубежных институтов:

- New Jearsey Institute of Science and Technology, USA;
- NASA Ames Center, USA;
- Leibniz Institute for Astrophysics Potsdam, Germany;
- Peking University, China.

Работы автора были отмечены

- победами в конкурсе работ, способствующих решению задач Программы развития Московского университета в номинации «Выдающиеся научные статьи»;
- стипендий Президента РФ;
- стипендией Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова молодым преподавателям и научным сотрудникам.

Опыт, полученный автором в результате работы над задачами диссертации, использован при разработке и чтении лекций на механико-математическом факультете МГУ по направлениям «Методы анализа данных», «Математическая статистика и анализ данных», «Программирование», а также при проведении семинарских занятий и практикумов по основам машинного обучения, теории вероятностей, статистике и случайным процессам.

Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, обзора существующих подходов, пяти глав, посвященных основным результатам, и заключения. Работа содержит 132 рисунка, 24 таблицы и 252 библиографические ссылки.

Кратное содержание работы

Во **введении** представлена общая характеристика работы. Вначале приводится кратное описание темы исследования, из него формулируются цели

работы и обосновывается актуальность. Далее формулируются основные результаты, выносимые на защиту. Приводится обоснование научной новизны полученных результатов, перечень новых комплексов программ и баз данных. Обозначается область применения результатов. Приводится список статей и конференций, на которых были представлены результаты. Приводится список проектов, которые внесли вклад в работу. В конце приводится краткое содержание работы.

Глава 1 посвящена обзору существующих подходов. Приводятся примеры источников данных, обсуждаются методы обработки данных, преимущества и недостатки различных моделей, отмечаются открытые проблемы. Проводится сопоставление с методами и моделями, разработанными в смежных областях науки. Обозначаются направления дальнейшего исследования: описание процессов, связанных с развитием неустойчивостей в случайных средах; ассимиляция наблюдательных данных в моделях солнечного динамо; анализ и параметрическое описание активных областей на Солнце на основе больших серий современных наблюдательных данных; восстановление параметров солнечной активности по историческим каталогам наблюдений.

Глава 2 посвящена выводу аналитических и численных оценок скорости роста векторных полей и их статистических моментов в случайных средах.

В **разделе 2.1** дается описание модельного примера, с которого начинается исследование – уравнение Якоби со случайным параметром кривизны.

В **разделе 2.2** содержится описание метода расчета показателя Ляпунова на основе понятия инвариантной меры и скоростей роста моментов поля Якоби.

В **разделе 2.3** формулируется общий метод оценки скоростей роста статистических моментов векторного поля в рамках модели с обновлениями. Обсуждается вывод оценок в гауссовском случае.

В **разделе 2.4** рассматривается изотропная модель магнитного поля в случайной среде, решается задача о нахождении скорости роста второго момента (магнитной энергии), проводится сопоставление с численным моделированием.

В разделе 2.5 рассматривается анизотропная (осесимметричная) модель магнитного поля в случайной среде. Решается задача о нахождении скорости роста второго момента (магнитной энергии), проводится сопоставление с численным моделированием и изотропным случаем.

В разделе 2.6 проводится сопоставление оценок скорости роста второго момента, полученных в рамках модели с обновлениям, с найденными ранее оценками методом в короткокоррелированном приближении.

В разделе 2.7 формулируется обобщение метода нахождения оценок на случай смеси гауссовских распределений и в рамках одного примера приводится вывод оценок.

В разделе 2.8 приводятся выводы и обсуждение области применимости новых методов и результатов в контексте теории динамо.

Глава 3 посвящена приложению метода нейродифференциальных уравнений для оценки параметров маломодовых моделей динамо на основе наблюдательных данных.

В разделе 3.1 формулируется метод нейродифференциальных уравнений.

В разделе 3.2 дается описание маломодовой модели динамо, формулируется нейродифференциальная модель динамо и на основе модели нейронной сети параметризуется неизвестная функция подавления альфа-эффекта.

В разделе 3.3 ставится задача восстановления параметров модели динамо на основе синтетических данных, полученных моделированием при некоторых заданных параметрах. Обсуждается согласие восстановленных и истинных значений и вариативность решений обратной задачи..

В разделе 3.4 параметры модели динамо подбираются на основе наблюдательных данных, представленных средним профилем цикла солнечной активности. Обсуждается вариативность полученных оценок и связь между параметрами.

В разделе 3.5 приводятся выводы и обсуждаются особенности реализации подхода на основе нейродифференциальных уравнений.

Глава 4 посвящена разработке метода сегментации активных областей, воспроизводящего результат ручной обработки изображений. В качестве

примера рассматривается задача сегментации корональных дыр.

В разделе 4.1 дается описание набора данных и методов предварительной обработки. Приводится описание нового каталога карт солнечной активности – сайта observethesun.com. Обсуждается релевантность данных, на основе которых будет проводится обучение моделей.

В разделе 4.2 ставится задача машинного обучения, кратко излагаются принципы работы нейронных сетей. Далее дается описание модели сегментации корональных дыр на изображениях солнечного диска и проводится обучение модели.

В разделе 4.3 результаты работы модели сравниваются с целевыми картами корональных дыр, проводится анализ качества модели. Показано, что модель дает результаты, сопоставимые с экспертной обработкой данных. Проводится сопоставление модели с другими моделями сегментации корональных дыр.

В разделе 4.4 формулируется задача сегментации корональных дыр на синоптических картах и обсуждаются ключевые отличия от задачи сегментации на изображениях солнечного диска.

В разделе 4.5 приводится алгоритм построения каталога синоптических карт. Дается описание нового каталога синоптических карт.

В разделе 4.6 приводится процедура модификации модели сегментации корональных дыр для работы с синоптическими картами.

В разделе 4.7 проводится анализ каталога синоптических карт корональных дыр. Сопоставляются результаты работы модели при разных проекциях. Изучаются широтно-временные особенности распределения корональных дыр. Изучаются широтно-временные особенности распределения магнитного поля в корональных дырах.

В разделе 4.8 дается сопоставление предложенной модели со стандартным методом пороговой сегментации.

В разделе 4.9 формулируются выводы, обсуждаются границы применимости нового метода. Приводится описание каталога синоптических карт корональных дыр. Обсуждается идея фундаментальных моделей машинного обучения.

Глава 5 посвящена вопросу описания геометрической структуры групп

солнечных пятен, сохраняющему тонкие детали строения группы.

В разделе 5.1 приводится описание методики составления каталога групп солнечных пятен и их базовых параметров на основе каталогов Кисловодской горной астрономической станции.

В разделе 5.2 дается постановка задачи параметризации как задачи понижения размерности данных. Обсуждаются линейные и нелинейные подходы.

В разделе 5.3 представлена модель параметризации групп пятен на основе модели машинного обучения (сверточного вариационного автоэнкодера) и метода главных компонент. Формулируется функция ошибок, используемая при обучении модели. Изучается влияние конфигурации модели на точность реконструкции изображения группы солнечных пятен.

В разделе 5.4 проводится исследование структуры пространства новых параметров. Основным результатом является выделение связи с физическими параметрами.

В разделе 5.5 на основе новых параметров предлагается процедура оценка сложности структуры групп солнечных пятен.

В разделе 5.6 на основе новых параметров предлагается модель классификации групп пятен и проводится сопоставление с Цюрихской системой классификации. Показано, что новые параметры позволяют оценивать Цюрихский класс группы.

В разделе 5.7 приводятся другие приложения моделей понижения размерности: описание профилей спектральных линий, прогноз протонных событий.

В разделе 5.8 дается общий вывод из представленных результатов и, в частности, вывод о том, что предложенный подход является новым инструментом исследования данных, а именно – извлечения значимых параметров, характеризующих наблюдательные данные.

Глава 6 посвящена методам оцифровки исторических наблюдений и восстановлению параметров солнечной активности. Рассматриваются две серии наблюдений: (1) каталоги Цюрихской обсерватории, покрывающие конец 19 – начало 20 века и (2) каталоги французского астронома О. Флоржера, покрывающие период минимума Дальтона (первая треть 19 века).

В разделе **6.1** методами машинного обучения проводится оцифровка каталогов Цюрихской обсерватории. В начале раздела обсуждается структура каталогов и особенности программы наблюдений Цюрихской обсерватории.

В подразделе **6.1.1** приводится общий план построения процедуры оцифровки. Далее каждый из шагов обсуждается подробно в последующих подразделах.

В подразделе **6.1.2** дается описание процедуры разметки страниц каталога и описание архитектуры нейросетевой модели. Подробно обсуждается принцип работы с текстом как с последовательностью символов. Дается описание функции потерь, учитывающей последовательную природу текста. Приводится процедура построения обучающего набора данных. Предлагается способ вычисления уверенности предсказания модели. Показано, что на тестовой части выборки точность модели составляет 97%. Показана зависимость точности от уверенности модели.

В подразделе **6.1.3** предлагается процедура, позволяющая модели автоматически адаптироваться к изменениям текста и тем самым не терять точность. Проводится оцифровка полного набора каталогов.

В подразделе **6.1.4** приводятся широтно-временные диаграммы распределения пятен, факелов и протуберанцев по оцифрованным координатам из каталогов. Результаты сопоставляются с данными о положении центров групп пятен из каталогов Гринвичской обсерватории.

В подразделе **6.1.5** дается описание базы данных оцифрованных координат, обсуждаются особенности солнечной активности по восстановленным данным. Приводится описание расширенного набора данных, полезного для обучения новых моделей оцифровки рукописного текста. Приводятся результаты приложения модели к задаче оцифровки даты и времени снимков из архива обсерватории Сакраменто-Пик.

В разделе **6.2** разрабатывается метод восстановления гелиографических координат солнечных пятен в период минимума Дальтона из каталогов французского астронома О. Флержера.

В подразделе **6.2.1** приводится описание оригинальных каталогов, описание новых каталогов с оцифрованными данными, описание методик

проведения наблюдений. Формулируется задача восстановления гелиографических координат из транзитных измерений, представленных в каталоге.

В подразделе **6.2.2** предлагается метод восстановления гелиографических координат из транзитных наблюдений, сделанных в прямоугольной сетке. Приводятся серии восстановленных данных.

В подразделе **6.2.3** предлагается метод восстановления гелиографических координат из транзитных наблюдений, сделанных в косой сетке. Приводится метод оценки погрешности позиционирования телескопа. Приводится метод оценки угла, образующего косую сетку. Показывается согласованность серий восстановленных координат.

В подразделе **6.2.4** предлагается метод восстановления гелиографических координат из транзитных наблюдений, сделанных в ромбической сетке. Приводится метод оценки погрешности позиционирования телескопа. Приводится метод оценки угла, образующего вершину ромба сетку. Показывается согласованность серий восстановленных координат.

В подразделе **6.2.5** приводится метод восстановления координат солнечных пятен, наблюдаемых во время солнечных затмений, на основе реконструкции солнечных затмений. Показана согласованность серий восстановленных координат с прямыми наблюдениями в ромбической сетке.

В подразделе **6.2.6**, используя записи наблюдений транзита Меркурия и программную реконструкцию транзита Меркурия по диску Солнца, приводится оценка точности измерений.

В подразделе **6.2.7** представлена широтно-временная диаграмма наблюдений солнечных пятен в период минимума Дальтона, проводится сопоставление с другими сериями наблюдений. Дается описание нового каталога с координатами пятен.

В **Заключении** подводятся итоги работы и обсуждаются дальнейшие направления исследований.

Глава 1.

Обзор существующих ПОДХОДОВ

Интерес в современной физике Солнца к развитию методов эффективного представления данных напрямую связан с прогрессивным развитием технологий сбора, хранения, передачи данных, вычислительных мощностей и новыми задачами, возникающими в науке. Примеры успешных подходов в других областях, в которых активный интерес к подобным исследованиям возник несколько раньше, подтверждает перспективность данного направления. Так, значительный прирост в точности машинного перевода или в целом в моделях обработки естественного языка связан с построением векторного представления слов, которое учитывает смысловую близость между словами. Далее оказывается, что после некоторой адаптации, подобные технологии переносятся на задачу обработки изображений, аудио, видео и других форматов данных. В качестве примера можно привести концепцию фундаментальных моделей машинного обучения (Foundation models). Идея состоит в том, что вместо обучения новых моделей под каждую конкретную задачу, вначале на основе большого корпуса данных обучается одна, в некотором смысле универсальная модель, которая затем дообучается (за более короткое время и с меньшим объемом выборки) под конкретные задачи. При обучении фундаментальной модели используются в том числе искусственно составленные задачи, которые не требуют привлечения экспертов для разметки, однако помогают модели выстраивать эффективное представ-

ление данных и обнаруживать полезные взаимосвязи. Примерами реализации этой идеи служат большие языковые модели (Large language models) BERT (Bidirectional Encoder Representations from Transformers, [65]), GPT (Generative Pre-trained Transformer, [37]) и ряд других. Затем, концепция фундаментальных моделей была применена для работы с изображениями, например в модели VisualTransformer [71] и SAM (Segment Anything, [131]).

Недавно была представлена модель Surya [187] как фундаментальная модель для работы с изображениями солнечного диска и магнитограммами, полученными с телескопа Solar Dynamics Observatory (SDO). Для обучения фундаментальной модели использовался многолетний ряд данных SDO с шагом по времени 12 минут, в полном пространственном разрешении и объединенные в многоканальное изображение (различные спектральные линии и измерения магнитного поля). При обучении ставилась общая задача предсказания последующего (с некоторым шагом по времени) изображения на основе текущих. Такая постановка задачи не требует привлечения экспертов для создания обучающей выборки, однако способствует тому, чтобы модель обнаруживала пространственные, временные и мультисканальные взаимосвязи. В качестве приложения, авторы демонстрируют возможности адаптации модели для задач прогноза солнечных вспышек, солнечного ветра и сегментации активных областей.

Задача разработки эффективного представления относится не только к наблюдательным данным, но и к описанию процессов и явлений, возникающих, например, в контексте теоретических моделей. Так, описание солнечной активности основывается на процессах возбуждения, переноса и диффузии магнитного поля, например, в рамках теории солнечного динамо [35; 209]. Конвективные движения электропроводящих сред, как полагают, генерируют циклически изменяющееся магнитное поле Солнца. Процесс, известный как солнечное динамо, сочетает в себе детерминистические (например, почти периодическая изменчивость числа солнечных пятен, известная как солнечный цикл) и случайные черты (например, изменение амплитуды цикла от одного цикла к другому и периоды продолжительных минимумов). Этот процесс исследуется с опорой на другие астрономические наблюдения и результаты лабораторных экспериментов (см., напри-

мер, [34; 188]).

Исследование моделей динамо путем прямого численного моделирования МГД-уравнений является одной из самых трудных задач (см. обзор [122]). В связи с этим используются различные упрощения. Одно из них связано с выделением и изучением средних полей. С его помощью удастся воспроизвести наиболее значимые закономерности солнечной активности, например, магнитный цикл, баггетт-диаграммы и другие эффекты (см. обзор [33]).

Обсудим задачу изучения роста магнитного для заданного поля скоростей, известную как кинематическое динамо. Ключевые идеи этого подхода были описаны в работе [247]. Широкий спектр задач, доступных как для численного, так и для аналитического исследования возникает при определенных предположениях на статистические свойства поля скоростей. Типичным предположением является рассмотрение модели однородного и изотропного поля скоростей и так называемой модели с обновлениями, для которой реализации поля скорости заменяются на независимые в предписанные моменты времени. Описание этой модели удобно начать на более простом примере, изучение которого помогает получить представление о свойствах более сложных систем.

В 1964 году Я.Б. Зельдович в работе [239] предложил модель, которая имитирует многие основные свойства неустойчивостей в случайных средах и достаточно проста для аналитического исследования. Модель, предложенная Зельдовичем, качественно описывает то, как периодическая структура Вселенной (т.е. редкие концентрации массы, представленные в модели случайными флуктуациями кривизны) может привести к систематическому расхождению двух изначально близких траекторий световых лучей. В серии последующих публикаций [142; 245] эта модель была сформулирована в точных математических терминах, которые позволяют провести детальное аналитическое и численное исследование. А именно, проблема была сформулирована в терминах уравнения Якоби со случайным параметром кривизны. Различные предположения о распределении параметра кривизны и времени памяти приводят к широкому спектру изучаемых моделей. Практическая польза от этих моделей заключается в том, что многие

явления, наблюдаемые в таких простых моделях, затем воспроизводятся и в более сложных моделях, в частности, в МГД-моделях (например, [105]).

Существенное влияние на развитие исследований по оценке роста поля Якоби оказала математическая теория произведения случайных матриц. Эта теория развивалась в серии работ [77; 78] и затем [217]. В этих работах показывается, что при достаточно широких предположениях на распределение случайных матриц, действие этих матриц на некотором специально подобранном пространстве порождает эргодическую цепь Маркова. Далее, скорость роста произведения матриц (точнее говоря, показатель Ляпунова) связывается со стационарным (инвариантным) распределением этой цепи Маркова. Условия на распределение матриц позволяют выписать уравнение на стационарное распределение и затем прийти к выражению для показателя Ляпунова. Трудность, однако, состоит в том, что на практике подобные вычисления удастся провести аналитически лишь в ряде простейших случаев. В контексте уравнения Якоби представляется возможным только численный подход. Одним из первых результатов в этом направлении стало прямое численное моделирование большого числа реализаций поля Якоби, предпринятое в работе [246], и последующее усреднение для оценки показателя Ляпунова. Хотя в работе исследовались различные генераторы и численные схемы и результаты оказывались относительно устойчивыми, неясным оставался вопрос насколько объем выборки и период моделирования позволяет точно оценивать показатель Ляпунова, определение которого основано на предельном переходе. Полученные результаты нуждались в независимом подтверждении, основанном на вычислении инвариантной меры. По-видимому, первый численный результат нахождения инвариантной меры для уравнения Якоби был представлен в серии работ [242; 243]. Замечательным образом, результаты оказались близки между собой, что открыло путь для дальнейших более детальных исследований.

В контексте физики Солнца (теории солнечного динамо) возникают вопросы не только о росте магнитного поля, но и о росте магнитной энергии, или, иными словами, второго статистического момента. Обсудим проблему вычисления скорости роста второго момента на примере модельной задачи – уравнения Якоби. Как было показано в работе [204], нахождение инва-

риантной меры, вообще говоря, еще не позволяет дать ответ относительно второго момента. Соответственно, возникает отдельная задача о вычислении скорости роста второго момента. Возможность ответа на этот вопрос существенно зависит от модели случайного процесса, которым определяется параметр кривизны в уравнении Якоби. Например, в работе [238] скорость роста второго момента была вычислена для модели флуктуаций кривизны в виде белого шума. Однако подобная модель выглядит не вполне правдоподобной с точки зрения представлений о распределении кривизны в реальных физических системах. Здесь можно провести аналогию с известной работой А.П. Казанцева [244], в которой короткокоррелированное использовалось приближение для вывода уравнения для корреляционного тензора магнитного поля и затем для оценки магнитной энергии. Отметим, что модель с обновлениями предполагает конечное время памяти.

Существует и другой подход, который предполагает рассмотрение только начальной стадии эволюции магнитного поля. Для этой стадии полагается, что затравочное магнитное поле, вовлеченное в действие динамо, является крупномасштабным и омическими потерями можно пренебречь. Используя лагранжевы координаты, можно свести уравнение эволюции магнитного поля к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, после чего открывается перспектива численных и аналитических исследований.

Таким образом, хотя в теории динамо на сегодня разработан широкий спектр моделей, потенциально допускающих аналитическое и/или численное исследование, при этом аналитические модели опираются на ряд существенных упрощений, которые не свойственны реальным физическим системам, равно как и численное исследование вынуждено использовать упрощения, не свойственные исходным аналитическим моделям. Так, при построении моделей динамо среднего поля возникает проблема связи средней электродвижущей силы со средним магнитным полем (проблема замыкания). Для решения этой проблемы обычно предлагаются феноменологические соотношения (см., например, [183]), однако в модели по-прежнему остается большое количество свободных параметров, требующих калибровки.

Для оценки параметров модели может применяться постобработка прямых численных моделирований МГД-турбулентности (например, [174]), ансамблевое моделирование [163] или простой перебор. По-видимому, первая попытка, основанная на идеях машинного обучения, была недавно принята в работе [31], где модель динамо была выведена с использованием разреженной регрессии на наборе базисных функций.

В диссертационной работе исследование будет сосредоточено на одном из центральных и наиболее важных аспектов механизма динамо – функции подавления альфа-эффекта. Целью исследования будет вывод этой функции непосредственно из наблюдательных данных с использованием подхода нейродифференциальных уравнений ([50]). Этот подход не требует феноменологических предположений и дает реконструкцию нелинейной обратной связи на основе данных.

Основная идея нейродифференциальных уравнений состоит в оптимизации параметров теоретических физических моделей (представленных в виде системы дифференциальных уравнений) относительно некоторой целевой функции, включающей, например, наблюдательные данные. Этот процесс может использоваться для решения задачи ассимиляции данных. На самом деле методы оценки параметров в системах дифференциальных уравнениях (СДУ) достаточно хорошо разработаны (см., например, [68], [40] и недавние обзоры [193], [147]). Ключевой особенностью нейродифференциального подхода является то, что когда параметры являются неизвестными функциями, они могут быть представлены с помощью нейронных сетей, способных улавливать сложные соотношения, а обучаемые параметры нейронных сетей рассматриваются как параметры СДУ и оптимизируются градиентными методами. Различные приложения этого подхода были недавно представлены в обзоре [168]. Наиболее актуальные приложения для физики Солнца до сих пор ограничивались лишь отдельными аспектами в моделировании турбулентности (см. [32; 229]).

Изучение нейродифференциального подхода будет разумно начать с простейших маломодовых моделей солнечного динамо (см., например, [251]), которые, однако, в состоянии воспроизводить основные особенности солнечной цикличности. Выбор простых моделей мотивирован необ-

ходимостью разделить обсуждение эффектов, присущих самой структуре динамо-модели, от эффектов, связанных с процессом подбора параметров. В рамках маломодовой динамо-модели, для которой физические механизмы хорошо известны, такое разделение проводить наиболее удобно.

Обратимся к вопросу обработки наблюдательных данных, которые служат основой для калибровки теоретических моделей. Одним из наиболее часто используемых источников данных является каталог наблюдений спутником SDO, который производит съемку диска Солнца каждые 12 секунд, т.е. 7 200 изображений в день лишь только для одной области спектра. Общий объем данных за несколько дней работы этого аппарата уже превышает возможности хранения многих стандартных компьютеров. В связи с таким объемом данных, в исследованиях обычно рассматривают либо сильно прореженную выборку, например, одно изображение в день, либо, если берется максимальное разрешение по времени, но концентрируются на очень ограниченных по времени событиях, например, солнечных вспышках. С одной стороны, это позволяет применять широкий спектр методов и моделей, разработанных ранее, когда наблюдения действительно велись с периодом раз в сутки, в том числе, методы ручной обработки. Но с другой стороны, при этом остается незадействованной весь основной массив данных, несущий, потенциально, новую информацию для физики Солнца. Большинство из предлагаемых ранее подходов и не ставили перед собой подобных задач в силу отсутствия тех возможностей, что есть сегодня. Для примера рассмотрим одну из задач, возникающих на начальной стадии анализа изображений, – сегментация активных областей.

В целом, задача сегментации изображений состоит в поиске на изображении объектов определенной природы. В отличие от задачи детекции, для которой достаточно обвести объект прямоугольной рамкой, задача сегментации состоит в точном попиксельном определении контура объекта. Решение задачи сегментации, например, активных областей на Солнце, служит первым шагом во многих исследованиях по солнечной активности и для построения прогнозов. Далее сосредоточимся на конкретном типе активной области – корональных дырах.

Корональные дыры (КД) – это области открытых магнитных полей

Таблица 1.1: Обзор алгоритмов сегментации.

Авторы	Название алгоритма	Данные
[96]	—	10830 Å и магнитограмма
[195]	—	171, 195, 304 Å и магнитограмма
[141]	—	195 Å
[178]	—	193 Å
[225]	SPoCA	193 Å или 195 Å или (171 и 195 Å)
[150]	—	(193 или 195 Å) и магнитограмма
[81]	CHIMERA	171, 193 и 211 Å
[94]	CATCH	193 Å и магнитограмма

в солнечной короне. Они обычно связаны с высокоскоростными потоками солнечного ветра [5; 140] и позволяют оценить параметры солнечного ветра и соответствующие геомагнитные эффекты [2; 165; 167; 182; 185]. Точная процедура сегментации КД необходима для более детального исследования этой взаимосвязи и реализации процедур прогнозирования космической погоды.

КД лучше всего видны на изображениях в диапазоне волн 193 Å. Они выглядят как темные области из-за их более низкой плотности и температуры в отличие от окружающей атмосферы [175]. КД имеют нерегулярную форму и могут занимать более 10% видимой солнечной полусферы.

Для сегментации КД обычно применяются подходы, основанные на пороговых фильтрах. Например, в работе [141] КД определяются на основе гистограммы интенсивности пикселей. Модель Automatic Solar Synoptic Analyzer (ASSA, [99]) также включает в себя пороговую обработку, но на основе медианного значения пикселей. Морфологический анализ изображений, пороговый анализ и сглаживание использовались в работе [96] для обнаружения КД на солнечных спектрогелиограммах. В работах [195] и [81] используется сразу несколько спектральных линий, например 171 Å, 195 Å и 304 Å. Сегментация на основе метода нечеткой кластеризации используется в алгоритме SPOCA [22; 225]. Для наглядности, различные алгоритмы собраны в таблице 1.1.

В то время как контрастирование, пороговое выделение и геометриче-

ские преобразования активно использовались в компьютерном зрении в течение многих лет, относительно недавние публикации показывают, что алгоритмы компьютерного зрения, основанные на нейронных сетях, могут обеспечить значительно лучшие результаты в обнаружении объектов по сравнению с традиционными алгоритмами (см. обзор [49]). В приложении к солнечным данным методы глубокого обучения также применяются для улучшения детализации изображений (например, [66]) или, например, для оценки горизонтальных скоростей на фотосфере [12].

Приложение нейронных сетей (или более общих методов машинного обучения) к задачам сегментации активных областей дает ряд возможностей, выходящих за рамки возможностей стандартных алгоритмов. Например, нейронные сети могут обучиться методике выделения активных областей, которая использовалась, например, в какой-либо обсерватории или конкретным астрономом. Применив обученную сеть к большему временному интервалу, можно создать однородный набор, отражающий заданную методику. Подобного свойства трудно добиться с помощью прямого алгоритма, поскольку многие аспекты индивидуального восприятия изображений трудно формализовать в явном виде. Такой расширенный набор данных был бы интересен, например, для калибровки ряда чисел солнечных пятен (см. обзор проблемы в работе [55]).

В целом можно отметить, что машинное обучение сегодня широко вовлекается в задачи физики Солнца и рассматривается как инструмент, позволяющий исследовать и выявлять взаимосвязи в больших и часто разнородных массивах данных, что ранее было недоступно для стандартных методов. Новые связи являются предметом для обсуждения с точки зрения теорий и могут служить основой для построения более точных и многофакторных моделей прогноза космической погоды. Недавний большой обзор [13] показывает, что методы машинного обучения сегодня апробируются практически по всем областям физики Солнца. Модели машинного обучения применяются, в частности, для

- сегментации объектов на диске Солнца и синоптических картах
- классификации изображений

- предсказания солнечных вспышек, КВМ, протонных событий
- прогноза параметров космической погоды
- прогноза солнечного цикла
- трехмерной реконструкции солнечной короны
- калибровки и снижению шума на изображениях
- повышении детализации изображений
- реконструкции изображений с дальней стороны Солнца
- создания синтетических наборов данных.

Следующим шагом после проведения сегментации активных областей может быть вопрос о количественной оценке областей и о том, как использовать информацию об активных областях для моделей прогноза солнечной активности и космической погоды. Есть не так много моделей, которые способны напрямую обрабатывать карты активных областей и на их основе делать расчеты или прогнозы. Большинство моделей все же опирается на сводную количественную информацию об областях, например, площадь, координаты центра, протяженность. Можно предположить, что помимо этих общих характеристик активной области, у нее могут быть и другие характеристики, которые могут быть полезны, например, в моделях прогноза. Вопрос о том, как найти и как вычислить эти новые полезные параметры составляет существенную часть данной диссертационной работы. В качестве объекта исследования будут рассмотрены группы солнечных пятен. Конечно, можно было бы проводить исследование на примере, скажем, корональных дыр, однако представляется разумным начать именно с групп пятен по нескольким причинам. Во-первых, доступный ряд однородных данных по пятнам значительно шире, чем по корональным дырам. Во-вторых, для пятен существует несколько развитых систем классификации, которые тоже в своем роде можно рассматривать как параметр активной области и использовать в анализе.

Формально, возникает вопрос о том, как численно описать структуру групп солнечных пятен, сохранив как можно больше информации о ее строении. Исходными данными могут служить изображения в белом свете, в котором пятна наблюдаются как темные структуры на солнечной фотосфере. Поскольку солнечные пятна связаны с сильными магнитными полями, дополнительным признаком могли бы быть карты магнитных полей, однако сосредоточимся на изображениях солнечного диска только в белом свете, чтобы иметь возможность распространить результаты работы на исторические наблюдения, для которых отсутствует информация о магнитном поле.

Стоит отметить, что сама по себе задача разделения пятен на группы во многих случаях оказывается достаточно сложной. Здесь учитывается не только близость между пятнами и компактность, но и их эволюция как отдельного комплекса. Тем не менее, как было отмечено в работе [100], выделение групп и подсчет числа групп так же важно для оценки солнечной активности, как и количество солнечных пятен.

Ранее было несколько попыток автоматизировать процедуру выделения групп (см., например, [1; 59]), однако ручная обработка данных по-прежнему остается эталонной. В данном исследовании за основу будут взяты группы солнечных пятен, выделенные астрономами-наблюдателями Кисловодской горной астрономической станцией.

Существует несколько основных параметров группы солнечных пятен (без учета магнитной структуры), таких как площадь, вытянутость, количество пятен, наклон, которые иногда дополняются другими простыми морфологическими свойствами. Важным параметром также является класс группы солнечных пятен в соответствии с Цюрихской или модифицированной Цюрихской системами классификации [156]. Классы кодируют вместе площадь, вытянутость, число пятен и структурную информацию о группе.

Однако вполне очевидно, что приведенный выше набор параметров далеко не полный в том смысле, что он не позволяет восстановить исходный образ группы. Было несколько попыток ввести дополнительные морфологические параметры, например, в работах [207], [212] и [151]. Однако

проблема создания полного описания остается открытой.

В диссертационной работе будет представлен подход к параметризации групп солнечных пятен, основанный на идеях машинного обучения и формирующий компактный, но относительно полный набор параметров групп солнечных пятен. Идея состоит в том, чтобы отобразить изображения групп солнечных пятен в некоторое низкоразмерное пространство. Это отображение будет построено путем обучения модели вариационного автоэнкодера и отбора признаков с помощью метода главных компонент. Отметим, что модели автоэнкодеров на основе нейронных сетей уже использовались в некоторых работах, например, в работе [51] для получения полезных характеристик для предсказания солнечных вспышек. Особенностью исследования, представленного в диссертационной работе, будет подробный анализ скрытого пространства и демонстрация того, что по крайней мере некоторые из скрытых характеристик имеют вполне ясную физическую интерпретацию.

Следующим шагом возникает естественное желание распространить разработанные методы на как можно более длинный ряд наблюдений. Известно, что наблюдения солнечных пятен доступны уже за период более 400 лет. Растущее в последнее десятилетие количество оцифрованных версий исторических книг и каталогов способствовало вовлечению исторических данных в различные исследования. Обзор использования исторических зарисовок солнечных пятен был представлен, например, в работе [10]. В частности, ранее были опубликованы результаты восстановления данных из каталогов Кэррингтона [146], анализ положения солнечных пятен на синоптических картах Густава Шпёрера [69] и частичная реконструкция синоптических карт, составленных Альфредом Вольфером в Цюрихе, [214]. С помощью методов автоматического распознавания символов было выполнено восстановление исторических данных из каталогов обсерватории Эбро [60].

Одним из важнейших и наиболее длительным рядом данных по солнечной активности является каталог Королевской Гринвичской обсерватории. В нем содержится информация о положении и площади групп солнечных пятен. Каталог составлялся на основе наблюдений нескольких обсервато-

рий по всему миру, благодаря чему менее подвержен влиянию погодных условий и охватывает почти каждый день более чем столетнего периода [230]. Однако в нем нет информации об отдельных пятнах и контурах. Более того, в работах [56] и [58] утверждается, что до 1915 информация о группах в нем менее полная, чем в других каталогах. Эта проблема актуальна, например, при обсуждении относительно низкого цикла 14 в начале 20 века, который иногда связывают со столетним минимумом.

Вопрос о том, насколько наблюдаемое в период около 1900 года снижение активности действительно связано с минимумом или является следствием неполноты данных требует детального изучения на основе восстановления информации из различных источников данных. В целом, известно, что Солнце проявляет циклическую магнитную активность, но важно отметить, что она далеко не является строго периодической (см., например, [38; 90]). Хотя отдельные циклы выглядят немного отличающимися друг от друга, их последовательность также подвержена долгосрочным изменениям. Наиболее заметным изменением в цикличности является Маундеровский минимум во второй половине 17-го и начала 18-го века, во время которого наблюдалось очень мало солнечных пятен. Маундеровский минимум был широко изучен с точки зрения числа солнечных пятен или активных дней [44; 80; 92; 162; 223], относительно доступности и надежности наблюдательных данных [43; 101; 221], и через косвенные показатели солнечной активности [17; 26; 36; 158; 219].

Другим известным примером изменения цикличности является минимум Дальтона около 1800 года, хотя он менее выражен и до недавнего времени был менее изучен, чем, например, минимум Маундера. Интересно, что количество наблюдательных данных в этот период также меньше – особенно непосредственно перед минимумом Дальтона. Предыдущие исследования этого периода были посвящены в основном оценке числа солнечных пятен или групп солнечных пятен [42; 164; 211; 218]. Ряд недавних результатов позволил восстановить положения некоторых солнечных пятен по оригинальным рисункам солнечных пятен на солнечном диске [91; 93]. Отметим также, что данные по солнечным пятнам в период, предшествующий минимуму Дальтона, можно найти в каталогах Штаудахера [7],

Хорребоу [126], а также Гамильтона и Гимингема [8].

Период минимума Дальтона имеет еще одну особенность, связанную с циклом 4. Цикл 4 интересен тем, что он начался в 1784 году и либо продолжался по крайней мере, до 1798 года, либо за ним последовал очень слабый цикл едва различимый по числу солнечных пятен. Наличие дополнительного цикла должно было бы проявиться в наблюдениях пятен на высоких широтах. В работе [222] авторы, основываясь на данных Армага и Штаудахера, действительно обнаруживают, что несколько пятен появились на более высоких гелиографических широтах с середины четвертого цикла.

Стоит также отметить, что минимум Дальтона был впервые замечен не по записям солнечных пятен а по каталогам Джона Дальтона с наблюдениями полярных сияний [199].

В настоящей работе будут рассмотрены оба периода минимума – около 1900 и 1800 годов – и информация об этих периодах будет дополнена за счет восстановления координат солнечных пятен из каталогов Цюрихской обсерватории и наблюдений французского астронома Оноре Фложерга. Отметим, что оцифровка этих каталогов проводится впервые.

Перейдем к непосредственному описанию методов и представлению результатов.

Глава 2.

Оценка параметров роста векторных полей в случайных средах

Целью предстоящего исследования будет разработка математического аппарата для оценки скоростей роста статистических моментов векторных полей в случайных средах и сопоставление с оценками, получаемыми путем численного моделирования. Формулировка примеров подобных задач, возникающих в физике Солнца, требует конкретизации параметров среды и системы дифференциальных уравнений, что может смещать акцент с развития общего подхода. Поэтому представляется разумным начать с более простых примеров, тем не менее содержащих некоторые свойства более сложных систем, на их основе выработать общий подход, и затем переходить к задачам физики Солнца.

Начнем исследование с модельного примера, предложенного Я.Б. Зельдовичем в работе [239] для описания характера разбегания двух изначально близких световых лучей во Вселенной, которая местами обладает случайной отрицательной или положительной кривизной, но при этом в среднем является однородной. Геометрическая интерпретация этого примера описывается в терминах геодезических на двумерном многообразии, выходящих под малым углом из одной точки (см. схематичное изображение на

рисунке 2.1). На многообразии с постоянной нулевой кривизной геодезические будут удаляться друг от друга с линейной скоростью (относительно расстояния вдоль одной из геодезических). На многообразии с постоянной отрицательной кривизной, скорость разбегания будет экспоненциальной. На многообразии с постоянной положительной кривизной геодезические будут то удаляться, то сближаться и образовывать сопряженные точки. На многообразиях с непостоянной кривизной, расстояние между геодезическими в первом приближении описывается величиной поля Якоби, которое, в свою очередь, удовлетворяет дифференциальному уравнению, известному, как уравнение Якоби.

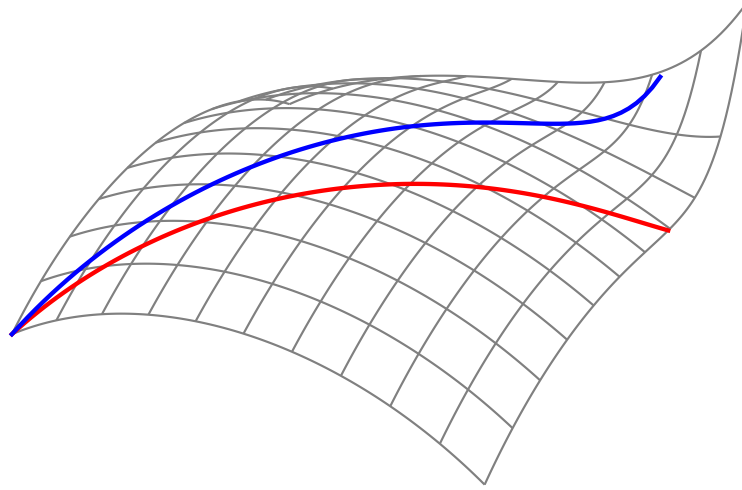


Рис. 2.1: Схематичное изображение геодезических на двумерном многообразии, выходящих из одной точки под малым углом.

Таким образом, математическая формулировка примера, предложенного Зельдовичем, сводится к уравнению Якоби со случайным параметром кривизны. На основе этого примера рассмотрим различные сценарии, которые приводят к усилению среднего векторного поля и энергии в случайных средах, и сосредоточимся на оценке скоростей роста соответствующих величин, опираясь на методы, предложенные в [203].

Первый сценарий предполагает, что параметр кривизны полностью распределен в отрицательной области значений. В этом случае поле Якоби растет экспоненциально. Во втором случае параметр кривизны имеет симметричное относительно нуля распределение. В работе Зельдовича [239]

для этого случая обосновывается экспоненциальный рост, скорость которого предстоит оценить. В третьем случае предполагается, что параметр кривизны распределен полностью в положительной области. В последнем случае обнаруживается, что случайные колебания входят в резонанс и дают умеренный, но все же экспоненциальный рост среднего поля Якоби и его высших статистических моментов. Одним из основных результатов изучения уравнения Якоби станет сравнение относительной эффективности всех трех механизмов, описанных выше.

Затем разработанный подход по оценке параметров роста векторного поля и его моментов будет перенесен на уравнение эволюции магнитного поля в случайном потоке проводящей среды.

2.1. Модель поля Якоби

Напомним формулировку уравнения Якоби и идею модели с обновлениями. Уравнение Якоби, рассматриваемое для $x \in [0, +\infty)$, имеет вид

$$y'' + K(x)y = 0. \quad (2.1)$$

Будем предполагать, что $K(x)$ – случайный процесс, постоянный на интервалах $\Delta_n = [n\Delta, (n+1)\Delta)$, называемых интервалами обновления. Параметр Δ можно рассматривать как время памяти. Постоянные значения $K(x) = K_n$ на этих интервалах являются независимыми случайными величинами с одинаковым распределением.

Отметим, что уравнение Якоби описывает расхождение двух геодезических линий, распространяющихся из одной точки двумерного риманова пространства. В этом выражении параметр K связан с гауссовой кривизной вдоль геодезической линии (см., например, [136]).

Решение $y(x)$ уравнения Якоби будем называть полем Якоби. Средняя скорость роста поля Якоби оценивается с помощью показателя Ляпунова

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n\Delta} \langle \ln |y(n\Delta)| \rangle. \quad (2.2)$$

Скорость роста статистического момента порядка p поля Якоби определяются следующим образом:

$$\gamma_p = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2pn\Delta} \ln \langle |y(n\Delta)|^p \rangle. \quad (2.3)$$

Ниже рассмотрим только второй момент ($p = 2$), который можно интерпретировать как среднюю энергию, однако обсуждаемые методы допускают распространение на более высокие моменты.

Введем вспомогательные переменные $z_1 = y$, $z_2 = y'\Delta$, чтобы получить из уравнения (2.1) систему уравнений первого порядка:

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -K\Delta \\ 1/\Delta & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

В матричном виде система (2.4) запишется как

$$\mathbf{z}' = \mathbf{z}B. \quad (2.5)$$

Решением этой системы является

$$\mathbf{z}(n\Delta) = \mathbf{z}_0 \exp(B_1\Delta) \exp(B_2\Delta) \dots \exp(B_n\Delta), \quad (2.6)$$

где B_i – реализация случайной матрицы B на i -ом интервале обновления. Обозначая $k = K\Delta^2$, матричная экспонента $\hat{B} = \exp(B\Delta)$ может быть выражена в явном виде

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} \cos \sqrt{k} & -\sqrt{k} \sin \sqrt{k} \\ \frac{\sin \sqrt{k}}{\sqrt{k}} & \cos \sqrt{k} \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

что упрощает исследование решений. Заметим, что хотя $\sqrt{k}$ может быть комплексной величиной, матрица $\hat{B}$ остается вещественной.

Для иллюстрации результатов, полученных далее в этой работе, рассмотрим три конкретных распределения K , соответствующих трем обсуж-

даемым сценариям, а именно, рассмотрим K с равномерным распределением в отрицательной области $[-1, 0]$, в симметричной области $[-1/2, 1/2]$, и в положительной области $[0, 1]$. Во всех случаях K имеет одинаковое стандартное отклонение (дисперсию). На рисунке 2.2 показаны примеры реализации поля Якоби $|y(x)|$, полученные из (2.6) для каждого случая распределения K . Можно отметить, что все реализации растут, причем скорость роста специфична для каждого распределения вероятностей. Дальнейшей целью работы является количественная оценка и сравнение скоростей роста.

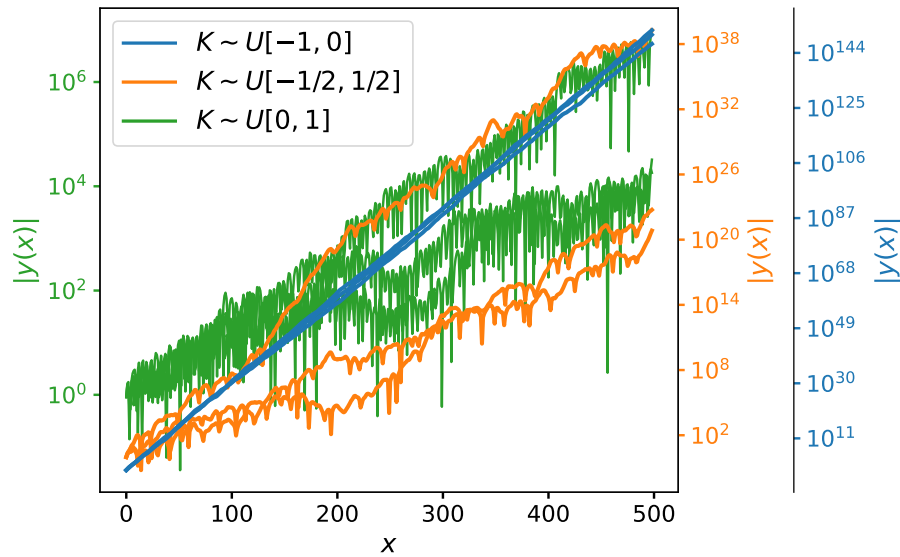


Рис. 2.2: Абсолютные значения выборочных реализаций поля Якоби для различных распределений K . Цвета соответствуют различным распределениям K . Абсолютные значения трех выборочных реализаций показаны для каждого распределения. Ось y показана в логарифмическом масштабе, и каждое распределение показано отдельной осью y (цвета осей соответствуют цветам графиков). Отдельные пики вниз соответствуют моментам, когда поле Якоби меняет знак и абсолютное значение поля Якоби приближается к нулю. Рисунок из работы [109].

2.2. Вывод показателя Ляпунова и скоростей роста моментов поля Якоби

Математическая теория о произведении случайных матриц, разработанная в [77; 78], позволяет свести вычисление показателя Ляпунова от предельного выражения (2.2) к интегрированию по некоторой инвариантной мере (также известной как стационарное распределение). Следуя рассуждениям, предложенным в [217], можно показать, что последовательность матричных экспонент $\hat{B}_i$ порождает эргодическую марковскую цепь на единичной сфере S^1 с отождествленными диаметрально противоположными точками. Условие эргодичности гарантирует, что любое начальное распределение сходится к единственному стационарному распределению (инвариантной мере).

В [204] было предложен способ численного нахождения переходной плотности $p(\varphi, \psi)$ марковской цепи. С ее помощью записывается уравнение на стационарное распределение

$$\pi(\psi) = \int \pi(\varphi) p(\varphi, \psi) d\varphi. \quad (2.8)$$

Здесь φ и ψ находятся в $(-\pi/2, \pi/2]$ и задают координаты на единичной сфере S^1 с отождествленными диаметрально противоположными точками.

Для нахождения переходной плотности удобно показать, что переменные φ и ψ связаны уравнением

$$\tan \psi = \frac{\tan \varphi - \xi \tan \sqrt{k}}{1 + \tan \varphi \tan \sqrt{k}/\sqrt{k}}, \quad (2.9)$$

где $k = K\Delta^2$. Таким образом, учитывая распределение K , можно вычислить плотность перехода $p(\varphi, \psi)$.

В общем случае, плотность перехода не может быть выражена аналитически и выводится численно. Однако и численный подход имеет свои трудности из-за различных особенностей уравнения (2.9). Опуская технические детали этого процесса, представим на рисунке 2.3 окончательные

численные результаты для стационарного распределения.

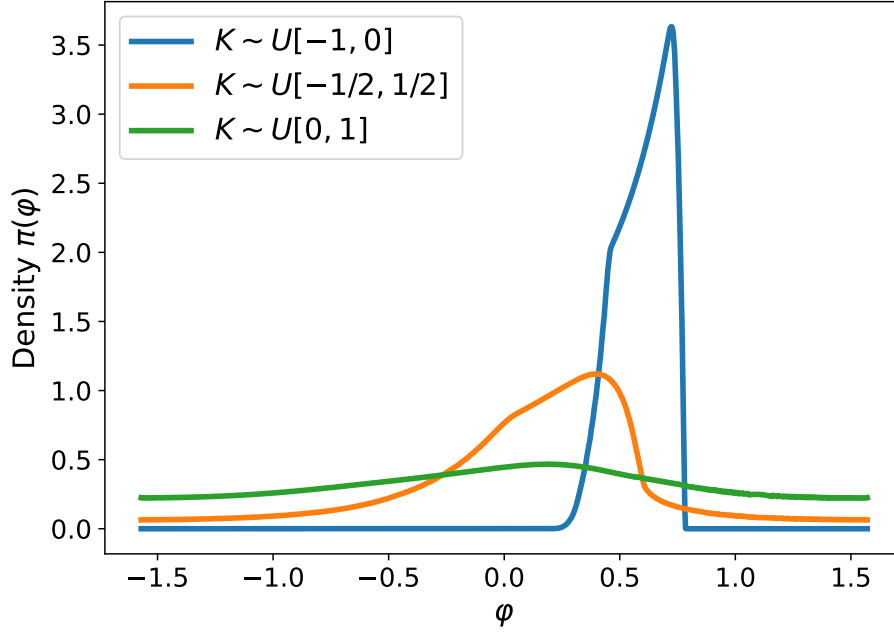


Рис. 2.3: Стационарное распределение $\pi(\varphi)$ для различных распределений K . Рисунок из работы [109].

Для найденного стационарного распределения $\pi(\varphi)$ и распределения $p(K)$ параметра кривизны, показатель Ляпунова вычисляется путем численной аппроксимации интеграла

$$\lambda = \int \log \|\mathbf{w}B(K)\| \pi(\varphi) p(K) d\varphi dK, \quad (2.10)$$

где $\mathbf{w}$ – единичный вектор $(\cos \varphi, \sin \varphi)$.

В таблице 2.1 приведены показатели Ляпунова, полученные для равномерных распределения K при условии, что $\Delta = 1$. В согласии с рисунком 2.2, во всех случаях обнаруживается положительная средняя скорость роста поля Якоби. Для положительных K это рост связывается с резонансом осциллирующих решений, тогда как для отрицательных и переменных K рост формируется за счет интервалов, где K отрицательно. При этом скорость роста, обусловленная резонансом, на порядок слабее по сравнению с другими сценариями.

Положительные значения показателя Ляпунова означают, что абсолютные значения отдельных реализаций поля Якоби будут расти экспоненци-

K	λ
$U[-1, 0]$	0.693
$U[-1/2, 1/2]$	0.133
$U[0, 1]$	0.018

Таблица 2.1: Показатели Ляпунова поля Якоби для различных распределений K .

ально быстро. В то же время, среднее значение поля Якоби может убывать, как показано ниже.

Рассмотрим усреднение уравнения (2.6):

$$\langle \mathbf{z} \rangle(n\Delta) = \mathbf{z}_0 \langle \hat{B} \rangle^n. \quad (2.11)$$

Отсюда следует, что среднее поле $\langle \mathbf{z} \rangle$ растёт как старшее собственное значение матрицы $\langle \hat{B} \rangle$. Более точно, скорость роста γ среднего поля $\langle \mathbf{z} \rangle$ получается как

$$\gamma = \frac{1}{2\Delta} \ln |\lambda_{(1)}|, \quad (2.12)$$

где $\lambda_{(1)}$ – старшее собственное значение матрицы $\langle \hat{B} \rangle$. Заметим, что скорость роста γ среднего поля Якоби не следует путать со скоростью роста γ_1 , определенной в (2.3). Разница в том, что γ_1 относится к росту среднего абсолютного значения поля Якоби, в то время как γ относится к росту абсолютного значения среднего поля Якоби.

Для малых Δ матрица $\langle \hat{B} \rangle$, $\lambda_{(1)}$ и γ могут быть аппроксимированы в терминах первых нескольких статистических моментов случайной величины K , т.е. в терминах $\mu = \langle K \rangle$ и $\sigma^2 = \text{var} K$. Рассмотрим, как и ранее, случаи, когда K распределена (1) в отрицательной области, (2) в области, симметричной относительно нуля, и (3) в положительной области.

В первом случае (K отрицательно) имеем

$$\gamma = \frac{1}{2} \sqrt{-\mu} + \frac{1}{24} \frac{\sigma^2}{\sqrt{-\mu}} \Delta^2 + O(\Delta^3) \dots \quad (2.13)$$

Заметим, что γ не уходит в ноль при $\Delta \rightarrow 0$, а стремится к некоторому положительному значению. Вернемся к этому обстоятельству позже.

Для симметрично-распределенного K получаем

$$\gamma = \frac{\sqrt{6}}{12}\sigma\Delta + O(\Delta^3) \dots, \quad (2.14)$$

и $\gamma \rightarrow 0$ при $\Delta \rightarrow 0$.

Наконец, для положительного K получаем

$$\gamma = -\frac{1}{48}\sigma^2\Delta^3 + O(\Delta^4). \quad (2.15)$$

Отметим, что при малых Δ скорость роста γ становится отрицательной.

Для иллюстрации рассмотрим равномерные распределения параметра K , аналогичные тем, которые были рассмотрены для численной оценки показателя Ляпунова. Во всех случаях $\sigma^2 = 1/12$, но $\mu = -1/2$ для $K \sim U[-1, 0]$, $\mu = 0$ для $K \sim U[-1/2, 1/2]$, и $\mu = 1/2$ для $K \sim U[0, 1]$. На рисунке 2.4 показаны аналитические приближения γ в сравнении численными оценками этой величины. Для численных оценок было смоделировано 10^6 реализаций случайных матриц $\hat{B}$, вычислено старшее собственное значение усредненной по выборке матрицы, а затем вычислена γ . Можно видеть, что аналитические приближения (2.13)–(2.15) находятся в согласии с численным моделированием, по крайней мере, для малых Δ . Конечно, можно улучшить согласие добавив члены более старших порядков в (2.13)–(2.15), однако эти члены будут включать более высокие статистические моменты случайной величины K .

Далее, следуя работе [203], скорость роста $\langle \|\mathbf{z}\|^2 \rangle$ можно связать со скоростью роста произведения матриц. Чтобы показать это, введем вектор $\mathbf{q}$ попарных произведений компонент вектора $\mathbf{z}$, т.е.

$$\mathbf{q} = (z_1 z_1, z_1 z_2, z_2 z_1, z_2 z_2). \quad (2.16)$$

Взяв производную $\mathbf{q}$ и используя уравнение Якоби в форме (2.5), можно получить уравнение

$$\mathbf{q}' = \mathbf{q}A. \quad (2.17)$$

Аналогично (2.6), решение $q(n\Delta)$ представляется произведением независи-

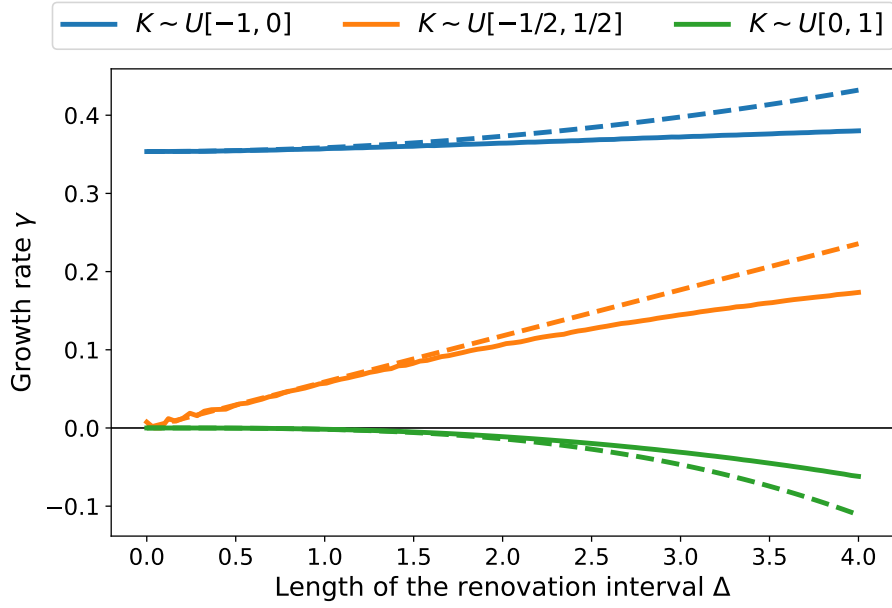


Рис. 2.4: Скорость роста γ среднего поля Якоби для различных распределений K . Сплошные линии показывают численные оценки, пунктирные – аналитические приближения. Рисунок из работы [109].

мых и одинаково распределенных матричных экспонент $\exp(A_i \Delta)$. Отсюда следует, что

$$\langle \mathbf{q} \rangle(n\Delta) = q_0 \langle \exp(A\Delta) \rangle^n \quad (2.18)$$

и скорость роста среднего вектора $\langle \mathbf{q} \rangle$ дается старшим собственным значением усредненной матричной экспоненты $\langle \exp(A\Delta) \rangle$. Но первая компонента вектора $\langle \mathbf{q} \rangle$ равна $\langle z_1^2 \rangle = \langle y^2 \rangle$, и поэтому старшее собственное значение также определяет скорость роста $\langle y^2 \rangle$.

Матричная экспонента $\hat{A} = \exp(A\Delta)$ может быть найдена явно (см. [203]) и имеет вид

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \cos^2 \sqrt{k} & \frac{\sin 2\sqrt{k}}{2\sqrt{k}} & \frac{\sin 2\sqrt{k}}{2\sqrt{k}} & \frac{\sin^2 \sqrt{k}}{k} \\ \frac{-\sqrt{k} \sin 2\sqrt{k}}{2} & \cos^2 \sqrt{k} & -\sin^2 \sqrt{k} & \frac{\sin 2\sqrt{k}}{2\sqrt{k}} \\ \frac{-\sqrt{k} \sin 2\sqrt{k}}{2} & -\sin^2 \sqrt{k} & \cos^2 \sqrt{k} & \frac{\sin 2\sqrt{k}}{2\sqrt{k}} \\ k \sin^2 \sqrt{k} & \frac{-\sqrt{k} \sin 2\sqrt{k}}{2} & \frac{-\sqrt{k} \sin 2\sqrt{k}}{2} & \cos^2 \sqrt{k} \end{pmatrix}, \quad (2.19)$$

где $k = K\Delta^2$ аналогично (2.7). Для малых Δ средняя матричная экспонента $\langle \hat{A} \rangle$ и его старшее собственное значение $\lambda_{(1)}$ могут быть аппроксимирова-

ны в терминах статистических моментами случайной величины K . Тогда, принимая во внимание связь между старшим собственным значением $\lambda_{(1)}$ и скоростью роста γ_2

$$\gamma_2 = \frac{1}{4\Delta} \ln |\lambda_{(1)}|, \quad (2.20)$$

получаем следующие оценки. Для K , распределенных в отрицательной области (заметим, что $\mu < 0$ в этом случае) получаем

$$\gamma_2 = \frac{1}{2} \sqrt{-\mu} - \frac{1}{16} \frac{\sigma^2}{\mu} \Delta + O(\Delta^2). \quad (2.21)$$

Для симметрично-распределенного K :

$$\gamma_2 = \frac{1}{4} (2\sigma^2)^{\frac{1}{3}} \Delta^{\frac{1}{3}} + O(\Delta). \quad (2.22)$$

Для K , распределенного в положительной области:

$$\gamma_2 = \frac{1}{8} \frac{\sigma^2}{\mu} \Delta + O(\Delta^2). \quad (2.23)$$

Можно отметить, что для K , распределенных в отрицательной области $\gamma_2 \not\rightarrow 0$ как $\Delta \rightarrow 0$. Этому факту можно дать следующую интерпретацию. Скорости роста (2.21) и (2.13) относятся к модели, где решение растет в каждом интервале обновления. При уменьшении Δ эффекты случайности исчезают, и получаем положительную скорость роста, связанную со средней кривизной, т.е. неслучайный вклад в неустойчивость. Рост (2.23) обусловлен с неустойчивостью, неразрывно связанной со случайными флуктуациями в кривизне. Когда $\Delta \rightarrow 0$, шум исчезает, и рост прекращается. Интересно также отметить, средняя средняя энергия при этом растет экспоненциально согласно (2.23).

На рисунке 2.5 сопоставлены оценки скорости роста γ_2 полученные численно и согласно (2.21)–(2.23) для трех случаев равномерного распределения K . Численный подход аналогичен тому, который был использован на рисунке 2.4. Можно видеть, что аналитические приближения согласуются с численным моделированием для малых Δ . Согласие для больших Δ может быть улучшено путем добавлением членов высших порядков последова-

тельно (2.21)–(2.23), но они будут включать более высокие статистические моменты случайной переменной K .

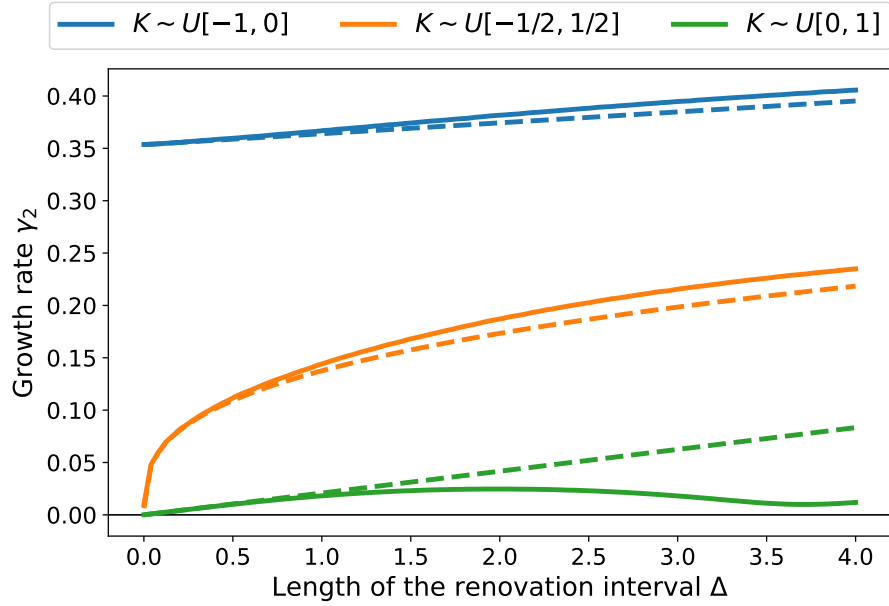


Рис. 2.5: Скорость роста γ_2 для различных распределений K . Сплошные линии показывают численные оценки, пунктирные линии показывают аналитические результаты. Рисунок из работы [109].

Резюмируя полученные результаты, можно сделать вывод, что самовозбуждение со случайными положительными скоростями роста более эффективно, чем чередование самовозбуждения и колебаний, которое, в свою очередь, более эффективно, чем резонансный эффект случайных осцилляций. Этот вывод выглядит вполне естественным, но тот факт, что случайные колебания приводят к росту неустойчивости, не столь очевиден. Хотя последнее утверждение следует из общей математической теории [217], количественная взаимосвязь между тремя вышеупомянутыми темпами роста ранее не изучалась.

В конце главы еще вернемся к обсуждению полученных результатов в контексте теории динамо, а пока перейдем к вопросу приложения данного подхода к оценке скоростей роста в задаче о росте магнитного поля.

2.3. Метод оценки скоростей роста статистических моментов векторного поля в модели с обновлениями

Обобщим подход к вычислению старших статистических моментов векторного поля на вектора произвольной размерности. Будем использовать следующие обозначения:

- 1) жирными буквами обозначаются векторы (например, $\mathbf{H}$, $\mathbf{x}$)
- 2) заглавными буквами обозначаются матрицы (например, A , B)
- 3) каллиграфические заглавные буквы обозначают расширенные матрицы (будут определены позже, например, $\mathcal{A}$, $\mathcal{E}$)
- 4) символ шляпки обозначает реализацию случайного процесса на временных интервалах между моментами обновления (например, $\hat{A}_i$, $\hat{\mathcal{A}}_i$)

Пусть $\mathbf{H} = (H_1, \dots, H_k)^T$ – k -мерное векторное поле, эволюция которого задается безразмерным уравнением

$$\frac{d\mathbf{H}}{dt} = A(t)\mathbf{H} \quad (2.24)$$

с начальным условием $\mathbf{H}(0) = \mathbf{H}_0$.

Пусть матрица $k \times k$, обозначаемая $A(t)$, описывает кусочно-постоянный во времени случайный процесс. Теперь зададим некоторое произвольное положительное значение τ и рассмотрим моменты времени $\tau, 2\tau, 3\tau, \dots$, которые называются моментами обновления. На интервалах вида $[n\tau, (n+1)\tau]$ полагаем что матрицы $A(t)$ постоянны, независимы и одинаково распределены. Такая модель называется моделью с обновлениями.

Пусть $\hat{A}_i$ обозначает реализацию матрицы $A(t)$ на i -ом временном интервале. Решение уравнения (2.24) в моменты времени $n\tau$ может быть выражено в терминах произведения матричных экспонент:

$$\mathbf{H}(n\tau) = \exp(\hat{A}_n\tau) \exp(\hat{A}_{n-1}\tau) \dots \exp(\hat{A}_1\tau) \mathbf{H}_0 \dots \quad (2.25)$$

Усредняя уравнение (2.25) и используя свойство независимости и одинаковости распределений матриц A_i , получим следующее уравнение

$$\langle \mathbf{H} \rangle(n\tau) = \langle \exp(\hat{A}\tau) \rangle^n \mathbf{H}_0, \quad (2.26)$$

где $\hat{A}$ обозначает случайную матрицу с тем же распределением, что и любая из матриц $\hat{A}_i$. Теперь из уравнения (2.26) следует, что скорость роста любой компоненты среднего векторного поля $\langle \mathbf{H} \rangle$ задается старшим собственным значением усредненной матричной экспоненты $\langle \exp(\hat{A}\tau) \rangle$.

Теперь вспомним определение скорости роста γ_p для старших статистических моментов векторного поля:

$$\gamma_p = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2pn\tau} \ln \langle \|\mathbf{H}(n\tau)\|^p \rangle. \quad (2.27)$$

Здесь целое число p обозначает порядок статистического момента, а τ — это время обновления. Скорость роста средней энергии, таким образом, соответствует $p = 2$.

Уравнение для $\|\mathbf{H}\|^2$ (а также для более высоких моментов после соответствующей модификации) может быть получено следующим образом. Рассмотрим величину с двойным индексом $Z_{ij} = H_i H_j$ и зададим вектор $\mathbf{Z} = (Z_{11}, Z_{12}, \dots, Z_{kk})^T$ длины k^2 . Теперь применим правило Лейбница для вычисления $\partial Z_{ij} / \partial t = \partial(H_i H_j) / \partial t$ и, учитывая уравнение (2.24), получаем уравнение для $\mathbf{Z}$:

$$\frac{d\mathbf{Z}}{dt} = \mathcal{A}(t)\mathbf{Z}. \quad (2.28)$$

Здесь $\mathcal{A}(t)$ — матрица $k^2 \times k^2$, ее элементы выражаются в терминах матрицы $A(t)$ следующим образом:

$$\mathcal{A}_{k(i-1)+j, k(l-1)+m} = A_{il} \delta_{jm} + A_{jm} \delta_{il}. \quad (2.29)$$

Будем называть уравнение (2.28) расширенным уравнением и использовать каллиграфический шрифт (например, $\mathcal{A}$, $\hat{\mathcal{A}}$) для обозначения соответствующих матриц и называть их расширенными матрицами. Очевидно, что уравнение (2.29) справедливо и для матриц с символом шляпки,

т.е. для реализации процесса на конкретном интервале обновления. Повторяя рассуждения, использованные в (2.25) и (2.26), получаем, что скорость роста среднего вектора $\langle \mathbf{Z} \rangle$ определяется старшим собственным значением экспоненты от средней матрицы $\langle \exp(\hat{\mathcal{A}}\tau) \rangle$. Остается отметить, что все компоненты $\langle H_i^2 \rangle$ находятся внутри компонент вектора $\langle \mathbf{Z} \rangle$, таким образом, скорость роста $\langle \mathbf{Z} \rangle$ дает скорость роста $\langle \|\mathbf{H}\|^2 \rangle$.

Точная связь между старшим собственным значением λ усредненной матричной экспоненты $\langle \exp(\hat{\mathcal{A}}\tau) \rangle$ и скоростью роста γ_2 может быть получена следующим образом. По определению γ_2 следует, что средняя энергия $\langle \|\mathbf{H}\|^2 \rangle$ растет как $\exp(4\gamma_2 n\tau)$ при больших n . В то же время, каждая компонента $H_i^2 = Z_{ii}$ растет как λ^n при больших n . Отсюда следует, что $\gamma_2 = (1/4\tau) \ln \lambda$.

Резюмируем шаги для расчета скорости роста γ_2 в модели с обновлениями:

- 1) Переходим от исходного уравнения (2.24) к расширенному уравнению (2.28);
- 2) Находим старшее собственное значение λ усредненной матричной экспоненты $\langle \exp(\hat{\mathcal{A}}\tau) \rangle$;
- 3) Получаем $\gamma_2 = (1/4\tau) \ln \lambda$.

Описанный метод вычисления скорости роста второго момента может быть естественным образом распространен на моменты более высокого порядка. Например, для момента 3-го порядка необходимо рассматривать величины с тройным индексом $Z_{ijl} = H_i H_j H_l$.

Метод может быть применен как для изотропного, так и для анизотропного распределения матриц $\hat{A}_i$, при этом наиболее сложным шагом является усреднение матричной экспоненты, которое удастся провести явно только в редких случаях. В остальных случаях необходимо рассматривать τ как небольшой параметр и аппроксимировать матричную экспоненту с помощью ряда Тейлора.

Предположим, что матрица $\hat{A}$ (размера $k \times k$) имеет многомерное гауссовское распределение с нулевым средним и ковариационной матрицей B

(размера $k^2 \times k^2$), определенной следующим образом:

$$B_{k(i-1)+j,k(l-1)+m} = \langle \hat{A}_{ij} \hat{A}_{lm} \rangle. \quad (2.30)$$

Подобная модель интересна по нескольким причинам. Во-первых, статистические свойства случайного потока обычно задаются через корреляционный тензор. Таким образом, удобно предположить гауссовское распределение, которое полностью определяется этим тензором. Во-вторых, для численных экспериментов также удобно моделировать гауссовское распределение на основе корреляционного тензора.

После того, как распределение матрицы $\hat{A}$ определено, оно также определено распределение расширенной матрицы $\hat{\mathcal{A}}$ согласно уравнению. (2.29). Теперь можно аппроксимировать среднюю матричную экспоненту следующим образом:

$$\langle \exp(\hat{\mathcal{A}}\tau) \rangle = I + \langle \hat{\mathcal{A}} \rangle \tau + \frac{1}{2} \langle \hat{\mathcal{A}}^2 \rangle \tau^2 + \dots \quad (2.31)$$

В гауссовском случае вычисление $\langle \hat{\mathcal{A}}^n \rangle$ для любого n может быть выполнено следующим образом. Представим компоненты матрицы $\hat{A}$ (и, следовательно, матрицы $\hat{\mathcal{A}}$) как линейная комбинация независимых стандартных нормальных величин. Тогда нахождение усредненной матрицы $\hat{\mathcal{A}}^n$ становится хотя и трудоемкой, однако алгоритмически решаемой задачей.

Для выражения гауссовского вектора через набор независимых стандартных нормальных величин разложим ковариационную матрицу B (для простоты с полным рангом) в произведение $B = LL^T$ (например, используя разложение Холецкого [82]). Теперь пусть η будет вектором независимых стандартных нормальных величин (т.е. с единичной ковариационной матрицей), тогда можно показать, что вектор $L\eta$ имеет ковариационную матрицу $\hat{B}$.

Рассмотрим применение метода к уравнениям магнитной индукции в двумерной и трехмерной постановке и получим оценки скорости роста γ_2 в предположении о гауссовском распределении производных поля скорости.

2.4. Изотропная модель магнитного поля в случайной среде

Напомним уравнение индукции для магнитного поля

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{H} = (\mathbf{H} \nabla) \mathbf{v} + \eta \Delta \mathbf{H}, \quad (2.32)$$

где $\mathbf{H}$ – напряженность магнитного поля, $\mathbf{v}$ – скорость, η – магнитная диффузия, рассматриваемая как независимая от пространства скалярная величина. Пренебрегая омическими потерями и используя лагранжевый подход, уравнения (2.32) принимает вид

$$\frac{d\mathbf{H}}{dt} = A\mathbf{H}, \quad (2.33)$$

где A – матрица производных поля скорости, т.е. $A_{ij} = \partial v_i / \partial x_j$ и производные берутся в соответствующих точках данной лагранжевой траектории.

Пространственная структура случайного поля скоростей $\mathbf{v}$ будет определяться через двухточечный корреляционный тензор $R_{ij}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \langle v_i(\mathbf{x})v_j(\mathbf{y}) \rangle$. Будем предполагать, что $\langle \mathbf{v} \rangle = 0$, однако, следуя [135], можно включить в рассмотрение и не убывающую среднюю скорость. Дальнейшие детали зависят от конкретной формы корреляционного тензора и специфичны для 3D и 2D случаев.

Для статистически однородного и изотропного поля скоростей R_{ij} имеет вид (см., например, [23], [248])

$$R_{ij}(\mathbf{r}) = f(r)\delta_{ij} + \frac{r}{2}f'(r) \left(\delta_{ij} - \frac{r_i r_j}{r^2} \right) + \gamma(r)\varepsilon_{ijk}r_k, \quad (2.34)$$

где $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$, $r = \|\mathbf{r}\|$ и f – продольная корреляционная функция. Обычно рассматривается зеркально-симметричная модель, что подразумевает $\gamma(r) = 0$. Покажем, что на самом деле член $\gamma(r)$ не влияет на корреляционный тензор производных поля скорости $\mathbf{v}$.

Следуя [204], нормируем (для малых r) корреляционную функцию таким образом, что $\langle v_i(\mathbf{x})v_i(\mathbf{y}) \rangle \sim v^2(1 - (r/l)^2)$, где l определяет масштаб

случайных вихрей, v – это среднеквадратичная скорость потока. Для определенности возьмем $f(r) = (v^2/3) \exp(-3r^2/5l^2)$.

Для получения корреляционного тензора производных скорости $\partial v_i/\partial x_j$ найдем частные производные второго порядка $\partial^2/\partial x_m \partial y_n$ от корреляций поля скорости $\langle v_i(\mathbf{x})v_j(\mathbf{y}) \rangle = R_{ij}(\mathbf{r})$ и пусть $\mathbf{r} \rightarrow 0$. Используя обозначения, введенные в уравнении (2.30), получим, опуская масштабный фактор $v^2/5l^2$, следующее корреляционную матрицу B :

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \quad (2.35)$$

При вычислении B , заметим, что $\gamma(r)$ исчезает в корреляционном тензоре производных скорости. Действительно, взяв частные производные, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_m \partial y_n} \varepsilon_{ijk} r_k \gamma &= \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_m} \left(-\delta_{kn} \gamma + r_k \frac{\partial}{\partial y_n} \gamma \right) = \\ &= \varepsilon_{ijk} \left(-\delta_{kn} \frac{\partial}{\partial x_m} \gamma + \delta_{km} \frac{\partial}{\partial y_n} \gamma + r_k \frac{\partial^2}{\partial x_m \partial y_n} \gamma \right). \end{aligned} \quad (2.36)$$

Принимая во внимание, что для любой гладкой функции $\gamma(r)$ первые производные $\partial/\partial x_m$ и $\partial/\partial y_n$ уходят в ноль при $r = 0$, видим, что γ не дает вклада в матрицу B .

Другими словами, зеркальная асимметрия не вносит вклад в эволюцию замороженного магнитного поля. Этот вывод выглядит довольно неожиданным, поскольку известно, что эффекты зеркальной асимметрии потока

играют важную роль на последующих стадиях действия динамо [139].

Явная форма гауссовской матрицы $\hat{A}$, которая соответствует корреляционной матрице B , имеет следующий вид:

$$\hat{A} = \frac{v}{\sqrt{5}l} \begin{pmatrix} \sqrt{2}\eta_1 & 2\eta_2 & 2\eta_3 \\ \frac{-\eta_2 + \sqrt{15}\eta_4}{2} & \frac{-\eta_1 + \sqrt{3}\eta_5}{\sqrt{2}} & 2\eta_6 \\ \frac{-\eta_3 + \sqrt{15}\eta_7}{2} & \frac{-\eta_6 + \sqrt{15}\eta_8}{2} & \frac{-\eta_1 - \sqrt{3}\eta_5}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad (2.37)$$

где $\eta_1, \dots, \eta_8$ – независимые стандартные случайные нормальные величины. Обратим внимание, в силу условия несжимаемости ($\text{div} \mathbf{v} = 0$) матрица B имеет неполный ранг 8, поэтому для задания случайной матрицы $\hat{A}$ требуется только 8 случайных величин.

Уравнения (2.29) и (2.37) полностью определяют расширенную матрицу $\hat{\mathcal{A}}$. Для оценки старшего собственного значения средней матричной экспоненты, рассмотрим следующее характеристическое уравнение

$$\det(\langle \exp(\hat{\mathcal{A}}\tau) \rangle - \lambda I) = 0. \quad (2.38)$$

Приближим матричную экспоненту с помощью ряда Тейлора для малых τ и, учитывая, что $\langle \hat{\mathcal{A}}^n \rangle = 0$ для любого нечетного n , получим

$$\det \left(I(1 - \lambda) + \frac{1}{2} \langle \hat{\mathcal{A}}^2 \rangle \tau^2 + \frac{1}{4!} \langle \hat{\mathcal{A}}^4 \rangle \tau^4 + \dots \right) = 0. \quad (2.39)$$

Далее вспоминаем, что матрица $\hat{\mathcal{A}}$ имеет размерный множитель v/l . Таким образом, ряд Тейлора может быть записан в терминах числа Струхала $s = \tau v/l$ (другое стандартное обозначение – St). Отметим, что число Струхала также иногда определяют обратным образом, как St^{-1} . Решая характеристическое уравнение с точностью $O(s^8)$, получаем приближение

для собственных значений:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 1 + 2s^2 + \frac{9}{10}s^4 + \frac{149}{500}s^6 + O(s^8), \\ \lambda_{2,\dots,7} &= 1 - \frac{2}{5}s^2 + \frac{1}{2}s^4 - \frac{187}{7500}s^6 + O(s^8), \\ \lambda_{8,9} &= 1 + \frac{1}{15}s^4 + \frac{8}{9000}s^6 + O(s^8).\end{aligned}\tag{2.40}$$

Для того чтобы получить скорость роста γ_2 , необходимо нужно взять логарифм старшего собственного значения λ_1 с коэффициентом $1/4\tau$. Это дает

$$\gamma_2 = \frac{1}{2}s - \frac{11}{40}s^3 + \frac{1747}{6000}s^5 + O(s^7)\tag{2.41}$$

с точностью до размерного множителя v/l . Можно получить несколько приближения более высокого порядка, однако, они оказываются весьма громоздкими. Отметим, что с точностью до первого порядка $\gamma_2 = 1/2[v/l]$ как и в работе [204].

На рисунке 2.6 приведенный выше аналитический результат сравнивается с численной оценкой матричной экспоненты и соответствующего значения γ_2 для различных чисел Струхала $s = \tau v/l$. В частности, для каждого s смоделируем 10^5 реализаций случайных матриц $\hat{\mathcal{A}}$, вычислим матричную экспоненту $\exp(\hat{\mathcal{A}}\tau)$ и получим усредненную по выборке матричную экспоненту $\langle \exp(\hat{\mathcal{A}}\tau) \rangle$. Затем численно найдем старшее собственное значение λ из $\langle \exp(\hat{\mathcal{A}}\tau) \rangle A\tau$ и получим $\gamma_2 = (1/4s)\lambda$. Рисунок 2.6 показывает, что для малых s ($s < 0.6$) аналитическое приближение (2.41) и численная оценка γ_2 находятся в хорошем согласии.

На рисунке 2.6 можно заметить, что два последовательных приближения, $O(s^7)$ и $O(s^9)$, дают противоположное поведение для $s \rightarrow +\infty$. Это связано с тем, что коэффициенты в (2.41) имеют чередующиеся знаки.

Далее рассмотрим двумерную изотропную модель, которая позволяет явно вычислить матричные экспоненты. Корреляционный тензор для дву-

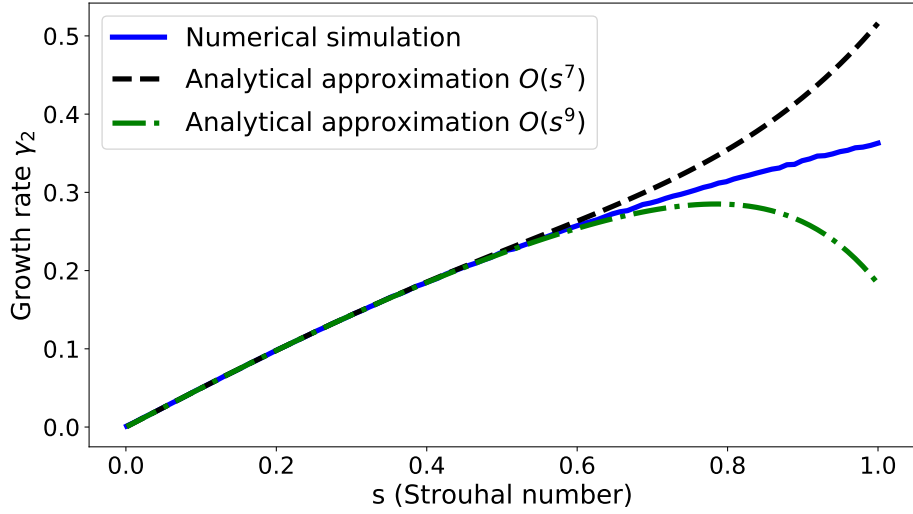


Рис. 2.6: Численная и аналитическая аппроксимация γ_2 для малых чисел Струхала в изотропной 3D модели потока. Рисунок из работы [107].

мерного изотропного потока имеет вид

$$R_{ij}(\mathbf{r}) = f(r)\delta_{ij} + r f'(r) \left(\delta_{ij} - \frac{r_i r_j}{r^2} \right). \quad (2.42)$$

Заметим, что эффекты зеркальной асимметрии не могут быть включены в эту модель, поскольку определение антисимметричного тензора ε_{ijk} предполагает трехмерие. Условие нормировки $\langle v_i(\mathbf{x})v_i(\mathbf{y}) \rangle \sim v^2(1 - (r/l)^2)$ подразумевает, что $f(r) = (v^2/2) \exp(-r^2/2l^2)$. Таким образом, корреляционная матрица для $\partial v_i/\partial x_j$ имеет вид

$$B = \frac{v^2}{2l^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.43)$$

Соответствующая гауссовская матрица $\hat{A}$ имеет вид

$$\hat{A} = \frac{v}{l} \begin{pmatrix} \eta_1/\sqrt{2} & \sqrt{3}\eta_2/\sqrt{2} \\ -\eta_2/\sqrt{6} + 2\eta_3/\sqrt{3} & -\eta_1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad (2.44)$$

где η_1, η_2, η_3 – независимые стандартные случайные нормальные величины.

Учитывая, что $\hat{A}_{11} = -\hat{A}_{22}$, расширенная матрица $\hat{\mathcal{A}}$ имеет вид

$$\hat{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 2\hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} & \hat{A}_{12} & 0 \\ \hat{A}_{21} & 0 & 0 & 0 & \hat{A}_{12} \\ \hat{A}_{21} & 0 & 0 & 0 & \hat{A}_{12} \\ 0 & \hat{A}_{21} & \hat{A}_{21} & -2\hat{A}_{11} \end{pmatrix}. \quad (2.45)$$

Матричная экспонента $\hat{\mathcal{E}} = \exp \hat{\mathcal{A}}\tau$ может быть вычислена в явном виде. Для простоты, пусть $\tau = 1$ и обозначим $\varphi = \det \hat{A} = -\hat{A}_{11}^2 - \hat{A}_{12}\hat{A}_{21}$. Прямое вычисление дает

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{E}}_{11} &= \cos^2 \sqrt{\varphi} + \frac{\hat{A}_{11}^2}{\varphi} \sin^2 \sqrt{\varphi} + \frac{\hat{A}_{11}}{\sqrt{\varphi}} \sin 2\sqrt{\varphi}, \\ \hat{\mathcal{E}}_{12} &= \hat{\mathcal{E}}_{13} = \frac{\hat{A}_{11}\hat{A}_{12}}{\varphi} \sin^2 \sqrt{\varphi} + \frac{\hat{A}_{12}}{2\sqrt{\varphi}} \sin 2\sqrt{\varphi}, \\ \hat{\mathcal{E}}_{14} &= \frac{\hat{A}_{12}^2}{\varphi} \sin^2 \sqrt{\varphi}, \\ \hat{\mathcal{E}}_{21} &= \hat{\mathcal{E}}_{31} = \frac{\hat{A}_{11}\hat{A}_{21}}{\varphi} \sin^2 \sqrt{\varphi} + \frac{\hat{A}_{21}}{2\sqrt{\varphi}} \sin 2\sqrt{\varphi}, \\ \hat{\mathcal{E}}_{23} &= \hat{\mathcal{E}}_{32} = \frac{\hat{A}_{12}\hat{A}_{21}}{\varphi} \sin^2 \sqrt{\varphi}, \\ \hat{\mathcal{E}}_{22} &= \hat{\mathcal{E}}_{33} = 1 + \hat{\mathcal{E}}_{23}, \\ \hat{\mathcal{E}}_{24} &= \hat{\mathcal{E}}_{34} = -\frac{\hat{A}_{11}\hat{A}_{12}}{\varphi} \sin^2 \sqrt{\varphi} + \frac{\hat{A}_{12}}{2\sqrt{\varphi}} \sin 2\sqrt{\varphi}, \\ \hat{\mathcal{E}}_{41} &= \frac{\hat{A}_{21}^2}{\varphi} \sin^2 \sqrt{\varphi}, \\ \hat{\mathcal{E}}_{42} &= \hat{\mathcal{E}}_{43} = -\frac{\hat{A}_{11}\hat{A}_{21}}{\varphi} \sin^2 \sqrt{\varphi} + \frac{\hat{A}_{21}}{2\sqrt{\varphi}} \sin 2\sqrt{\varphi}, \\ \hat{\mathcal{E}}_{44} &= \cos^2 \sqrt{\varphi} + \frac{\hat{A}_{11}^2}{\varphi} \sin^2 \sqrt{\varphi} - \frac{\hat{A}_{11}}{\sqrt{\varphi}} \sin 2\sqrt{\varphi}. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Усредняя $\hat{\mathcal{E}}$ и используя симметрию распределений вероятностей, полу-

чаем

$$\begin{aligned}\langle \hat{\mathcal{E}}_{12} \rangle &= \langle \hat{\mathcal{E}}_{13} \rangle = \langle \hat{\mathcal{E}}_{21} \rangle = \langle \hat{\mathcal{E}}_{31} \rangle = \\ &= \langle \hat{\mathcal{E}}_{24} \rangle = \langle \hat{\mathcal{E}}_{34} \rangle = \langle \hat{\mathcal{E}}_{42} \rangle = \langle \hat{\mathcal{E}}_{43} \rangle = 0.\end{aligned}\quad (2.47)$$

В матричных терминах это означает, что ненулевыми могут быть только следующие элементы матрицы, обозначенные звездочкой:

$$\langle \hat{\mathcal{E}} \rangle = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 & * \\ 0 & * & * & 0 \\ 0 & * & * & 0 \\ * & 0 & 0 & * \end{pmatrix}.\quad (2.48)$$

В терминах вектора $\langle \mathbf{Z} \rangle$ это означает, что можно выделить замкнутое уравнение для вектора $(\langle Z_{11} \rangle, \langle Z_{22} \rangle) = (\langle H_1^2 \rangle, \langle H_2^2 \rangle)$. Остается заметить, что в силу симметрии вероятностных распределений $\langle (\hat{A}_{11}/\sqrt{\varphi}) \sin 2\sqrt{\varphi} \rangle = 0$ имеем $\langle \hat{\mathcal{E}}_{11} \rangle = \langle \hat{\mathcal{E}}_{44} \rangle$, а также $\langle \hat{\mathcal{E}}_{14} \rangle = \langle \hat{\mathcal{E}}_{41} \rangle$. Тогда, обозначая

$$\lambda = \langle \hat{\mathcal{E}}_{11} + \hat{\mathcal{E}}_{14} \rangle = \langle \cos^2 \sqrt{\varphi} + \frac{\hat{A}_{11}^2 + \hat{A}_{12}^2}{\varphi} \sin^2 \sqrt{\varphi} \rangle,\quad (2.49)$$

приходим к уравнению для магнитной энергии

$$\langle H_1^2 + H_2^2 \rangle((n+1)\tau) = \lambda \langle H_1^2 + H_2^2 \rangle(n\tau).\quad (2.50)$$

Приближенное выражение (2.49) для малых s имеет вид

$$\lambda = 1 + 2s^2 + \frac{2}{3}s^4 + \frac{4}{9}s^6 + O(s^8).\quad (2.51)$$

Соответствующая скорость роста составляет (опуская размерный множитель v/l)

$$\gamma_2 = \frac{1}{4\tau} \ln \lambda = \frac{1}{2}s - \frac{1}{3}s^3 + \frac{4}{9}s^5 + O(s^7).\quad (2.52)$$

На рисунке 2.7 приведены аналитическая и численная аппроксимация γ_2 для малых чисел Струхала s , следуя схеме, представленной в трехмерном случае.

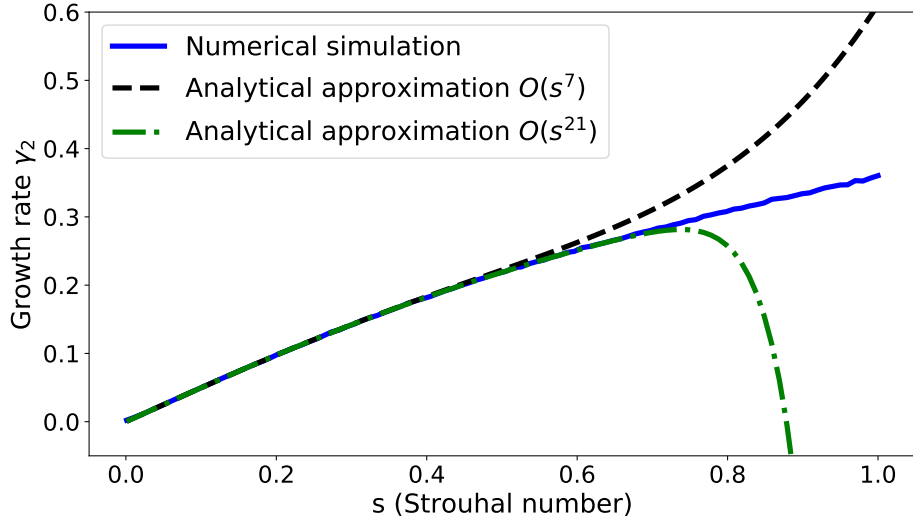


Рис. 2.7: Численная и аналитическая аппроксимация γ_2 для малых чисел Струхала в изотропной двумерной модели. Рисунок из работы [107].

На рисунке 2.7 можно видеть, что 2D модель воспроизводит особенности 3D модели, отмеченные ранее на рисунке 2.6. Также в согласии с 3D моделью, коэффициенты в аналитическом приближении (2.52) имеют чередующиеся знаки.

2.5. Анизотропная модель магнитного поля в случайной среде

В качестве примера анизотропной модели рассмотрим осесимметричную модель турбулентности, предложенную Чандрасекаром [47]. Выбрав первую ось как ось симметрии, корреляционный тензор задается в виде

$$R_{ij} = \varepsilon_{jkm} \frac{\partial q_{im}}{\partial r_k}, \quad (2.53)$$

где тензор q_{im} имеет вид

$$q_{im} = r_k (\varepsilon_{imk} Q_1 + \varepsilon_{i1k} (\delta_{1m} Q_2 + r_m Q_3)). \quad (2.54)$$

В силу симметрии и нулевой дивергенции корреляционного тензора, функции Q_i не являются независимыми. В частности,

$$Q_3 = \left(\frac{\partial}{\partial r_1} - \frac{r_1}{r_3} \frac{\partial}{\partial r_3} \right) Q_1. \quad (2.55)$$

Из этого следует, что необходимо задание только двух функций Q_1 и Q_2 .

Конечно, изотропный случай, рассмотренный ранее, должен быть частным случаем осесимметричного. Будем следовать модели, предложенной в работе [128], которая допускает такое обобщение. В частности, полагаем

$$\begin{aligned} Q_1 &= -\frac{1}{2}v_1^2 \exp \left[-\frac{3}{5} \left(\frac{r_1^2}{l_1^2} + \frac{r_2^2 + r_3^2}{l_2^2} \right) \right], \\ Q_2 &= -(v_2^2 - v_1^2) \exp \left[-\frac{3}{5} \left(\frac{r_1^2}{l_1^2} + \frac{r_2^2 + r_3^2}{l_2^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Здесь v_1 и l_1 – средняя скорость и масштаб длины вдоль первого направления (которое является осью симметрии), в то время как v_2 и l_2 соответствующие величины в ортогональной плоскости. Определим $u = v_2^2/v_1^2$ и $L = l_2^2/l_1^2$. Тогда

$$\begin{aligned} Q_1 &= -\frac{1}{2}v_1^2 \exp \left[-\frac{3}{5l_1^2} \left(r_1^2 + \frac{r_2^2 + r_3^2}{L} \right) \right], \\ Q_2 &= (1 - u)v_1^2 \exp \left[-\frac{3}{5l_1^2} \left(r_1^2 + \frac{r_2^2 + r_3^2}{L} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Заметим, что $u = L = 1$ приводит к изотропной модели (2.42).

Корреляционная матрица для $\partial v_i / \partial x_j$ имеет ту же структуру (т.е. положение ненулевых элементов), что и матрица B в изотропной модели (см. уравнение (2.35)). Опустив общий множитель $3v_1^2/5l_1^2$, ненулевыми элемен-

тами являются:

$$\begin{aligned}
B_{11} &= 2, \\
B_{22} &= B_{33} = \frac{4}{L}, \\
B_{44} &= B_{77} = 2u + 4 - \frac{2}{L}, \\
B_{55} &= B_{99} = \frac{2u}{L}, \\
B_{66} &= B_{88} = \frac{2(3u - L)}{L}, \\
B_{42} &= B_{51} = B_{73} = B_{91} = -1, \\
B_{24} &= B_{15} = B_{37} = B_{19} = -1, \\
B_{68} &= B_{86} = B_{59} = B_{95} = \frac{L - 2u}{L}.
\end{aligned} \tag{2.58}$$

Заметим, что $u = L = 1$ приводит к корреляционной матрице (2.35).

Прямой расчет показывает, что с точностью до масштабного фактора $\sqrt{3}v_1/\sqrt{5}l_1$, компонентами соответствующей гауссовой матрицы $\hat{A}$ являются

$$\begin{aligned}
\hat{A}_{11} &= \sqrt{2}\eta_1, \\
\hat{A}_{12} &= \frac{2}{\sqrt{L}}\eta_2, \\
\hat{A}_{13} &= \frac{2}{\sqrt{L}}\eta_3, \\
\hat{A}_{21} &= \frac{-\sqrt{L}}{2}\eta_2 + \sqrt{2u + 4 - \frac{2}{L} - \frac{L}{4}}\eta_4, \\
\hat{A}_{22} &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\eta_1 + \sqrt{\frac{4u - L}{2L}}\eta_5, \\
\hat{A}_{23} &= \sqrt{\frac{2(3u - L)}{L}}\eta_6, \\
\hat{A}_{31} &= \frac{-\sqrt{L}}{2}\eta_3 + \sqrt{2u + 4 - \frac{2}{L} - \frac{L}{4}}\eta_7, \\
\hat{A}_{32} &= \frac{L - 2u}{\sqrt{2L(3u - L)}}\eta_6 + \sqrt{\frac{(8u - 3L)(4u - L)}{2L(3u - L)}}\eta_8,
\end{aligned} \tag{2.59}$$

$$\hat{A}_{33} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\eta_1 - \sqrt{\frac{4u-L}{2L}}\eta_5.$$

Заметим, что L и u не могут принимать произвольные значения, так как аргументы под знаками корней должны быть положительными. Рассматривая выражения под квадратными корнями в (2.59), приходим к выводу, что

$$\begin{aligned} 2u + 4 - \frac{2}{L} - \frac{L}{4} &\geq 0, \\ 4u - L &\geq 0, \\ 3u - L &\geq 0, \\ 8u - 3L &\geq 0. \end{aligned} \tag{2.60}$$

Следующий шаг включает рассмотрение расширенной системы и вычисление собственных значений. Приближение для старшего собственного значения с точностью до $O(s^8, u^2, L^2)$ принимает вид

$$\begin{aligned} \lambda_1 = 1 + 2 \left(1 + \frac{2\varepsilon}{3}\right) s^2 + \\ + \frac{9}{10} \left(1 + \frac{4\varepsilon}{3}\right) s^4 + \frac{149}{500} (1 + 2\varepsilon) s^6, \end{aligned} \tag{2.61}$$

где $\varepsilon = u - L$, $s = \sqrt{3}v_1\tau/l_1$. Заметим, что для $u = L$ результат совпадает со случаем $u = L = 1$ (изотропная модель).

Переписав собственное значение (2.61) в терминах скорости роста, получаем:

$$\begin{aligned} \gamma_2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2\varepsilon}{3}\right) s + \\ - \frac{11}{40} \left(1 + \frac{4\varepsilon}{3}\right) s^3 + \frac{1747}{6000} (1 + 2\varepsilon) s^5. \end{aligned} \tag{2.62}$$

На рисунке 2.8) показана роль параметров анизотропии. Для построения этого рисунка было смоделировано 10^5 реализаций случайной матрицы $\hat{A}$ для различных u и L , следуя выражению 2.59, численно найдено стар-

шее собственное значение усредненной по выборке расширенной матрицы $\langle \exp \hat{\mathcal{A}}\tau \rangle$ и получены соответствующие скорости роста γ_2 . В этих расчетах число Струхали s остается фиксированным. Рисунок 2.8 показывает, что скорость роста зависит от отношения u/L , а не от конкретных значений u и L .

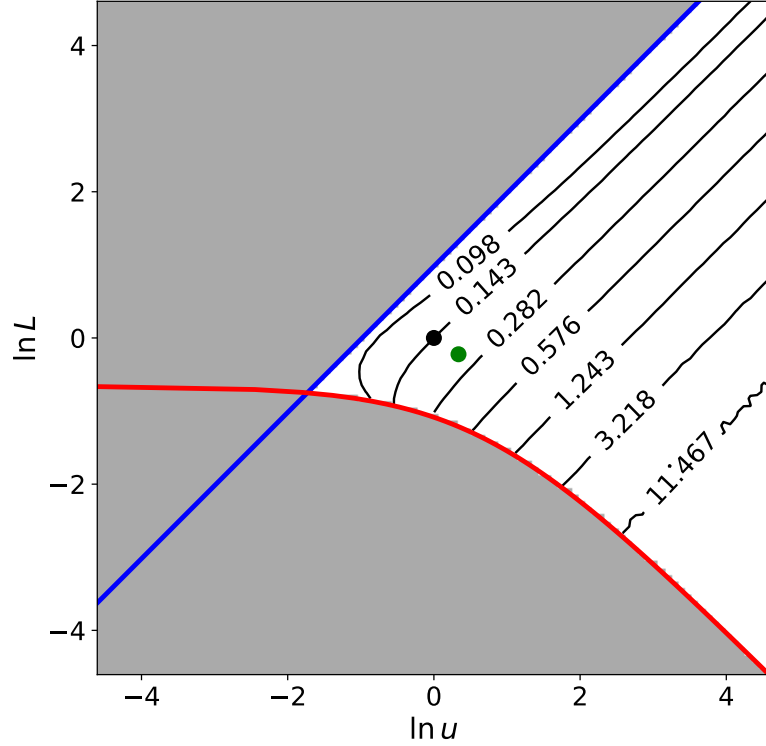


Рис. 2.8: Распределение скорости роста γ_2 в осесимметричной 3D модели потока для фиксированного значения $s = 0.3$ и различных параметров анизотропии u , L . Оси приведены в логарифмическом масштабе. Черная точка соответствует изотропному случаю $u = L = 1$, зеленая точка соответствует случаю $u = 1.4$, $L = 0.8$, показанному на рисунке 2.9. Серая область показывает запрещенные значения u и L для 3D модели. Красная линия соответствует первому неравенству в (2.60), синяя линия соответствует последнему неравенству в (2.60). Рисунок из работы [107].

На рисунке 2.9 приведены результаты численного моделирования и аналитической аппроксимации скорости роста при фиксированных параметрах анизотропии u и L и различных числах Струхали. В частности, сравнивается случай $u = L = 1$ (изотропная модель) с анизотропной моделью со слегка возмущенными значениями u и L . Как и в изотропном случае, ана-

литическая аппроксимация является точной только для малых s ($s < 0.6$).

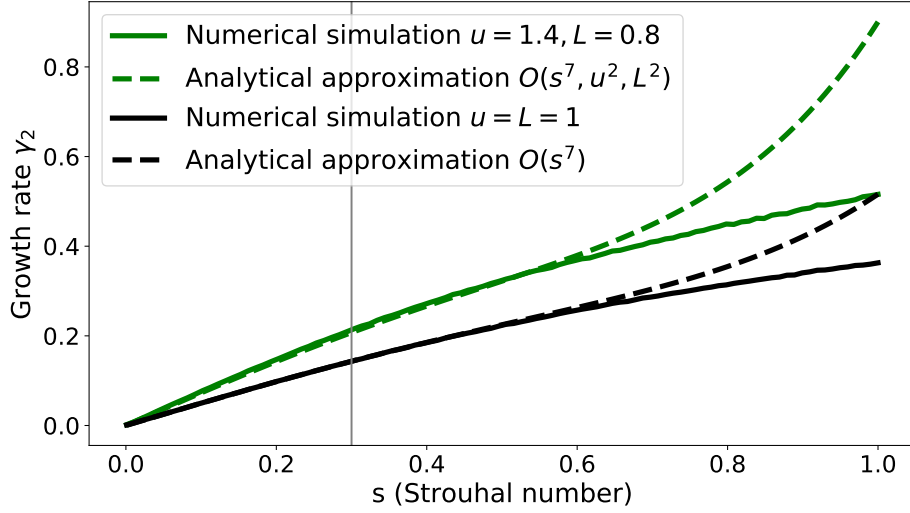


Рис. 2.9: Скорость роста для изотропной модели 3D потока $u = L = 1$ (черная линия) по сравнению со случаем анизотропии $u = 1.4, L = 0.8$ (зеленая линия) для различных чисел Струхала s . Пунктирные линии показывают соответствующие аналитические приближения. Вертикальная линия показывает случай $s = 0.3$, приведенный на рисунке 2.8. Рисунок из работы [107].

Далее рассмотрим двумерное пространство. Определим корреляционный тензор, который мог бы быть аналогичен случаю трехмерной осесимметричной моделью [47].

Начнем с компоненты R_{11} . В трехмерном осесимметричном случае, следуя (2.53) и (2.54), имеем

$$R_{11} = -\frac{\partial(r_2 Q_1)}{\partial r_2} - \frac{\partial(r_3 Q_1)}{\partial r_3}. \quad (2.63)$$

Тогда в двумерии положим

$$R_{11} = -\frac{\partial(r_2 Q_1)}{\partial r_2}, \quad (2.64)$$

где Q_1 , как и в случае (2.56), задается выражением

$$Q_1 = -v_1^2 \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{r_1^2}{l_1^2} + \frac{r_2^2}{l_2^2} \right) \right]. \quad (2.65)$$

С учетом условия несжимаемости

$$\frac{\partial R_{11}}{\partial r_1} + \frac{\partial R_{21}}{\partial r_2} = 0. \quad (2.66)$$

получаем

$$R_{21} = - \int \frac{\partial R_{11}}{\partial r_1} dr_2 \dots \quad (2.67)$$

Принимая во внимание (2.64), получаем

$$R_{21} = \frac{\partial(r_2 Q_1)}{\partial r_1} + C(r_1). \quad (2.68)$$

В силу симметрии корреляционного тензора полагаем $R_{12} = R_{21}$.

Заметим, что в трехмерном случае, согласно (2.53) и (2.54), имеем

$$R_{21} = R_{12} = - \frac{\partial(r_2 Q_1)}{\partial r_1}. \quad (2.69)$$

Таким образом, полагаем $C(r_1) = 0$ в 2D случае.

Для того чтобы восстановить последнюю компоненту, R_{22} , снова рассмотрим условие несжимаемости:

$$\frac{\partial R_{12}}{\partial r_1} + \frac{\partial R_{22}}{\partial r_2} = 0. \quad (2.70)$$

Отсюда следует, что

$$R_{22} = - \int \frac{\partial R_{12}}{\partial r_1} dr_2 \dots \quad (2.71)$$

Используя (2.68) и (2.65), получаем:

$$R_{22} = \frac{l_2^2}{l_1^2} \left(\frac{r_1^2}{l_1^2} - 1 \right) Q_1 + \tilde{C}(r_1) \dots \quad (2.72)$$

Чтобы задать функцию $\tilde{C}(r_1)$, заметим, что $R_{22}(0) = v_2^2$, а $Q_1(0) = -v_1^2$.

Таким образом, полагаем

$$\tilde{C}(r_1) = \left(v_2^2 - v_1^2 \frac{l_2^2}{l_1^2} \right) \exp \left(- \frac{r_1^2}{2l_1^2} \right). \quad (2.73)$$

Параметрами анизотропии служат величины $v_2^2/v_1^2 = u$ и $l_2^2/l_1^2 = L$. Корреляционная матрица для $\partial v_i/\partial x_j$ имеет вид

$$B = \frac{v_1^2}{l_1^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{3}{L} & -1 & 0 \\ 0 & -1 & u + 2L & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.74)$$

В частности, изотропный случай соответствует $u = L = 1$, $v^2 = 2v_1^2$, $l^2 = l_1^2$ и матрица B принимает вид (2.43).

Гауссовская матрица $\hat{A}$, которая соответствует корреляционной матрице B , состоит из следующих элементов с общим множителем v_1/l_1 :

$$\begin{aligned} \hat{A}_{11} &= -\hat{A}_{22} = \eta_1, \\ \hat{A}_{12} &= \sqrt{\frac{3}{L}}\eta_2, \end{aligned} \quad (2.75)$$

$$\hat{A}_{21} = -\sqrt{\frac{L}{3}}\eta_2 + \sqrt{\frac{3u + 5L}{3}}\eta_3.$$

Заметим, что в отличие от 3D случая, здесь возможны все сочетания положительных u и L .

Заметим, что распределения $\hat{A}_{12}$ и $\hat{A}_{21}$ различаются между собой в отличие от изотропного случая. Отсюда следует $\langle \hat{\mathcal{E}}_{14} \rangle \neq \langle \hat{\mathcal{E}}_{41} \rangle$ и вместо (2.50) получим

$$\lambda_{1,2} = \langle \hat{\mathcal{E}}_{11} \rangle \pm \sqrt{\langle \hat{\mathcal{E}}_{14} \rangle \langle \hat{\mathcal{E}}_{41} \rangle}. \quad (2.76)$$

Пусть $u \sim 1$, $L \sim 1$. Тогда с точностью $O(s^8, u^2, L^2)$ старшее собственное значения имеет вид

$$\lambda_1 = 1 + 2 \left(1 + \frac{\varepsilon}{8}\right) s^2 + \frac{2}{3} \left(1 + \frac{\varepsilon}{4}\right) s^4 + \frac{4}{9} \left(1 + \frac{3\varepsilon}{8}\right) s^6, \quad (2.77)$$

где $s = \sqrt{2}v_1\tau/l_1$, $\varepsilon = u - L$.

Соответственно, приближение скорости роста (опуская масштабный фактор $\sqrt{2}v_1/l_1$) с точностью $O(s^7, u^2, L^2)$ имеет вид

$$\gamma_2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\varepsilon}{8}\right) s - \frac{1}{3} \left(1 + \frac{\varepsilon}{4}\right) s^3 + \frac{4}{9} \left(1 + \frac{3\varepsilon}{8}\right) s^5. \quad (2.78)$$

Заметим, что в первом приближении параметры анизотропии u и L вносят вклад только через разность $\varepsilon = u - L$, как ранее наблюдалось в 3D модели.

На рисунке 2.10 показана численная оценка скорости роста согласно (2.76). Можно видеть, что скорость роста зависит только от разности $\ln u - \ln L$, или, что тоже, от отношения параметров анизотропии u/L . Для $u \sim 1$, $L \sim 1$ это соотношение аппроксимируется $\varepsilon = u - L$, что что согласуется с (2.78).

2.6. Сопоставление с короткокоррелированным приближением

Представляет интерес сопоставить полученные результаты для модели с конечной памятью с короткокоррелированной (также известной как дельта-коррелированной) моделью. Хотя экспоненциальный рост магнитной энергии в 2D на первой стадии динамо упоминался ранее в [166], ниже этот же результат будет получен более простым способом.

Рассмотрим расширенное уравнение для $Z_{ij} = H_i H_j$. Векторы $\mathbf{Z}(t + \tau)$ и $\mathbf{Z}(t)$ связаны между собой через фундаментальную матрицу

$$\mathbf{Z}(t + \tau) = \exp(\hat{\mathcal{A}}\tau)\mathbf{Z}(t) = (I + \hat{\mathcal{A}}\tau + \frac{1}{2}\hat{\mathcal{A}}^2\tau^2 + \dots)\mathbf{Z}(t). \quad (2.79)$$

Переписывая и усредняя, получаем:

$$\frac{\langle \mathbf{Z} \rangle(t + \tau) - \langle \mathbf{Z} \rangle(t)}{\tau} = \frac{1}{2} \langle \hat{\mathcal{A}}^2 \rangle \tau \langle \mathbf{Z} \rangle(t) + o(\tau). \quad (2.80)$$

Теперь предположим, что $\tau v/l$ имеет конечный предел s при $\tau \rightarrow 0$, а

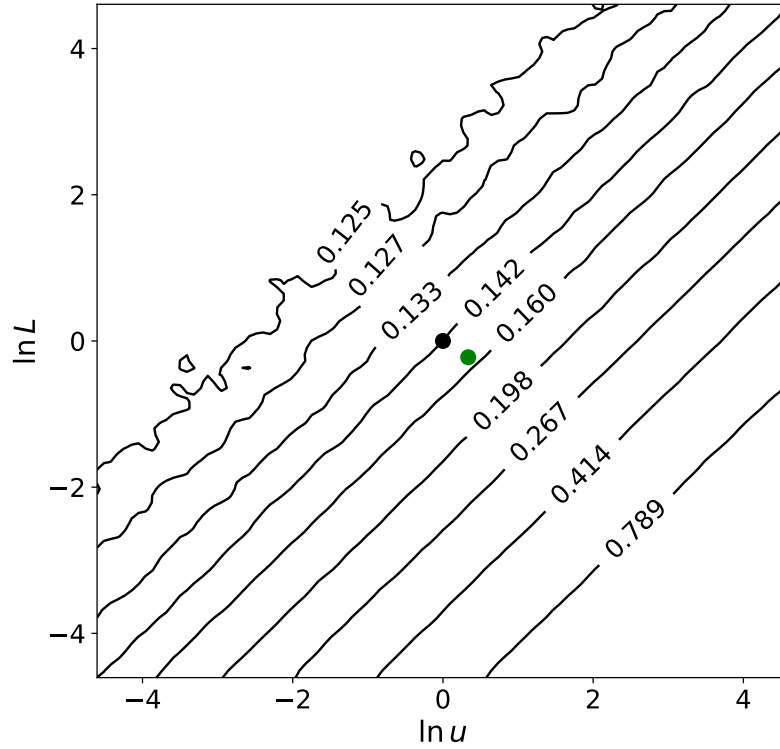


Рис. 2.10: Распределение скорости роста γ_2 в осесимметричной 2D модели для фиксированного значения $s = 0.3$ и различных параметров анизотропии u , L . Оси приведены в логарифмический масштаб. Черная точка соответствует изотропному случаю $u = L = 1$, зеленая точка соответствует случаю $u = 1.4$, $L = 0.8$, показанному на рисунке 2.11. Рисунок из работы [107].

$\tau^k v^k / l^k \rightarrow 0$ для $k > 1$. В 2D случае получаем:

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbf{Z} \rangle = \frac{vs}{2l} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \langle \mathbf{Z} \rangle. \quad (2.81)$$

Из уравнения (2.81) можно выделить уравнение для первой и последней компоненты вектора $\langle \mathbf{Z} \rangle$. Обозначив $\mathbf{H}^2 = (H_1^2, H_2^2) = (Z_{11}, Z_{22})$, получим

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbf{H}^2 \rangle = \frac{vs}{2l} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \langle \mathbf{H}^2 \rangle. \quad (2.82)$$

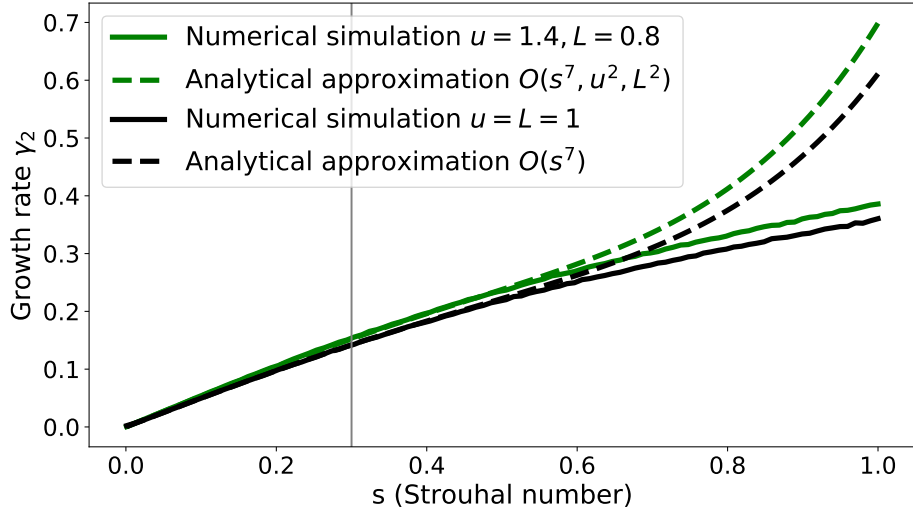


Рис. 2.11: Скорость роста для изотропной 2D модели потока $u = L = 1$ (черная линия) по сравнению с асимметричным случаем $u = 1.4$, $L = 0.8$ (зеленая линия) для различных чисел Струхаля s . Пунктирные линии показывают соответствующие аналитические приближения. Вертикальная линия показывает случай $s = 0.3$, приведенный на рисунке 2.10. Рисунок из работы [107].

Это приводит к следующему уравнению для средней энергии $\langle \|\mathbf{H}\|^2 \rangle$:

$$\frac{d}{dt} \langle \|\mathbf{H}\|^2 \rangle = \frac{2vs}{l} \langle \|\mathbf{H}\|^2 \rangle. \quad (2.83)$$

Отсюда скорость роста равна $2vs/l$.

Аналогично, в трехмерном случае, обозначая $\mathbf{H}^2 = (H_1^2, H_2^2, H_3^2)$, получаем:

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbf{H}^2 \rangle = \frac{2vs}{5l} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \langle \mathbf{H}^2 \rangle. \quad (2.84)$$

Как следствие, средняя энергия $\langle \|\mathbf{H}\|^2 \rangle$ следует уравнению

$$\frac{d}{dt} \langle \|\mathbf{H}\|^2 \rangle = \frac{2vs}{l} \langle \|\mathbf{H}\|^2 \rangle. \quad (2.85)$$

Скорость роста в этом случае равна $\lambda = 2vs/l$.

С учетом нормировочного множителя $1/4$ для второго момента и опус-

кая множитель v/l , получаем выражение для скорости роста:

$$\gamma_2 = \frac{1}{2}s, \quad (2.86)$$

что совпадает с результатом, который был получен ранее для конечного τ .

Заметим, что если дополнительно предположить, что $\tau^k v^k / l^k \rightarrow s^k$ для, например, $k = 3$ и 5 , и $\tau^k v^k / l^k \rightarrow 0$ для $k > 5$, то вместо (2.83) получим расширенное уравнение, заданное следующим образом

$$\frac{d}{dt} \langle \|\mathbf{H}\|^2 \rangle = \frac{v}{l} \left(2s + \frac{2}{3}s^3 + \frac{4}{9}s^5 \right) \langle \|\mathbf{H}\|^2 \rangle, \quad (2.87)$$

что аналогично (2.51). Теперь предположим, что $\tau^k v^k / l^k \rightarrow s^k$ для всех k . Также перепишем $\lambda(s)$ в (2.50) как $\lambda(s) = 1 + \omega(s)$, тогда

$$\frac{d}{dt} \langle \|\mathbf{H}\|^2 \rangle = \frac{v}{l} \frac{\omega(s)}{s} \langle \|\mathbf{H}\|^2 \rangle. \quad (2.88)$$

В тоже время, уравнение (2.50) влечет

$$\frac{\langle \|\mathbf{H}\|^2 \rangle(t + \tau) - \langle \|\mathbf{H}\|^2 \rangle(t)}{\tau} = \frac{\omega(v\tau/l)}{\tau} \langle \|\mathbf{H}\|^2 \rangle(t). \quad (2.89)$$

Получаем, что (2.88) является пределом (2.89) при $\tau \rightarrow 0$, если

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\omega(v\tau/l)}{v\tau/l} = \frac{\omega(s)}{s}. \quad (2.90)$$

Аналогично, скорость роста из выражения (2.88) (то есть $\omega(s)/s[v/l]$) является пределом для скорости роста из выражения (2.89) (то есть $(1/\tau) \ln(1 + \omega(v\tau/l))$) при $\tau \rightarrow 0$. если

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{v\tau/l} \ln(1 + \omega(v\tau/l)) = \frac{\omega(s)}{s}, \quad (2.91)$$

или, обозначая $\delta = v\tau/l$, получаем

$$\lim_{\delta \rightarrow s} \frac{1}{\delta} \ln(1 + \omega(\delta)) = \frac{\omega(s)}{s}. \quad (2.92)$$

В осесимметричной 2D модели для $u \sim 1$, $L \sim 1$ короткокоррелированное приближение имеет вид

$$\frac{d}{dt}\langle \mathbf{H}^2 \rangle = \frac{\sqrt{2}v_1 s}{2l_1} \begin{pmatrix} 1 & u + 2L \\ 6 - 3L & 1 \end{pmatrix} \langle \mathbf{H}^2 \rangle. \quad (2.93)$$

До масштабного фактора $\sqrt{2}v_1/l_1$, аппроксимация старшего собственного значения имеет вид

$$\lambda_1 = 2s \left(1 + \frac{u - L}{8} \right) + O(s^3, u^2, L^2). \quad (2.94)$$

Соответствующая нормированная скорость роста равна $\gamma_2 = (1/4)\lambda_1$.

В осесимметричном трехмерном случае имеем

$$\frac{d}{dt}\langle \mathbf{H}^2 \rangle = \alpha \begin{pmatrix} 1 & u + L & u + L \\ 4 - 2L & 1 + u - L & 2 + 3(u - L) \\ 4 - 2L & 2 + 3(u - L) & 1 + u - L \end{pmatrix} \langle \mathbf{H}^2 \rangle, \quad (2.95)$$

где $\alpha = 2\sqrt{3}v_1 s/5l_1$.

Без учета масштабного фактора $\sqrt{3}v_1/l_1$, аппроксимация старшего собственного значения имеет вид

$$\lambda_1 = 2s \left(1 + \frac{2(u - L)}{3} \right) + O(s^3, u^2, L^2). \quad (2.96)$$

и соответствующая нормированная скорость роста оказывается равной $\gamma_2 = (1/4)\lambda_1$.

2.7. Обобщение на случай смеси гауссовских распределений

Для заданного среднего значения и ковариационной матрицы предположение о гауссовском распределении для матриц $\hat{A}$ является удобным, но не необходимым. Например, можно рассмотреть многомерное распределение

Лапласа или Стюдента. Покажем, что для широкого семейства распределений старшее собственное значение для усредненной матричной экспоненты получается из уравнения (2.40), которое вычисляется для гауссовского случая. Это означает, что трудоемкие вычисления, которые лежали в основе уравнения (2.40), могут быть существенно упрощены для новых распределений.

Рассмотрим случайные матрицы вида $\hat{A} = \sqrt{Y}X$, где X имеет многомерное гауссовское распределение, а Y – независимая неотрицательная случайная величина. Эта модель известна как масштабная смесь гауссиан (см., например, [6]). У этой модели есть несколько важных частных случаев. В частности, можно показать ([75]), что если Y является показательной случайной величиной с плотностью распределения $p_Y(x) = (1/\beta) \exp(-x/\beta)$ для $\beta > 0$ и если X имеет гауссовское распределение с нулевым (для простоты) средним и ковариационной матрицей Σ , то $\sqrt{Y}X$ имеет многомерное распределение Лапласа с плотностью

$$p(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d |\Sigma|}} \frac{2}{\beta} \frac{K_{(d/2-1)}\left(\sqrt{\frac{2}{\beta}} \mathbf{x}' \Sigma^{-1} \mathbf{x}\right)}{\left(\sqrt{\frac{\beta}{2}} \mathbf{x}' \Sigma^{-1} \mathbf{x}\right)^{d/2-1}}. \quad (2.97)$$

Здесь $d = 3$ – размерность пространства и $K_{1/2}(x) = \sqrt{\pi/(2x)} e^{-x}$ – модифицированная функция Бесселя второго рода, $\mathbf{x}'$ – транспонирование $\mathbf{x}$.

Теперь обратимся к уравнению (2.39) с учетом того, что случайные матрицы принадлежат масштабной смеси гауссиан. Характеристическое уравнение принимает вид

$$\det \left(I(1 - \lambda) + \frac{1}{2} \langle Y \rangle \langle \hat{\mathcal{X}}^2 \rangle s^2 + \frac{1}{4!} \langle Y^2 \rangle \langle \hat{\mathcal{X}}^4 \rangle s^4 + \dots \right) = 0. \quad (2.98)$$

Здесь $\hat{\mathcal{X}}$ вычисляется из X согласно уравнению (2.29). Из [107] следует, что в изотропном случае старшее собственное значение может быть найдено как $\langle \lambda(\sqrt{Y}s) \rangle$, где $\lambda(\cdot)$ определено в уравнении (2.40). Таким образом,

приходим к общему уравнению, которое справедливо в изотропном случае:

$$\lambda(s) = 1 + 2\langle Y \rangle s^2 + \frac{9}{10}\langle Y^2 \rangle s^4 + \frac{149}{500}\langle Y^3 \rangle s^6 + O(s^8). \quad (2.99)$$

Заметим, что в анизотропном поле скоростей собственные значения должны быть явно получены из уравнения (2.98) и в данной работе они не рассматриваются.

В качестве частного случая рассмотрим величину Y , распределенную показательно с $\beta = 1$ (что соответствует распределению Лапласа для $\hat{A}$). Тогда $\langle Y^n \rangle = n!$ и получаем

$$\lambda(s) = 1 + 2s^2 + \frac{9}{5}s^4 + \frac{447}{250}s^6 + O(s^8). \quad (2.100)$$

В терминах скорости роста это соответствует (опуская масштабный фактор v/l)

$$\gamma_2 = \frac{1}{2}s - \frac{1}{20}s^3 + \frac{641}{3000}s^5 + O(s^7). \quad (2.101)$$

Для того чтобы сравнить приведенное выше аналитическое приближение с численным экспериментом, проведено моделирование 10^5 реализаций случайных матриц $\hat{A}$, следующих многомерному распределению Лапласа, причем каждый набор реализаций независим для каждого числа Струхалы s из интервала $(0, 1)$. Затем для каждого s вычислена усредненная по выборке матричная экспонента $\langle \exp(\hat{A}s) \rangle$, численно найдена ее старшее собственное значение λ и, наконец, получено $\gamma_2 = (1/4s) \ln \lambda$. На рисунке 2.12 показано, что численное моделирование совпадает с аналитическим приближением при $s < 0.6$ и становится неустойчивым при $s > 0.6$. Аналогичные результаты были получены для случая гауссовского распределения случайных матриц. Также на рисунке 2.12 приведено сравнение случаев распределений Лапласа и Гаусса и, как и ожидалось, показано, что распределение Лапласа дает более высокие скорости роста из-за более тяжелых хвостов распределения.

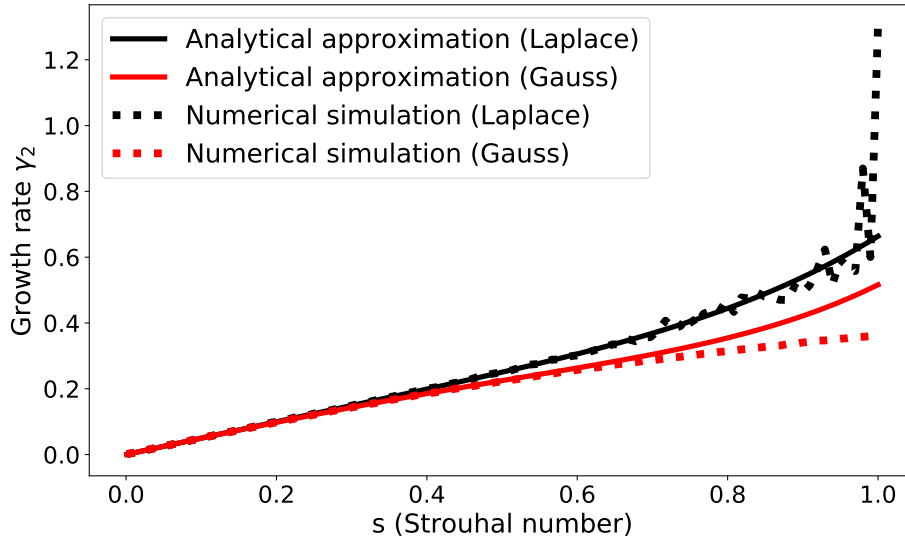


Рис. 2.12: Скорость роста второго момента магнитного поля в случае гауссова и лапласова распределения производных поля скорости для различных чисел Струхала. Сплошные линии соответствуют аналитической аппроксимации скорости роста, пунктирные линии показывают результаты численного моделирования. Рисунок из работы [108].

2.8. Выводы

Представлен общий подход к расчету скорости роста старших статистических моментов векторного поля в рамках модели с обновлениями. Данный подход на примере уравнения Якоби со случайным параметром кривизны позволил количественно оценить и сопоставить три механизма роста поля Якоби, демонстрирующие различную роль случайностей для возникновения и усиления неустойчивостей. Рассматривая уравнение Якоби как модельный пример, несущий в себе свойства более общих систем, представляет интерес обсудить полученные результаты в контексте проблемы динамо.

Существуют две реализации общего процесса динамо, которые, как полагают, имеют отношение к физике Солнца. Во-первых, существует обычное солнечное динамо, основанное на совместном действии дифференциального вращения и зеркальной асимметрии солнечной конвекции. Оба фактора, взятые вместе, замыкают цепь самовозбуждения и обеспечивают растущее магнитное поле. Рост является нерегулярным, однако, он становится все более регулярным, если исчезает вклад шума (Δ становится

малым по сравнению с характерным временем процесса динамо). Заметим, что в данной работе изучался предельный случай $\Delta \rightarrow 0$ и амплитуда флуктуаций параметра кривизны оставалась фиксированной. Конечно, можно рассмотреть и случай $\Delta \rightarrow 0$, при котором амплитуда флуктуаций растёт пропорционально $1/\Delta$, чтобы получить не убывающую скорость роста (короткокоррелированная модель).

Хотя анализ скоростей роста проводился в рамках простой модели, предложенных в [239], однако изучаемая проблема не является специфической для этой модели, и анализ более сложных систем, требующих более громоздких вычислений, должен приводить сопоставимым результатам. В качестве таких систем были рассмотрены модели эволюции магнитного поля в случайном потоке при отсутствии магнитной диффузии (начальная стадия динамо). Подведем итоги количественных результатов и обсудим границы их применимости.

В работе показано, что аналитические приближения скорости роста γ_2 дают хорошую аппроксимацию в случае малых чисел Струхала (до $s = 0.6$). При больших числах Струхала аналитические результаты существенно отклоняются от численных и становятся неприменимыми. Однако отметим, что вопрос о реалистичном диапазоне чисел Струхала является предметом дискуссий. Например, некоторые численные эксперименты дают числа Струхала порядка $0.1 - 0.4$ для звездных конвективных зон (см. [121]). В то же время, грубые наблюдательные оценки по солнечной грануляции дают $s \approx 1$ [209]. Еще более высокие оценки числа Струхала были получены из радио наблюдений за некоторыми областями звездообразования ($s^{-1} \approx 0.3$, [202]) и наблюдений за потоками плазмы в солнечной короне ($s^{-1} \approx 0.2$, [192]). Обратим внимание на обратное определение числа Струхала, используемое в некоторых работах.

Аналогичные выводы получены для эффектов анизотропии, исследованных в рамках модели осесимметричного случайного потока. Как и ожидалось, скорость роста энергии оказывается зависящей от деталей анизотропного распределения. Однако полученная зависимость является естественным продолжением изотропных результатов. Результат может быть интересен, например, в контексте астрофизических приложений. Напри-

мер, межзвездная турбулентность в дисках спиральных галактик может быть существенно анизотропной, поскольку пространственный масштаб случайных движений лишь в несколько раз меньше толщины галактического диска [24]. С другой стороны, пока еще рано говорить о том, что изученные модели анизотропии могут быть напрямую применимы для конкретных галактических объектов. Полученный результат выглядит скорее как обоснование обычного использования изотропных моделей в таких случаях.

Два других, отчасти неожиданных, результата можно суммировать следующим образом.

Во-первых, полученные скорости роста не зависят от зеркальной асимметрии корреляционного тензора турбулентных скоростей, в то время как основная идея большинства моделей динамо (солнечного, звездного, галактического динамо) основана на зеркальной асимметрии (например, [11; 235]). Это означает, что эффекты зеркальной асимметрии становятся важными только на поздних стадиях действия динамо.

Во-вторых, рост магнитной энергии в двумерном и трехмерном пространстве выглядит сходим образом. Это на первый взгляд вступает в противоречие с известной теорема антидинамо [234], которая утверждает, что двумерное динамо невозможно. Но дело в том, что антидинамо-теорема Зельдовича предполагает малые, но конечные омические потери и тем самым не относится к рассматриваемой стадии динамо. Полученные количественные результаты дополняют картину предыдущих исследований (например, [166]) начальной стадии турбулентного динамо.

Следует также отметить, что теорема Зельдовича об антидинамо предполагает, что поток, как и магнитное поле, локализованы в пространстве и имеют конечную полную энергию, в то время как в работе рассматривалась пространственно однородная ситуация. Разница между этими двумя постановками задачи была исследована в [138].

Подчеркнем, что представленные результаты применимы только на начальной стадии действия динамо и не допускают прямой экстраполяции на более поздние стадии действия динамо. Для того чтобы проиллюстрировать специфические условия начальной стадии напомним пример, при-

веденный в работе [236].

Гладкое поле скоростей $\mathbf{v}$ позволяет провести линейную аппроксимацию вблизи данной точки. Рассмотрим в качестве примера следующее поле скоростей:

$$v_x = cx, \quad v_y = -cy, \quad v_z = 0 \quad (2.102)$$

при $c > 0$ и начальном магнитном поле $H_x = H_0$, $H_y = H_z = 0$. Прямой подсчет показывает, что H_x растет со скоростью роста c . Заметим, что этот формальный результат также не противоречит теореме об антидинамо [234]. Формальная причина заключается в том, что в [234] поток и затравочное магнитное поле имеют конечную энергию, в то время как здесь обе энергии формально расходятся. Кроме того, в [234] предполагается малая, но ненулевая магнитная диффузия.

С физической точки зрения, рост магнитного поля, полученный в приведенном выше примере, не может продолжаться бесконечно. Дело в том, что магнитные петли любого реального двумерного магнитного поля замкнуты, и где-то существует противоположно направленная часть магнитной петли. Рано или поздно эта часть встретится с рассматриваемой частью и остановит рост магнитного поля. Это наиболее важное ограничение для первой стадии динамо и оно ограничивает прямую экстраполяцию результатов, полученных в специфических условиях начальной стадии, на более поздние стадии действия динамо.

Еще одним ограничением модели является рассмотрение только лагранжева подхода. Перенос результатов на эйлеров подход не является тривиальным, и он остается за рамками данной работы. Более подробно эти проблемы изучались в работе [134].

Также остается открытым вопрос о том, как более сложные формы случайного процесса могут повлиять на форму и стабильность усиления среднего поля и средней энергии. Некоторые более сложные варианты были рассмотрены в работах [249], [170] и [110]. В частности, в работе [249] была предложена модель памяти, в которой значение случайного процесса заменяется не на независимое, а на взвешенную сумму реализаций на предыдущих участках и новой независимой величины. А в работах [170]

и [110] изучалась модель, в которой длина участка обновления становится случайной величиной из пуассоновского потока событий.

Как представляется, метод расширенных матриц может быть обобщен на случай конечной магнитной диффузии, например, путем рассмотрения случайных траекторий, которые включают винеровский процесс диффузии, добавленный к обычным лагранжевым траекториям в соответствии с подходом, разработанным в [134].

Глава 3.

Оценка параметров динамо-моделей с помощью нейродифференциальных уравнений

Механизм солнечного динамо является одной из наиболее разработанных концепций для объяснения и воспроизведения основных особенностей солнечной активности, прежде всего – солнечной цикличности. Ввиду исключительной трудности проведения прямого численного моделирования полной системы уравнений магнитной гидродинамики, были предложены различные упрощения задачи. Одним из них является динамо-теория средних полей. Однако для вывода замкнутой системы уравнений приходится использовать дополнительные предположения, и одним из наиболее сложных компонентов является нелинейная форма подавления альфа-эффекта. Помимо этого, в модель входит ряд параметров, требующих количественного определения, которое зачастую дается на основе качественных аргументов.

В то же время, наблюдательные данные являются ключевым источником информации о параметрах и форме связей для моделей динамо. Процесс учета наблюдательных данных для корректировки параметров модели известен как ассимиляция данных. Современные методы машинного обу-

чения позволяют предложить новые подходы к решению этой задачи.

В диссертационной работе представлен подход, в котором функциональная форма функции подавления альфа-эффекта задается моделью нейронной сети. Модель динамо, в которой часть компонент заменена на нейронную сеть, образует нейродифференциальное уравнение. Решение этого уравнения сопоставляется с наблюдательными данными, и обучаемые параметры нейронной сети подбираются так, чтобы достичь наилучшего соответствия. Этот подход будет изучаться на примере маломодовых моделей динамо, следуя работе [106]. Вначале обсудим общую идею нейродифференциальных уравнений.

3.1. Нейродифференциальные уравнения

Нейродифференциальные уравнения являются объединением нейронных сетей, численных схем решения систем дифференциальных уравнений (СДУ) и метода расчета градиента решения уравнения по обучаемым параметрам нейронной сети, что позволяет оптимизировать вид функциональных зависимостей в СДУ. Будем рассматривать нейронную сеть как функцию, параметризованную набором параметров θ , также называемых обучаемыми весами. С точки зрения теории, подбором архитектуры и параметров модели, с помощью нейронной сети можно аппроксимировать непрерывные функции с любой желаемой точностью (см., например, теорему Цыбенко [61] об универсальной аппроксимации). Этим обосновывается выбор нейронных сетей для аппроксимации нелинейных связей в динамо-модели. Встраивая параметризованную функцию (нейронную сеть) в СДУ, получаем СДУ вида

$$\begin{aligned}\dot{y} &= f(y, t, \theta), \\ y(t_0) &= y_0.\end{aligned}\tag{3.1}$$

Пусть $y(t)$ – численное решение системы (3.1). Обозначим через $L(y, \theta)$ – целевую функцию, построенную на основе решения СДУ, которую хотим оптимизировать (для определенности, минимизировать) по параметрам θ

с использованием методов градиентного спуска. В терминах машинного обучения будет называть ее функций потерь.

Прямое вычисление градиента функции потерь L относительно θ требует дифференцирования решения СДУ (т.е. вычисления $\partial y / \partial \theta$), что невозможно, если исходить только из численного набора, представляющего результат численного интегрирования СДУ (предполагается, что в общей ситуации система решается только численно и не решается аналитически). Конечно, существуют способы аппроксимации градиента, например, на основе разностной аппроксимации производных. Однако этот подход вычислительно крайне трудозатратен, поскольку требует многократного решения прямой системы для оценки производной по каждой компоненте вектора параметров.

Более точным, но не менее трудозатратным методом является прямое дифференцирование системы (3.1) по параметрам θ и вывод системы дифференциальных уравнений относительно $\partial y / \partial \theta$. Размерность этой системы будет равна произведению размерности исходной системы и числа параметров, что в контексте обычно большого числа параметров нейронных сетей, поэтому численное интегрирование вновь потребует значительных вычислительных ресурсов.

Более эффективный с прикладной точки зрения подход основан на идее составления и решения сопряженной системы уравнений (см. [250]), которая, в случае, если

$$L(\theta) = \int_{t_0}^{t_1} g(y, \theta, t) dt, \quad (3.2)$$

имеет вид

$$\dot{\lambda} = \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \lambda. \quad (3.3)$$

Сопряженная система дополняется условием на правом конце временного отрезка и решается обратно по времени. На основе полученного решения

составляется выражение для вычисления градиента функции потерь:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial g}{\partial \theta} - \frac{\partial f}{\partial \theta} \lambda dt. \quad (3.4)$$

Этот подход носит название метода сопряженных уравнений или adjoint method.

Например, в простейшем случае, когда $L(y) = L(y(t_1))$, градиент $\partial L / \partial \theta$ получается как интеграл

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \int_{t_0}^{t_1} \lambda(t)^T \frac{\partial f}{\partial \theta} dt, \quad (3.5)$$

а сопряженное уравнение имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{\lambda} &= -\frac{\partial f}{\partial y} \lambda, \\ \lambda(t_1) &= \frac{\partial L}{\partial y(t_1)}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Приведем явный пример. Пусть исходная система на отрезке $[0, 1]$ имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \theta y, \\ y(0) &= 1. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Решение этой системы, очевидно, $y(t) = \exp \theta t$, и производная решения по параметру θ имеет вид $\partial y / \partial \theta = t \exp \theta t$. Рассмотрим функционал $L(y) = (y(1) - 2)^2$, который соответствует задаче подбора такого значения параметра θ , чтобы решение в точке 1 совпадало с числом 2 (интерпретируем это число как пришедшее из наблюдений). Аналитическая производная этого функционала по параметру θ имеет вид

$$\partial L / \partial \theta = 2(y(1) - 2) \partial y(1) / \partial \theta = 2(\exp \theta - 2) \exp \theta. \quad (3.8)$$

Получим этот же результат методом сопряженного уравнения. Сопряженная система (3.6) для функционала $L(y) = (y(1) - 2)^2$ и системы (3.7) имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{\lambda} &= -\theta\lambda, \\ \lambda(1) &= 2(y(1) - 2) = 2(\exp \theta - 2).\end{aligned}\tag{3.9}$$

Решение сопряженной системы имеет вид $\lambda(t) = 2(\exp \theta - 2) \exp(-\theta t + \theta)$. Теперь вычислим интеграл (3.5):

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \int_0^1 2(\exp \theta - 2) \exp(-\theta t + \theta) \exp \theta t dt = 2(\exp \theta - 2) \exp \theta. \tag{3.10}$$

Можно видеть, что результат интегрирования (3.10) совпадает с аналитической производной (3.8).

Отметим, что для интегрирования сопряженного уравнения необходимо знать решение $y(t)$ исходной системы на всем интервале интегрирования. На практике это требует дополнительных ресурсов либо на хранение промежуточных решений системы, что не всегда может уместиться в памяти компьютера, либо на одновременное интегрирование обратно по времени сопряженной и исходной системы. После преодоления этих технических ограничений, метод сопряженных уравнений открывает возможность применения методов градиентной оптимизации в самых различных системах (см., например, обзор [193]). Определенным расширением исходной системы (3.1) можно получить градиенты относительно начального условия y_0 (см. [50]).

Конечно, параметры в системе (3.1) могут возникать и вне контекста нейронных сетей, например, как скалярные коэффициенты. Однако если правая часть является нейронной сетью или содержит в себе нейронные сети, то будем называть систему (3.1) нейродифференциальным уравнением (neural differential equations, сокращенно – NDE). В следующем разделе составим нейродифференциальное уравнение для простой маломодовой модели динамо и поставим задачу оптимизации вида функции подавле-

ния альфа-эффекта для сближения решения системы с наблюдательными данными.

3.2. Нейродифференциальная модель динамо

Возьмем за основу простейшую маломодовую модель динамо вида

$$\begin{aligned}\dot{B}(t) &= -iDA(t) - B(t), \\ \dot{A}(t) &= \alpha(B(t))B(t) - A(t),\end{aligned}\tag{3.11}$$

параметрами которой являются динамо-число D и функция подавления альфа-эффекта $\alpha(B)$. Вывод этой модели из уравнений Паркера был получен, например, в работе [163].

В случае с постоянной $\alpha(B) = 1$ модель дает экспоненциально растущие осциллирующие решения, если динамо-число удовлетворяет условию $D > 2$. При введении нелинейного подавления с использованием типичной функции $\alpha(B) = 1/(1 + ReB^2)$ (см., например, [48]), решение модели выходит на стационарные колебания. На рисунке 3.1 показано поведение ReB^2 при одном и том же значении $D = 5$, одинаковых начальных условиях и различных функциях $\alpha(B)$. Аналогично, на рисунке 3.2 показано поведение ReB^2 при одной и той же функции $\alpha(B) = 1/(1 + ReB^2)$, одинаковых начальных условиях и различных значениях динамо-числа.

Для приложения нейродифференциального подхода к модели динамо (3.11), будем рассматривать набор начальных значений $A_0 = A(t_0)$, $B_0 = B(t_0)$ и динамо-число D как неизвестные параметры, подлежащие оптимизации, а неизвестную функцию $\alpha(B)$ параметризуем с помощью модели полносвязной нейронной сети. Пусть θ обозначает обучаемые параметры этой нейронной сети, тогда $\alpha = \alpha(B | \theta)$. Полный набор оптимизируемых параметров модели динамо состоит из A_0, B_0, D, θ .

Рассмотрим временной интервал $[0, T]$ и предположим, наблюдательные данные $d_0, d_1, \dots, d_n$ соответствуют моментам времени $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = T$. Общий вид функции потерь можно обозначить как $L(A(t_0), B(t_0), d_0, A(t_1), B(t_1), d_1, \dots, A(t_n), B(t_n), d_n)$. Например, если дан-

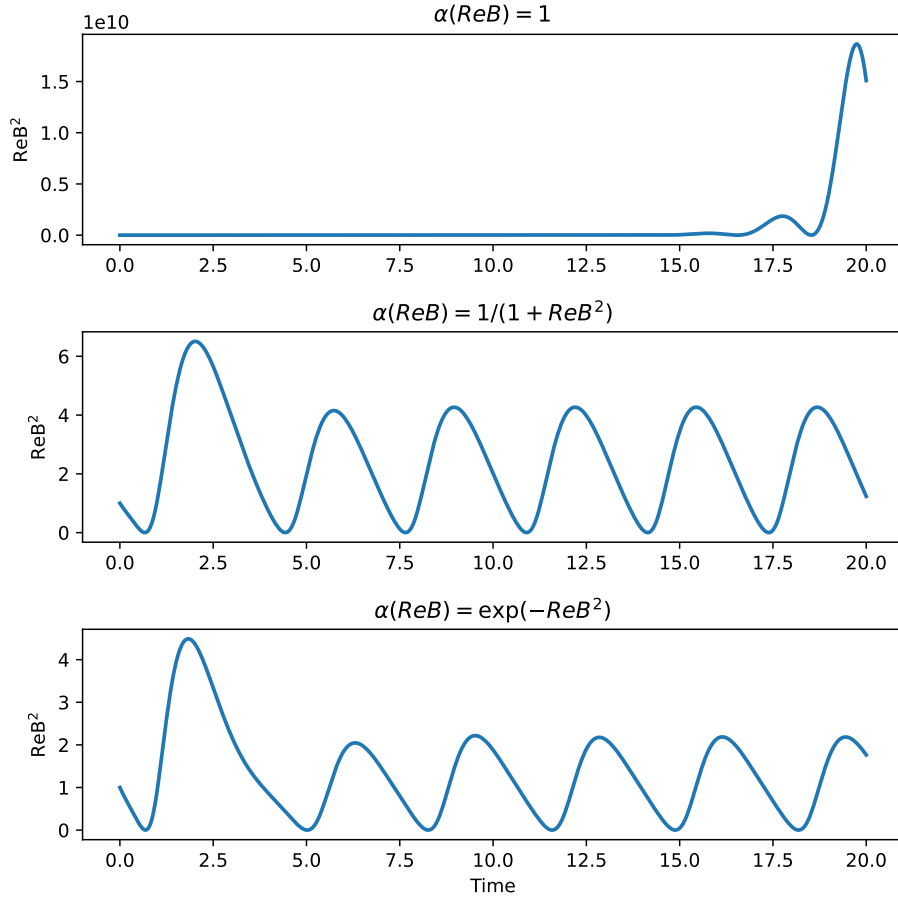


Рис. 3.1: Поведение ReB^2 при одном и том же значении $D = 5$, одинаковых начальных условиях и различных функциях $\alpha(B)$. На верхней панели функция $\alpha(B) = 1$, на средней панели $\alpha(B) = 1/(1 + ReB^2)$, на нижней панели $\alpha(B) = \exp(-ReB^2)$.

ные наблюдений связаны с энергией действительной части магнитного поля B , то функция потерь может быть сформулирована как сумма квадратов ошибок:

$$L = \sum_{i=0}^n (ReB(t_i)^2 - d_i)^2. \quad (3.12)$$

Помимо функции потерь вида (3.12), будем рассматривать и другие варианты. В частности, будем ставить задачу восстановления параметров динамо-модели на основе данных о действительной части полоидального поля и квадрате действительной части тороидального поля:

$$L = \sum_{i=0}^n \left[\left(Re\hat{B}(t_i)^2 - ReB(t_i)^2 \right)^2 + \gamma \left(Re\hat{A}(t_i) - ReA(t_i) \right)^2 \right]. \quad (3.13)$$

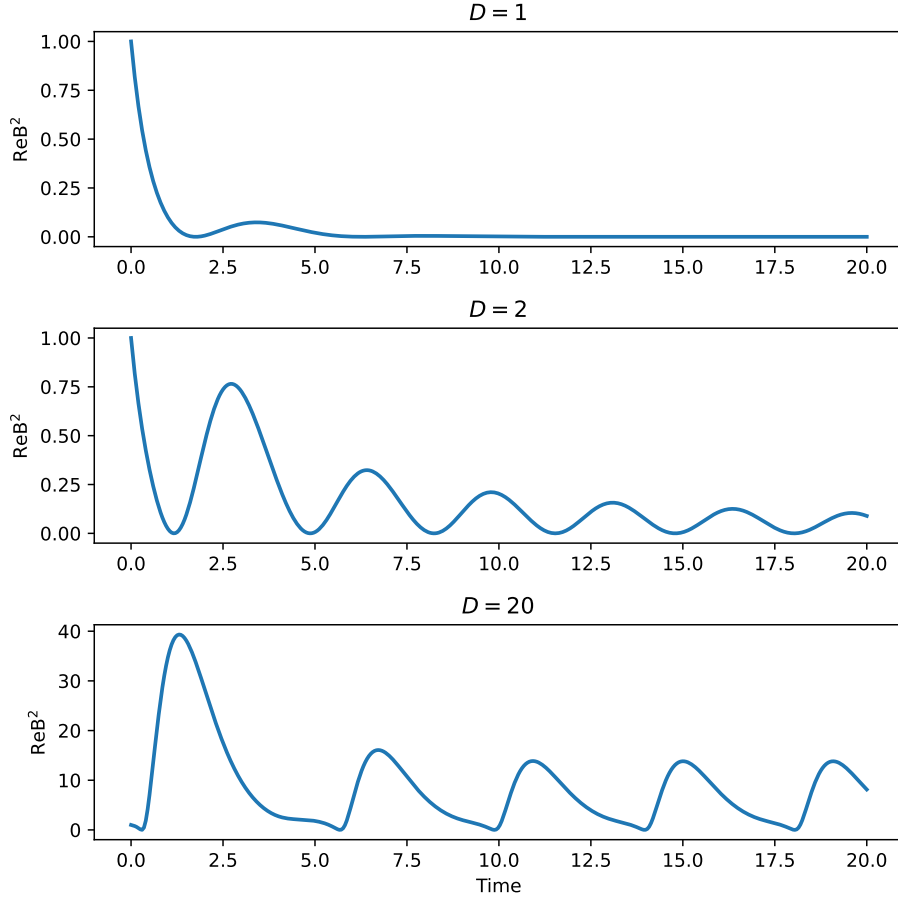


Рис. 3.2: Поведение ReB^2 при одной и той же функции $\alpha(B) = 1/(1 + ReB^2)$, одинаковых начальных условиях и различных значениях динамического числа. На верхней панели $D = 1$, на средней панели $D = 2$, на нижней панели $D = 20$.

Здесь символы $\hat{B}$ и $\hat{A}$ отвечают решениям, полученным из модели, а символы B и A отвечают целевым значениям, под которые подгоняется модель. Коэффициент γ используется для балансировки масштаба слагаемых.

В другом варианте будем предполагать, что доступен полный набор измерений магнитного поля, тогда функция потерь принимает вид

$$L = \sum_{i=0}^n \left[\left(Re\hat{B}(t_i) - ReB(t_i) \right)^2 + \gamma_1 \left(Im\hat{B}(t_i) - ImB(t_i) \right)^2 + \right. \quad (3.14)$$

$$\left. + \gamma_2 \left(Re\hat{A}(t_i) - ReA(t_i) \right)^2 + \gamma_3 \left(Im\hat{A}(t_i) - ImA(t_i) \right)^2 \right]. \quad (3.15)$$

Значение функции потерь зависит от параметров A_0, B_0, D, θ . Для ми-

нимизации функции потерь будем использовать метод оптимизации Adam [129], основанный на градиентном спуске. Значения градиентов будем получать с помощью метода сопряженных уравнений. Для составления сопряженного уравнения и численного интегрирования СДУ используется библиотека <https://github.com/rtqichen/torchdiffeq>, в которой, используя методы автоматического дифференцирования, сопряженное уравнение выводится из вида исходной системы и функции потерь.

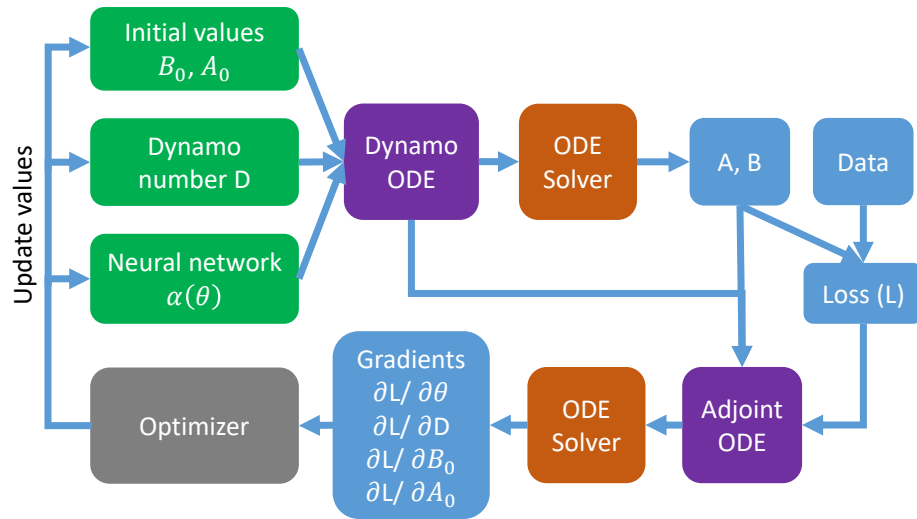


Рис. 3.3: Процесс оптимизации нейродифференциальной модели. Зеленые прямоугольники содержат параметры, подлежащие оптимизации. Текущие значения этих параметров передаются в модель динамо, решатель СДУ выдает численные решения A, B . Численные решения сравниваются с данными наблюдений, и вычисляется функция потерь. На основе исходной СДУ, решений A, B и функции потерь строится сопряженное СДУ. Интегрирование сопряженного СДУ дает градиенты функции потерь относительно параметров модели. Оптимизатор использует градиенты для обновления параметров модели. Рисунок из работы [106].

3.3. Синтетические эксперименты

Исследуем NDE подход вначале на наборе синтетических примеров, в которых заранее получим численное решение уравнений динамо (3.11) с некоторыми заданными параметрами динамо и заданной функций подавления альфа-эффекта. Затем, на основе только численного решения или его ча-

сти, оценим с помощью NDE параметры динамо-модели и вид функции подавления и сравним результаты с истинными значениями.

Для построения синтетического примера будем моделировать решение системы (3.11) на временном интервале $[0, 40]$ с начальными значениями $A(0) = 1$, $B(0) = 1$, динамо-числом $D = 5$ и функцией $\alpha(B) = 1/(1 + ReB^2)$, используя шаг по времени фиксированного размера $\Delta t = 0.1$.

Далее рассмотрим нейродифференциальную модель динамо, инициализированную случайными параметрами и начальными значениями. Для того, чтобы начальные параметры динамо-модели не приводили к экспоненциально растущему решению, будем выбирать их из разумного диапазона. В частности, будем выбирать $ReA_0, ImA_0, ReB_0, ImB_0$ из равномерного распределения на $[-1, 1]$, а динамо-число D равномерно на $[3, 10]$. Относительно функции α будем предполагать, что она зависит только от ReB , симметрична, неотрицательна и нормирована так, что $\alpha(0) = 1$. В дальнейшем, для оценки влияния выбора начальных значений на ответ, будем повторять эту процедуру несколько раз для различных начальных значений.

Зададим функцию α в виде полносвязной модели нейронной сети. Общие условия неотрицательности и нормировки функции подавления требуют специальной конфигурации модели. Условие неотрицательности выхода нейронной сети обычно достигается путем применения к выходному слою соответствующей функции активации. Более сложной является задача обеспечить, чтобы для конкретного входного значения модель возвращала заранее заданное значение. Есть несколько способов обеспечить условие $\alpha(0) = 1$.

Например, можно добавить в функцию потерь слагаемое $(\alpha(0) - 1)^2$, которой штрафует модель за отклонения от заданного значения в нуле. Однако это слагаемое необходимо уравновесить с другими слагаемыми функции потерь, и более того, результат оптимизации может не обеспечивать выполнения точного условия нормировки.

Другой вариант состоит в том, чтобы сразу нормировать модель на ее значение в нуле, в именно, задать модель как $\tilde{\alpha}(\cdot) = \alpha(\cdot)/\alpha(0)$. Отметим, что при оптимизации знаменатель является не константой, а функцией

от параметров нейронной сети. При этом вид производной по параметрам модели усложняется и делает процесс обучения модели менее стабильным.

В рассматриваемой задаче можно предложить более простое решение. Умножив выход модели на ее вход, получим, что результат равен нулю, когда вход равен нулю. После этого применим неотрицательную функцию активации, которая в нуле равна единице. Например, подходящим вариантом является функция экспоненты. В результате получим модель вида $\alpha(B) = \exp(\text{Re}B^2 g(\text{Re}B^2))$, где $g(\cdot)$ – это нейронная сеть без ограничений на выходном слое. Для этой конструкции выполнено условие неотрицательности и нормировки в нуле.

Архитектуру нейронной сети $g(\cdot)$ составим из последовательности трех полносвязных слоев с числом нейронов 4, 4, 1 в каждом слое. Входом в модель является одно число $\text{Re}B^2$. Выбор архитектуры был основан на том, чтобы, с одной стороны, вводить меньшее число обучаемых параметров, а с другой – обеспечить, чтобы нейронная сеть потенциально могла воспроизводить простые гладкие функции, среди которых ожидаем получить функцию подавления альфа-эффекта. Более сложные архитектуры имеет смысл использовать в том случае, если ожидаются сложные вариации функции подавления. В общей сложности модель содержит 24 весовых параметра и 9 параметров смещения (bias). На выходе из внутренних слоев применяется одна из стандартных функций активации – $ELU(x) = xI\{x > 0\} + (\exp(x) - 1)I\{x \leq 0\}$, где $I\{\cdot\}$ – индикаторная функция (см. [73] для обзора различных функций активации). Выходной слой не имеет функции активации.

Чтобы избежать расходимости решения на первых шагах обучения из-за случайной инициализации функции подавления, имеет смысл предварительно обучить нейронную сеть $\alpha(B)$ таким образом, чтобы она соответствовала некоторой простой аналитической функции, для которой решение уравнений динамо остается ограниченным. В частности, будем предварительно обучать $\alpha(B)$ таким образом, чтобы она соответствовала функции $\exp(-\text{Re}B^2)$ в интервале $\text{Re}B^2 \in [0, 10]$. Для этого составим функцию потерь в виде среднеквадратичной ошибки между значениями нейронной сети α и функции $\exp(-\text{Re}B^2)$ в точках, для которых $\text{Re}B^2 \in [0, 10]$, и на

ее основе методом градиентного спуска будем оптимизировать обучаемые параметры нейронной сети.

В качестве первого примера рассмотрим задачу подбора параметров динамо-модели и функции подавления альфа-эффекта, для которых производится набор заданных значений ReB^2 (отметим, что этот набор – лишь часть полного набора решений исходной системы, более того, для действительной части B знак не учитывается). На рисунке 3.4 показано, что метод нейродифференциальных уравнений способен находить параметры СДУ, обеспечивающие решение системы, близкое к целевому. Верхняя панель показывает, что оптимизацией параметров динамо-модели можно получить соответствие фазы и амплитуды ReB^2 , начиная с приблизительного начального решения. Нижняя панель показывает, что это соответствие может быть достигнуто с использованием функции α , которая значительно отличается от той функции α , которая использовалась для моделирования целевого решения. Для остальных параметров динамо-модели получаем, что восстановленное динамо-число D равно 3.71 (начальное «случайное» D в данном примере было 3.36), восстановленные начальные значения магнитных полей равны $A_0 = 0.96 + 0.45i$, $B_0 = 0.85 - 1.40i$.

Обратим внимание, что поскольку при подгонке модели учитывается согласие только с квадратом ReB^2 , то восстановленное значение поля ReB (величина переменного знака) может оказаться в противофазе с истинным значением ReB , как показано на рисунке 3.5.

То обстоятельство, что при заданных значениях ReB^2 обнаруживается множество вариантов для параметров системы, объясняется тем, что задача реконструкции параметров является недоопределенной. В связи с этим возникает интерес изучать, насколько широкой может быть эта вариативность параметров и насколько она уменьшается при использовании в обучении более полной информации о магнитном поле, не только ReB^2 . Для изучения этого вопроса рассмотрим три способа восстановления параметров динамо-модели: (i) подгонка только ReB^2 , (ii) одновременная подгонка ReB^2 и ReA , и (iii) подгонка полного набора ReB , ImB , ReA , ImA . В каждом случае будем повторять процесс оптимизации 100 раз, начиная с различных независимых начальных значений параметров динамо-модели.

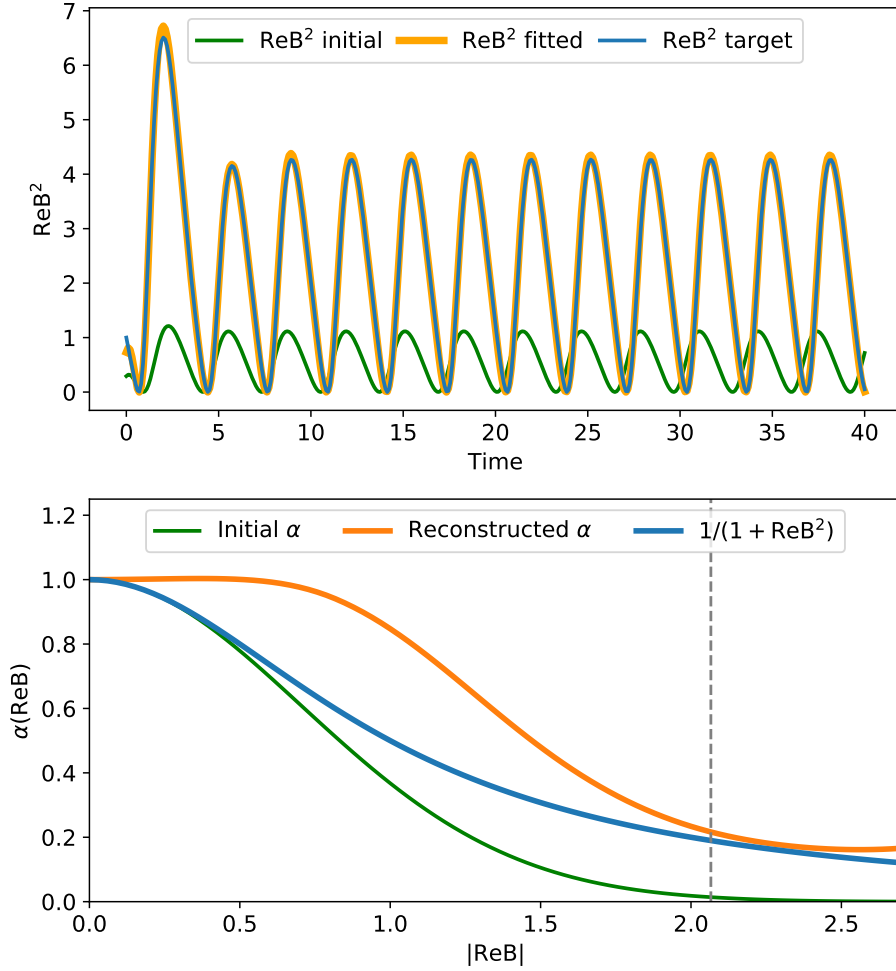


Рис. 3.4: Один из вариантов реконструкции параметров динамо-модели при использовании только значений ReB^2 . На верхней панели показано сравнение начального состояния модели (зеленая линия), модели после обучения (оранжевая линия) и целевого значения ReB^2 (синяя линия). На нижней панели показана начальная функция α (зеленая линия), реконструированная (оранжевая линия) и истинная (синяя линия) функции α . Пунктирная серая линия показывает максимальное значение $|ReB|$ после выхода решения на стационарный режим. Рисунок из работы [106].

При оптимизации на основе нескольких полей разного масштаба оказывается полезным проводить их нормировку (это является стандартным шагом в задачах машинного обучения).

На верхней панели рисунка 3.6 показано, что все три рассмотренных способа обучения модели обеспечивают близкое соответствие данным (показано только значения ReB^2 , которые присутствует во всех трех случаях). Единственные заметные отклонения наблюдаются в начале интерва-

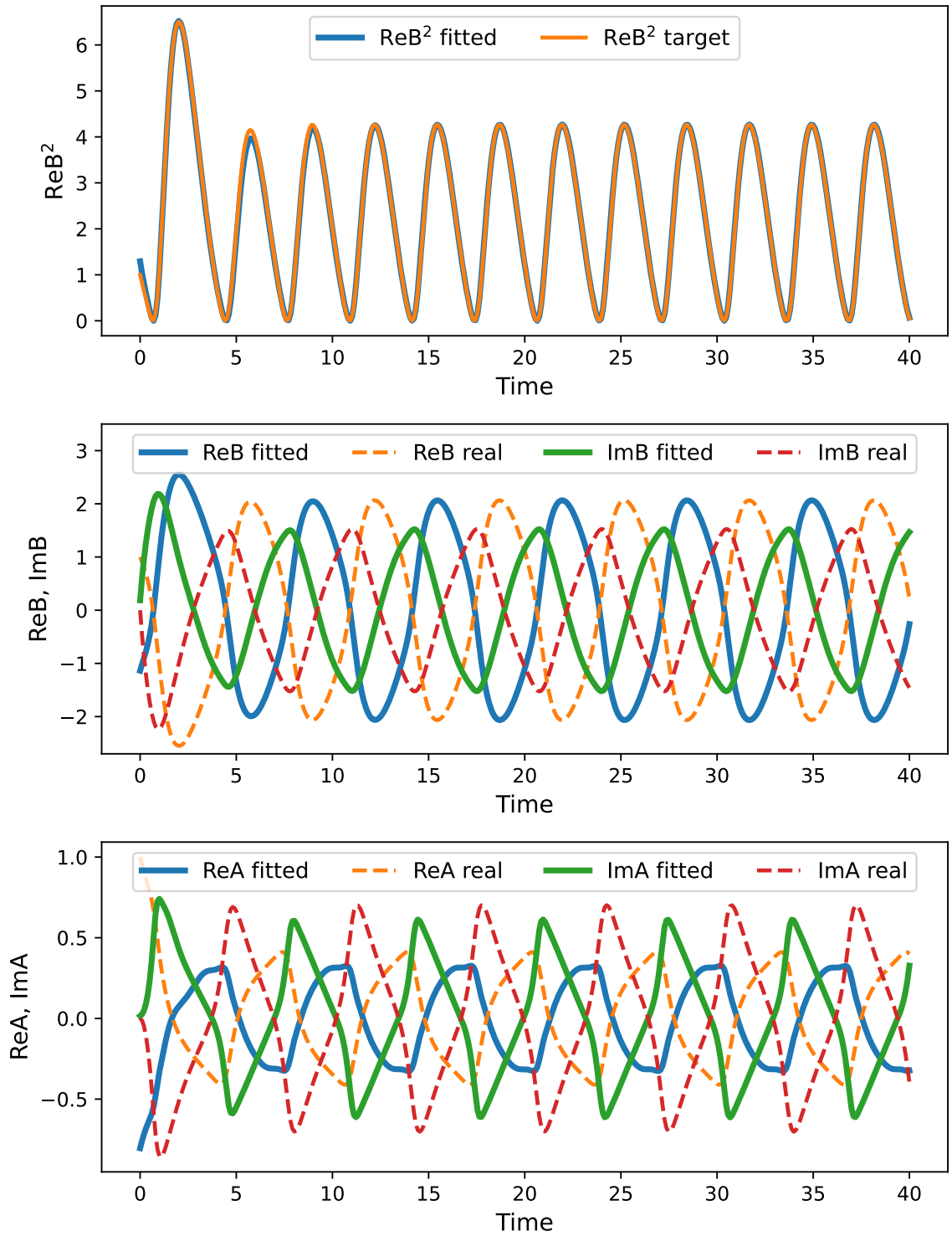


Рис. 3.5: Результат восстановления квадрата ReB^2 , при котором сами поля B и A оказываются в противофазе с истинными.

ла интегрирования, а также имеются незначительные отклонения вблизи максимумов циклов. На средней панели показано, что наибольшая вариативность функций $\alpha(B)$ возникает при подгонке на основе только ReB^2 .

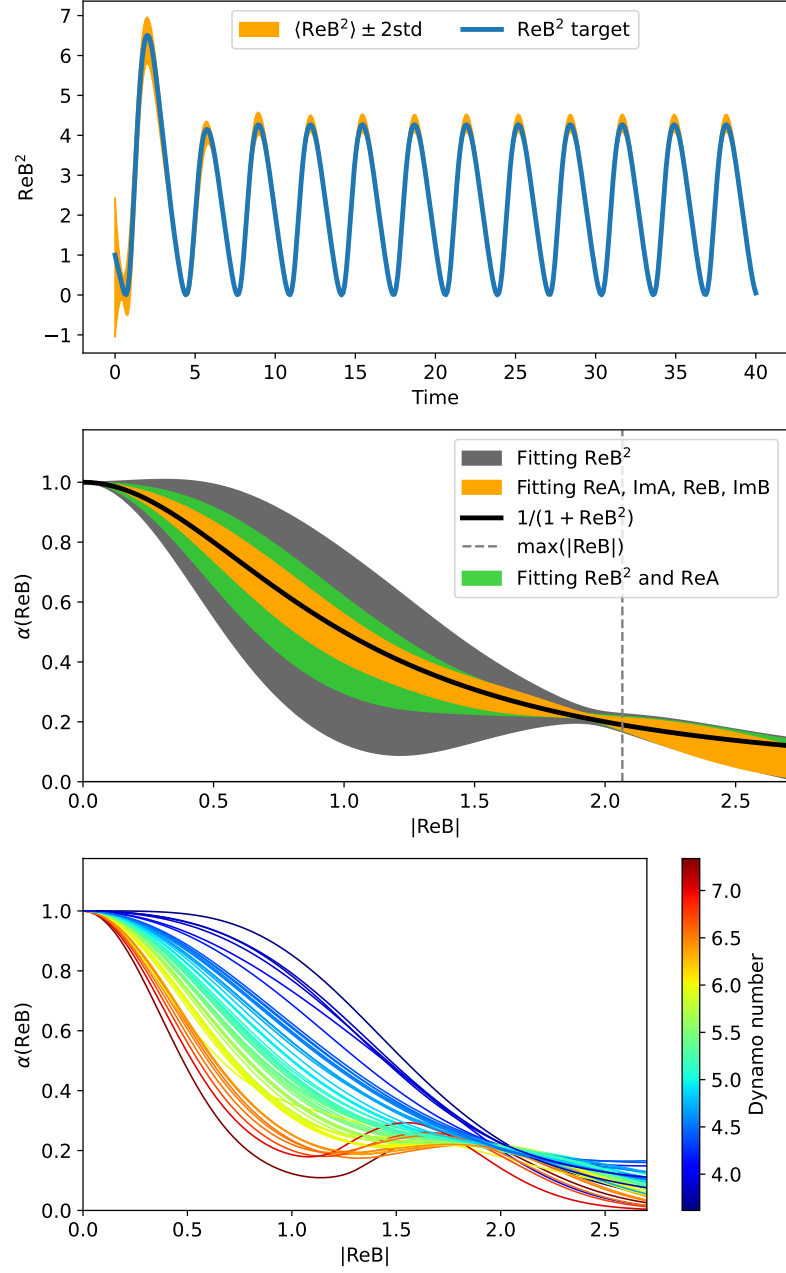


Рис. 3.6: Верхняя панель: вариативность (в пределах двух стандартных отклонений) значений ReB^2 (оранжевая область) после обучения моделей и истинные значения ReB^2 (синяя линия). Средняя панель: вариативность (в пределах двух стандартных отклонений) реконструированных функций α , когда (i) подгоняется только ReB^2 (серая область), (ii) подгоняется как ReB^2 , так и ReA (зеленая область), и (iii) подгоняется полный набор ReA, ImA, ReB, ImB . Черная линия показывает истинную функцию $\alpha(B) = 1/(1 + ReB^2)$. Нижняя панель: реконструированные функции α , когда подгоняется только ReB^2 , окрашенные в соответствии со значением соответствующего динамо-числа. Рисунок из работы [106].

Таблица 3.1: Вариативность динамо-числа D (среднее и стандартное отклонение) по 100 независимым результатам обучения модели.

Метод обучения	Среднее D	$\sigma(D)$
Подгонка ReB^2	5.31	0.83
Подгонка ReB^2 и ReA	5.20	0.41
Подгонка всех значений ReA, ImA, ReB, ImB	5.10	0.26
Истинное значение	5	

При дополнении ReB^2 данными о других компонентах магнитного поля вариативность уменьшается и более того, функции α приближаются к истинной.

Средние значения и степень разброса для динамо-числа D приведены в таблице 3.1. Аналогично ситуации с функцией α , вариативность уменьшается при использовании моделью более полного набора данных о магнитном поле, и оценки сходятся к истинному значению.

На нижней панели рисунка 3.6 показана зависимость между набором реконструированных функций α , когда подгоняется только ReB^2 , и соответствующими динамо-числами. Можно видеть, что увеличение значения динамо-числа соответствует более быстрому затуханию функции α . Отметим также, что когда динамо-число становится достаточно велико, функция α становится немонотонной.

Наконец, обсудим вопрос устойчивости решения при найденных параметрах. Напомним, ранее обучение проводилось на всем доступном интервале целевых значений. Изменим постановку задачи и смоделируем целевое решение на расширенном временном интервале $[0, 50]$, а обучение будем проводить только на его части, отступив от начала и от конца интервала. На рисунке 3.7 показано, что модель по-прежнему находит параметры, при которых решение на интервале обучения согласуется с целевым, при этом продолжение за интервал обучения вправо также дает решение, согласованное с целевым. Таким образом, найденные параметры дают устойчивое решение. Вариативность слева от интервала обучения связана с тем, что существует множество начальных значений модели, которые выходят на один и тот же стационарный режим.

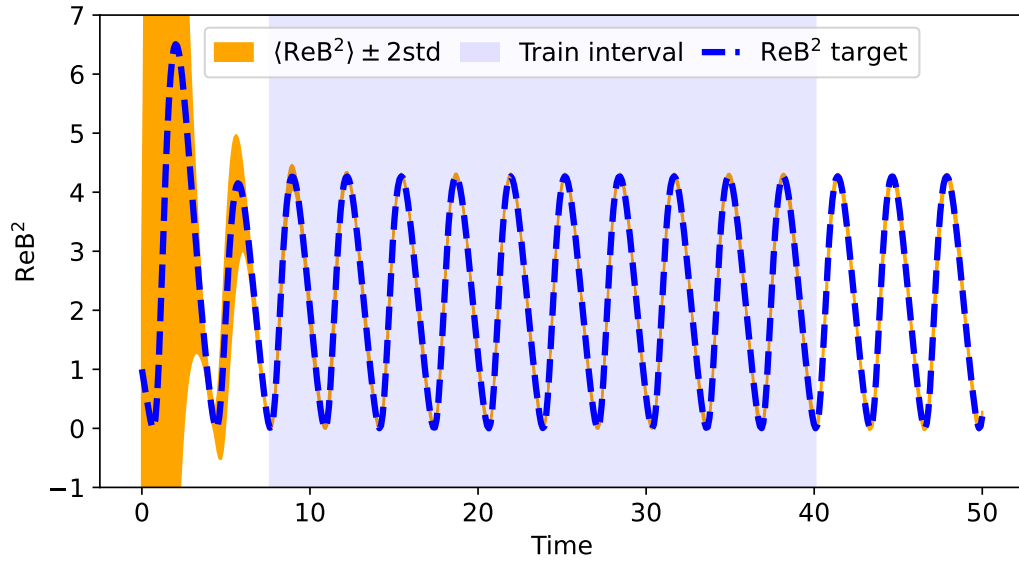


Рис. 3.7: Вариативность (в пределах двух стандартных отклонений) значений ReB^2 (оранжевая область) после обучения моделей и истинное значение ReB^2 (синяя линия). Голубым цветом показана область, на которой происходило обучение модели.

3.4. Средний профиль солнечного цикла

Прямой перенос модели, апробированной выше на синтетических экспериментах, на реальную картину солнечной активности имеет ряд ограничений. Основным ограничением является не концепция нейродифференциальных уравнений, а сама маломодовая динамо-модель (3.11), которая не предполагает воспроизведение нерегулярных изменений интенсивности и продолжительности циклов, свойственных наблюдаемым циклам. Однако можно попытаться воспроизвести профиль среднего цикла, построенного на основе, например, ежемесячных значений индекса солнечной активности Sunspot Number (SN) [54]. Для разделения ряда SN на отдельные циклы был использован гауссовский фильтр с шириной окна два года, с помощью которого ряд был сглажен, затем были выделены минимумы, и на их основе выделены циклы. Далее для последних 24 полных циклов была проведена нормировка: продолжительность всех циклов масштабирована до 11 лет, а максимальная интенсивность приведена к единице.

На рисунке 3.8 показан профиль усредненного солнечного цикла и величина стандартного отклонения. Можно видеть асимметрию профиля в виде

более быстрого роста и более медленного спада, что является устойчивой особенностью солнечной активности [220]. Физические причины, обуславливающие эту закономерность, до конца не изучены. Например, в работе [20] она связывается с нелинейными эффектами, а в работах [70; 124; 173] с флуктуациями в моделях динамо.

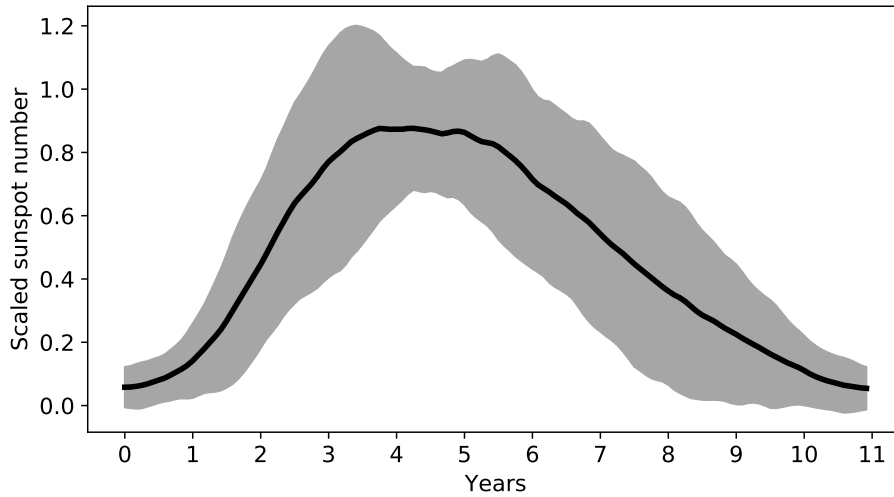


Рис. 3.8: Средний профиль солнечного цикла на основе последних 24 полных циклов. Серым цветом показана величина стандартного отклонения. Рисунок из работы [106].

Поставим задачу подбора параметров в функции подавления альфа-эффекта в маломодовой модели (3.11) для получения согласия с асимметрией среднего профиля солнечного цикла. Для большей вариативности в периоде модельного цикла, динамо-число полагается комплексным.

Для получения стационарного ряда, повторим профиль среднего цикла 12 раз и масштабируем его до временного интервала $[0, 40]$, чтобы сделать постановку задачи совместимой с той, которая использовалась в синтетических экспериментах. Полученный ряд будем связывать с модельным значением ReB^2 (аналогично, например, работе [169]). Это, разумеется, является упрощением и не предполагает прямого переноса на более сложные модели динамо. Для оценки вариативности параметров модели будем проводить процедуру оптимизации 100 раз для различных начальных значений.

Спектр полученных с помощью нейродифференциального подхода

функций подавления и значений динамо-числа показан на рисунке 3.9. Как и в синтетических примерах, наблюдается большая вариативность функции $\alpha(B)$ и динамо-числа D , при этом все найденные значения обеспечивают хорошую аппроксимацию периода, амплитуды и асимметричной формы циклов. Отметим, что вариативность не уменьшается вблизи экстремального значения $|ReB|$, как в синтетических примерах. Вероятно, что это связано с тем, что динамо-число является комплексным и допускает большую вариативность для функции подавления. Найденные значения D лежат на гладкой кривой в комплексной плоскости и увеличение значения вещественной части динамо-числа приводит к более быстрому затуханию функции подавления. Такая же связь между динамо-числом и функцией подавления была отмечена ранее в синтетических экспериментах.

3.5. Выводы

Метод нейродифференциальных уравнений позволяет использовать методы градиентной оптимизации для ассимиляции наблюдательных данных в моделях солнечного динамо. При этом можно ставить задачу как подбора параметров уравнений, так и вида нелинейных функций. В работе на примере маломодовой модели динамо изучался вопрос о восстановлении формы нелинейного подавления альфа-эффекта – одного из наиболее сложных механизмов в теории динамо для теоретического и численного решения. Функция подавления была задана с помощью модели нейронной сети, параметры которой оптимизировались с использованием метода нейродифференциальных уравнений.

Поскольку маломодовые модели по своей структуре имеют ряд существенных ограничений для воспроизведения реальной наблюдательной картины, в первую очередь изучение проходило на синтетических примерах. Целью было прояснить, насколько полнота данных влияет на восстановление параметров модели и в какой степени восстановленные значения соотносятся с теми, что использовались при создании примеров. Основным интерес

На примере синтетических данных, полученных на основе маломодо-

вой модели, было показано, что метод нейродифференциальных уравнений позволяет получать вид функции подавления альфа-эффекта и оценки других параметров модели динамо, для которых решение модели динамо близко соответствовало целевым данным. При этом процедура обучения остается эффективной при уменьшении объема данных о магнитном поле. Это указывает на возможность восстановления основных характеристик нелинейной обратной связи в условиях доступных на практике прямых наблюдательных данных (как правило, ограниченных) и индексов, связанных с солнечной активностью.

Предложенный подход может быть использован для оценки чувствительности решений динамо-модели к функциональной форме подавления альфа-эффекта и другим параметрам модели. Это особенно ценно изучения моделей замыкания в теории динамо средних полей и дает возможность выводить функциональные связи непосредственно из данных. Таким образом, открывается новый путь для сопоставления теории и наблюдений в солнечных и астрофизических динамо-моделях.

На основе ряда данных по солнечной активности было показано, что нейродифференциальная динамо-модель воспроизводит специфичную форму асимметрии солнечного цикла. Как и в синтетических примерах обнаруживается большая вариативность в возможных значениях параметров динамо-модели и сильная взаимосвязь между ними. Для уменьшения этой неопределенности требуется привлечение дополнительных данных о магнитном поле или введение дополнительных ограничений в модель динамо.

Отметим ограничения, присущие самому нейродифференциальному подходу. Прежде всего, поскольку оптимизация происходит на основе градиентного спуска, то ее результату свойственны общие проблемы этих методов, например, застревание в локальных минимумах, чувствительность к начальным значениям, проблема выбора величины шага и критерия остановки. Например, когда шаг выбран слишком большим или начальное приближение выбрано неудачно, метод может приводить в область параметров, для которых решение динамо-модели расходится, после чего процесс оптимизации приходится прерывать из-за выхода за пределы машинной арифметики. Эти проблемы усугубляются и дополняются высоким потреб-

лением вычислительных ресурсов и памяти при большом числе оптимизируемых параметров, в частности, при использовании сложных архитектур нейронной сети. С другой стороны, именно архитектура нейронной сети ограничивает сложность тех зависимостей, которые с ее помощью можно воспроизвести.

Наконец, процесс обучения занимает существенно больше времени, по сравнению, например, с обучением аналогичной архитектуры нейронной сети в обычных задачах регрессии или классификации. В отличие от обычных задач, где градиенты для обучения нейронной получаются с помощью автоматического обратного распространения ошибки, в рамках нейродифференциального подхода градиенты вычисляются на основе решения сопряженной СДУ, что становится основным времязатратным этапом. В частности, на время решения СДУ оказывает влияние выбор схемы интегрирования и величина шага. В проведенных экспериментах 500 итераций было достаточно для достижения желаемой точности, однако это заняло значительно больше времени по сравнению с обучением аналогичной по архитектуре нейронной сети в более простых задачах.

Таким образом, существует значительный потенциал для дальнейшего развития нейродифференциальных подхода как в методологическом аспекте, так и в вопросе вычислительной эффективности. Естественным расширением для случая солнечного динамо является увеличение числа пространственных мод и введение зависимости от широты. В частности, это открывает возможность проводить обучение напрямую на основе широтно-временных данных, а не на одномерном сводном индексе солнечной активности. Представляет также интерес ввести зависимость от времени в параметры модели динамо и функцию подавления. Это позволит моделировать нерегулярные циклы. Более того, если обнаружится, что полученные параметры изменяются медленнее, чем период солнечного цикла, их можно использовать для экстраполяции (прогнозирования) солнечного цикла. Исходный код моделей, представленный в репозитории <https://github.com/observethesun/dynamoNDE>, может служить основой для развития дальнейших исследований.

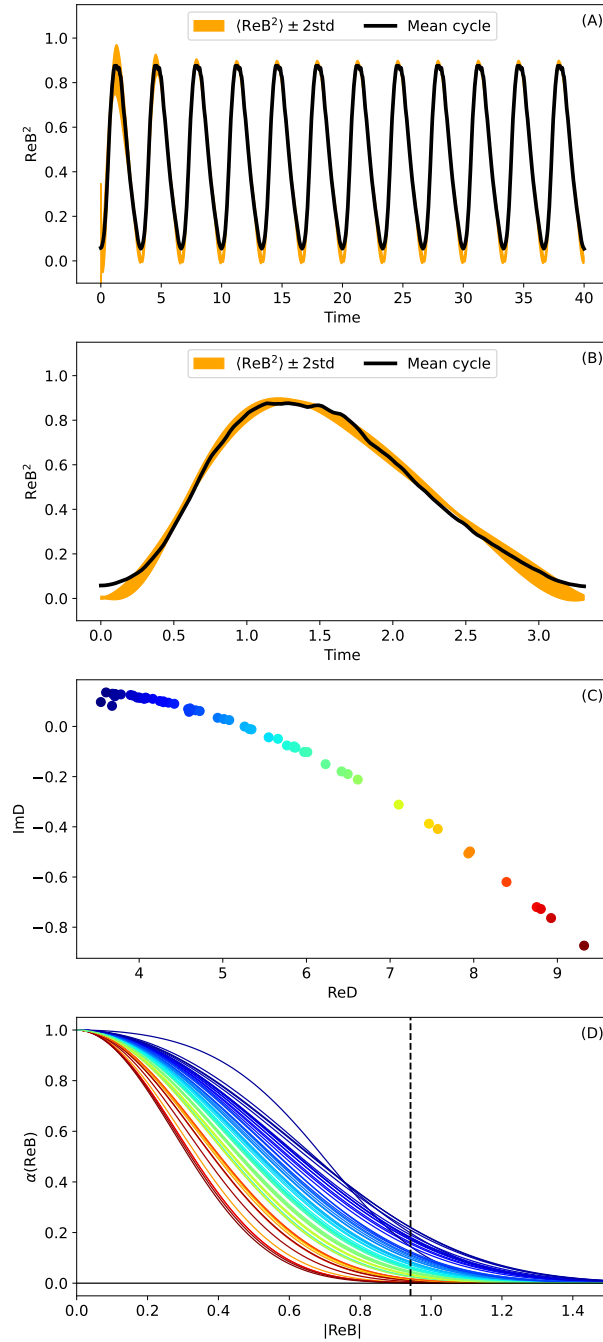


Рис. 3.9: Панель А: вариативность полученных моделей (оранжевая область) по сравнению со средним профилем цикла (черная линия). Панель В: последний цикл, вырезанный из верхней панели. Панели С и D: вариативность подобранных динамо-чисел, показанная в комплексной плоскости (панель С), и вариативность соответствующих функций α (панель D). Одинаковые цвета на панелях С и D указывают на соответствующие пары параметров подобранных моделей. Пунктирная серая линия на панели D показывает максимальное значение $|ReB|$. Рисунок из работы [106].

Глава 4.

Сегментация активных областей на изображениях солнечного диска

Цель данного раздела – предложить подход на основе машинного обучения (модели сверточной нейронной сети) для задачи сегментации активных областей на изображении солнечного диска и продемонстрировать возможности этого подхода для решения более широкого круга задач. В данном подходе во внутренних слоях модели нейронной сети формируются параметры, характеризующие локальные участки изображения, на основе которых строится бинарная карта, отделяющая активные области от фона. В качестве примера будет рассмотрена задача сегментации корональных дыр (КД), а обучение будет происходить на основе результатов обработки изображений экспертами-наблюдателями. Изложение будет следовать работам [116], [113] и [115].

4.1. Набор данных

Набор данных для сегментации КД состоит из пар изображений солнечного диска и соответствующих бинарных карт, отмечающих положение КД. В работе используется ряд ежедневных изображений с разрешени-

ем 1024×1024 , полученных инструментом Atmospheric Imaging Assembly (AIA) на борту спутника Solar Dynamics Observatory (SDO) (SDO/AIA, [145]) в линии $193 \text{ \AA}$. Набор данных охватывает период времени с 2010 года по 2018 год и был получен из каталога <http://jsoc.stanford.edu/>). Карты контуров корональных дыр получены из архива данных Кисловодской горной астрономической станции, для доступа к которому был разработан сайт <http://observethesun.ru>, [241]. Отметим возможности разработанного сайта.

Основной задачей созданного сайта является визуализация результатов ежедневной обработки наблюдений солнечной активности, проводимой на Кисловодской горной астрономической станции. На главной странице представлена трехмерная модель поверхности Солнца, на которой за выбранный день отображаются:

- солнечные пятна, ядра и поры;
- флоккулы;
- волокна;
- протуберанцы;
- корональные дыры;
- солнечная корона.

На рисунке 4.1 показан вид главной страницы сайта с картой активных областей.

Модель Солнца на главной странице сайта является интерактивной: пользователь может вращать ее на любой угол и увеличивать выбранную область карты. При наведении на любой объект на карте возникает окно с ключевой информацией по выбранной области:

- номер группы (для пятен);
- площадь;
- гелиографические координаты центра;

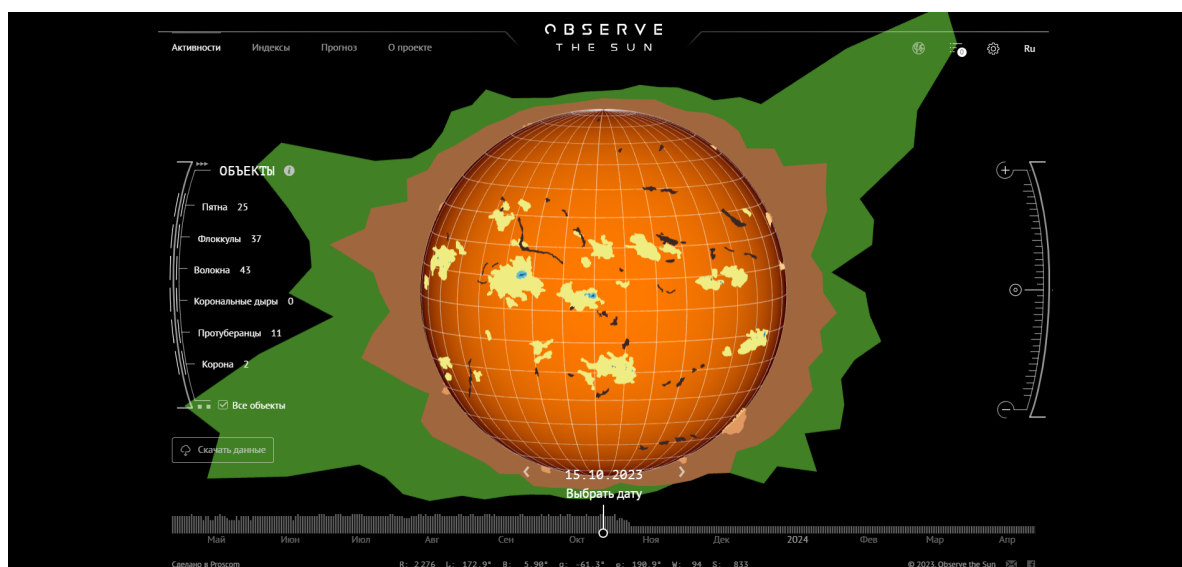


Рис. 4.1: Главная страница сайта observethesun.ru.

- протяженность по широте (для флоккул и КД);
- протяженность по широте (для флоккул и КД);
- протяженность (для волокон);
- протяженность по лимбу (для протуберанцев);
- средняя широта (для протуберанцев);
- средний угол (для протуберанцев);
- высота (для протуберанцев);
- интенсивность (для короны).

На рисунке 4.2 показан участок поверхности Солнца в увеличенном масштабе и пример окна с параметрами области, возникающий при наведении на область.

На главной странице сайта доступен режим сравнения активных областей. Можно выбрать, например, несколько солнечных пятен и сопоставить их форму и ключевые параметры. Пример окна сравнения показан на рисунке 4.3.

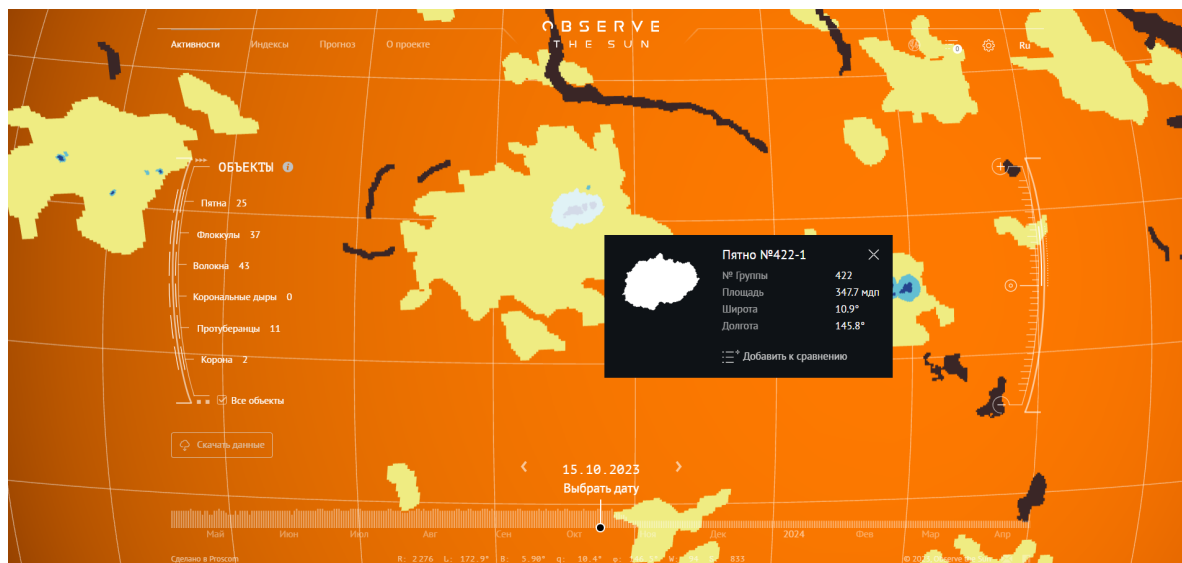


Рис. 4.2: Участок поверхности Солнца в увеличенном масштабе и пример окна с параметрами выбранной области.

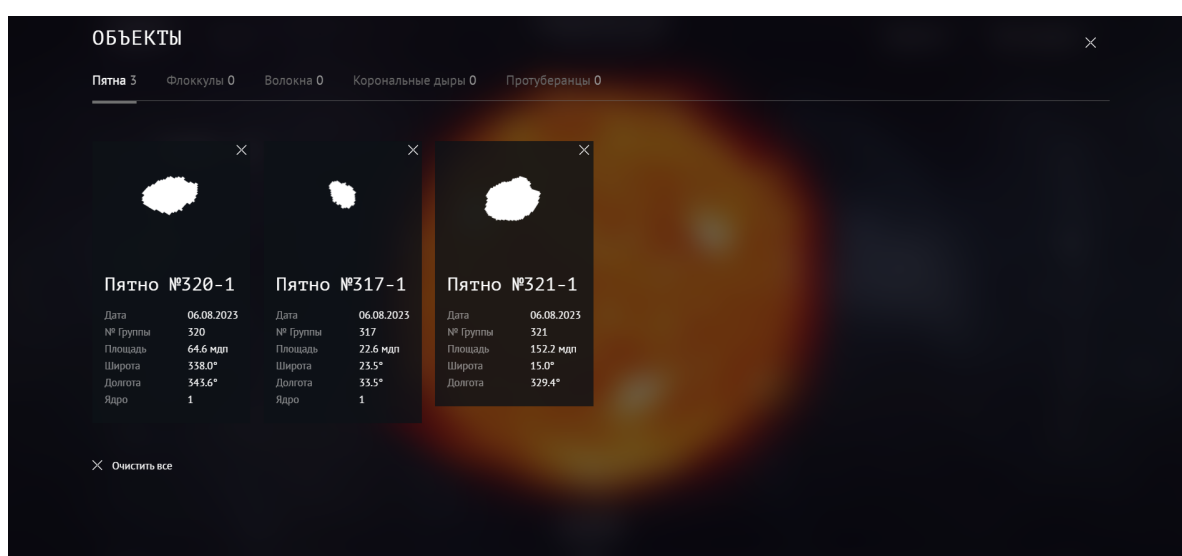


Рис. 4.3: Режим сравнения отдельных активных областей.

Помимо данных Кисловодской горной астрономической станции, ряд данных дополнен результатами обработки наблюдений

- Обсерватории Койдаканал;
- Гринвичской обсерватории;
- Обсерватории Маунт-Вилсон;
- Обсерватории солнечной динамики (SDO);
- Солнечной и гелиосферной обсерватории (SOHO);
- Солнечной обсерватории Канцельхох.

В результате, ряд данных на сайте покрывает период более 100 лет.

Для визуализации долговременной динамики солнечной активности на сайте представлены индексы солнечной активности для пятен, флоккул, волокон, протуберанцев, короны и корональных дыр. Так, для солнечных пятен за выбранный диапазон дат приводятся ежедневные или среднемесячные значения:

- суммарная площадь (мдп);
- суммарная площадь пятен в северном полушарии (мдп);
- суммарная площадь пятен в южном полушарии (мдп);
- площадь максимального пятна (мдп);
- число Вольфа;
- число Вольфа в северном полушарии;
- число Вольфа в южном полушарии.

На рисунке 4.4 показан пример индексов для солнечных пятен за период 2013–2023.

Индексы для корональных дыр включают в себя

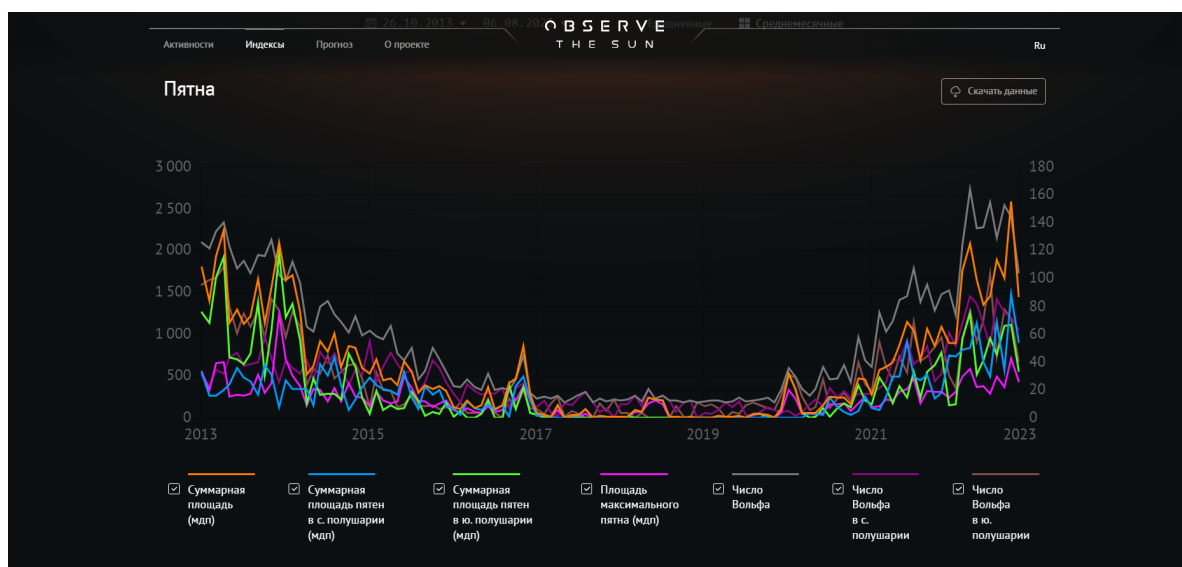


Рис. 4.4: Индексы солнечной активности на основе данных по солнечным пятнам за период 2013–2023.

- суммарная площадь (мдп);
- суммарная площадь пятен в северном полушарии (мдп);
- площадь полярных КД (мдп);
- площадь низкоширотных КД (мдп).

На рисунке 4.5 показаны индексы для корональных дыр за период 2013–2023.

На основе оценки параметров корональных дыр формируется прогноз космической погоды – траектории распространения и скорости солнечного ветра. На рисунке 4.6 показан пример прогноза солнечного ветра.

Следует отметить, что исходная информация о геометрической форме активных областей представлена в виде набора координат пикселей, которые относятся к активной области. С точки зрения хранения и передачи данных – это не самый оптимальный формат, поскольку размер файла и всего архива получается достаточно большим. Более того, это описание зависит от разрешения изображения и оказывается неудобным при наложении изображений с разным разрешением. Например, при наложении карты магнитных полей и карты корональных дыр. Решения этой проблемы был

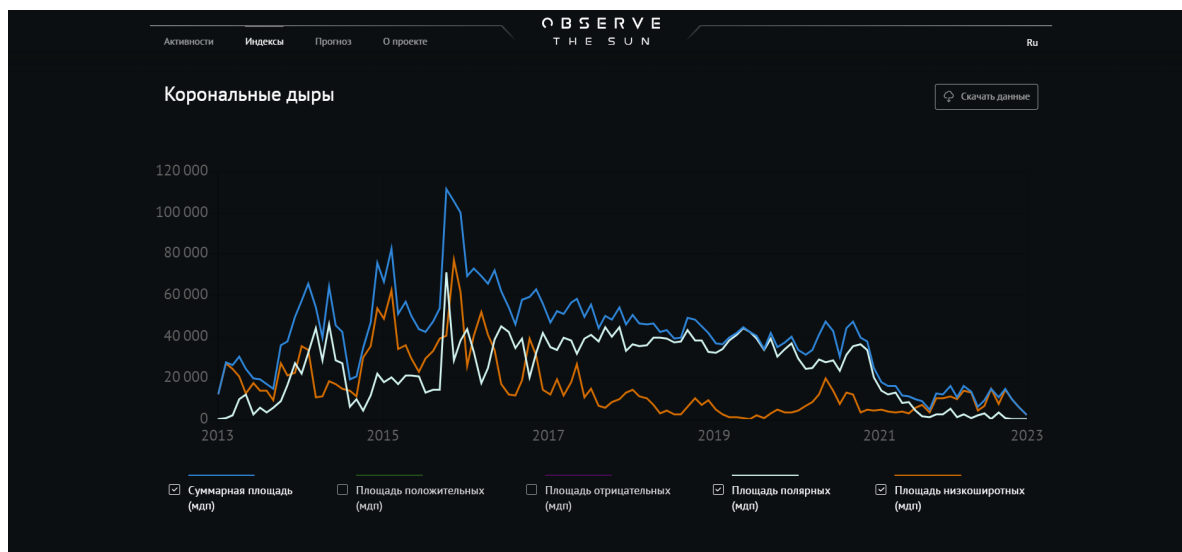


Рис. 4.5: Индексы солнечной активности на основе данных по корональным дырам за период 2013–2023.



Рис. 4.6: Визуализация прогноза солнечного ветра.

разработан новый формат описания активной области – через координаты вершин, задающих контуры области. Вершины задаются в гелиографической системе координат, что упрощает задачу переноса контуров на изображения с другим разрешением.

Для построения контуров области используется алгоритм "marching squares" [148]. Контур представляет из себя многоугольник, вершины которого переводятся в гелиографические координаты. Одним из преимуществ представления области в виде контура является простая формула ([46]) для оценки площади области на поверхности сферы:

$$S = -\frac{R^2}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (\varphi_{i+1} - \varphi_i) \sin \theta_i, \quad (4.1)$$

где φ_i и θ_i – долгота и широта вершины многоугольника на сфере радиуса R .

Помимо площади, вычисляется и ряд других параметров области:

- периметр;
- вершины прямоугольной рамки, содержащей область;
- координаты центра;
- протяженность по широте и долготе.

Полученная информация: координаты вершин и параметры области записываются в текстовый файл в формате JSON. На рисунке 4.7 показана структура файла.

Для перевода данных по солнечным пятнам, флоккулам, волокнам и корональным дырам в формат контуров, а также выгрузки данных с сервера за произвольный диапазон дат разработан комплекс программ, представленный в репозитории <https://github.com/observethesun/helio>. В частности, на рисунке 4.8 показан фрагмент кода для выгрузки контуров корональных дыр.

Напомним алгоритм обработки корональных дыр (КД), применяемый на Кисловодской горной астрономической станции для составления ката-

```

{'data': [{'vetrtices': [[lat_1, lon_1], [lat_2, lon_2], ..., [lat_n, lon_n]],
            'area': area,
            'area_units': 'millionth of the solar hemisphere',
            'perimeter': p,
            'bbox': (lat_min, lon_min, lat_max, lon_max),
            'bbox_center': (lat, lon),
            'dlat': dlat,
            'dlon': dlon,
            'deg': true,
            },
          {'vetrtices': [[lat_1, lon_1], ..., ...],
            ...},
          ...,
          {'vetrtices': [[lat_1, lon_1], ..., ...],
            ...}]
}

```

Рис. 4.7: Структура файла с описанием геометрии и параметров областей.

```

1  from helio import get_kislovodsk_data
2
3  get_kislovodsk_data(series='ch', #'spot' for sunspots, 'ca' plages, 'fil' filaments, 'ch' coronal holes
4                        start_date='2022-12-01', #YYYY-MM-DD
5                        end_date='2022-12-31', #YYYY-MM-DD
6                        path='./contours/') #set the path to the existing local directory

```

Рис. 4.8: Процедура для выгрузки контуров активных областей из архива Кисловодской горной астрономической станции.

лога КД, который будет использован для обучения моделей. КД выделяются с помощью полуавтоматической процедуры обработки изображений солнечного диска SDO/AIA 193 Å. Эта процедура, с незначительными модификациями, повторяет процедуру, описанную в работе [213] и применявшуюся для идентификации КД по наблюдениям в линии He I 10830 Å, выполненным на обсерватории Китт Пик с 1975 по 2003 гг., и в линии 195 Å, полученных аппаратом SOHO/EIT с 1996 по 2012 гг.

На первом этапе алгоритм определяет центр и радиус солнечного диска. Затем вычисляется распределение интенсивности пикселей в пределах солнечного диска и выбираются начальные области с интенсивностью пикселей ниже квантиля уровня 0.4. Уровень спокойного Солнца (LQS) вычисляется как мода распределения интенсивности пикселей с диска. Обратите внимание, что пороговый параметр для начальных регионов, который по умолчанию равен 0.4, задается оператором и на практике может быть изменен для достижения лучшего результата. Следующий шаг состоит из постепенного выращивания регионов из начальных областей. На каждой итерации новые пиксели с интенсивностью выше $0.4 + 0.05 * i * LQS$ объединяются в регион, где i – текущий шаг итерации. Итерация прекращается, когда скорость роста площади региона резко возрастает.

Полученные регионы с площадью менее 2 000 миллионных долей солнечной полусферы (МДП) отфильтровываются. Наконец, регионы, отнесенные алгоритмом к КД, изучаются оператором визуально и при необходимости корректируется пороговый параметр для начальных регионов. Результат работы, содержащий координаты границ КД и параметры КД (например, площадь и вытянутость), заносятся в каталог и на карту солнечной активности на сайте <http://observethesun.com>.

Полный набор используемых в работе данных содержит 2916 пар изображений солнечного диска и соответствующих карт КД. Набор разделяется на обучающую и тестовую части, где обучающая часть содержит все пары до 2017 года (2385 образцов), а тестовая часть – все пары, начиная с 2017 года.

Наряду с данными Кисловодской обсерватории, разумеется, существуют и другие каталоги КД, которые, теоретически, могли бы выступить

в качестве референсных (исключая те, которые строятся на основе полностью автоматической процедуры). На сегодняшний день не существует общепринятого набора критериев, позволяющих оценивать качество каталога, и более того, вопрос в чем именно должно измеряться качество тоже далеко неясен. Приведем некоторые дополнительные аргументы в пользу того, что выбранный каталог КД перспективен для построения на его основе моделей машинного обучения.

Идея оценки каталога КД состоит в том, что корональные дыры в каталоге должны быть релевантны наблюдаемой скорости солнечного ветра (СВ). Поясним эту идею. Существует достаточно устоявшаяся точка зрения, подкрепленная рядом работ, например, [140; 197], что корональные дыры являются источником высокоскоростных потоков солнечного ветра, которые, наряду с выбросами корональной массы, приводят к развитию геомагнитных возмущений. Более того, корональные дыры могут существовать в течение нескольких периодов вращения Солнца, что приводит к формированию повторяющихся потоков солнечного ветра. Соответственно, можно предположить, что КД, вернее, какие-то их параметры, должны соответствовать наблюдаемым вариациям скорости солнечного ветра. Конечно, на малых масштабах времен эта связь может быть устроена весьма сложным образом, поэтому разумно говорить о некоторых общих тенденциях на достаточно больших временных промежутках. Отметим, что в исследованиях значительно большее внимание уделяется именно коротким временным промежуткам и исследуется детальная связь между параметрами отдельной КД и скоростью СВ, поскольку на этом могут быть основаны модели прогноза космической погоды (см., например, [2; 95; 98; 123; 165; 186]). Если отойти от задачи прогноза скорости СВ, а интересоваться только общими изменениями на больших временных масштабах, то возникает вопрос о том, какие параметры КД (или их комбинации) и в какой степени могут объяснить долговременные изменения скорости СВ. Будем исходить из того, что чем лучше такая связь просматривается, тем более релевантным является каталог КД, и это можно использовать как один из критериев оценки каталога.

Рассмотрим эту связь на примере каталога КД, составляемого Кисло-

водской горной астрономической станцией. Для сравнения будет использован каталог SPoCA-HEK [225] из базы данных под названием Heliophysics Event Knowledgebase (HEK, <https://www.lmsal.com/hek>) за период 2010–2025 г. Дальнейший анализ будет следовать работе [115].

На рисунке 4.9 показана общая площадь корональных дыр в различных широтных интервалах (северные и южные полярные области и область низких широт широтный), усредненная с использованием скользящего окна размером 180 дней. Можно видеть, что согласие между этими каталогами лучше для полярных КД (корреляция составляет около 0.9) и хуже для низкоширотных КД (корреляция составляет около 0.6).

Также можно отметить, что общая площадь полярных КД систематически больше в каталоге SPoCA-HEK, в то время как для низкоширотных КД ситуация меняется со временем.

Рисунок 4.9 также объясняет выбора именно каталога SPoCA-HEK для сравнения. Этот каталог довольно близок по общему количеству КД к каталогу кислородской станции, но, несмотря на это, разница в корреляции с данными о солнечном ветре окажется значительной, как показывает следующий анализ.

Ежедневные данные о скорости солнечного ветра, измеренные спутником Advanced Composition Explorer (ACE, [210]), получены из базы данных OMNI <https://omniweb.gsfc.nasa.gov>. Следует отметить, что высокоскоростные потоки солнечного ветра могут быть связаны не только с КД, но и с корональными выбросами массы (КВМ). Представляется разумным исключить такие события, но, как выясняется ниже, это оказывает лишь незначительное влияние при усреднении данных за широкие временные интервалы.

Для исследования влияния КВМ используется каталог геоэффективных КВМ <https://srl.caltech.edu/ACE/ASC/DATA/level3/icmeta/ble2.htm>. Будем рассматривать КВМ с максимальной скоростью потока (обозначаемой параметром V_{max}) более 400 км/с и удалим все данные ACE за период один день до и три дня после даты начала КВМ. Эта операция приводит к появлению пропущенных значений во временных рядах данных ACE. Для сравнения исходных и отфильтрованных данных ACE усредним

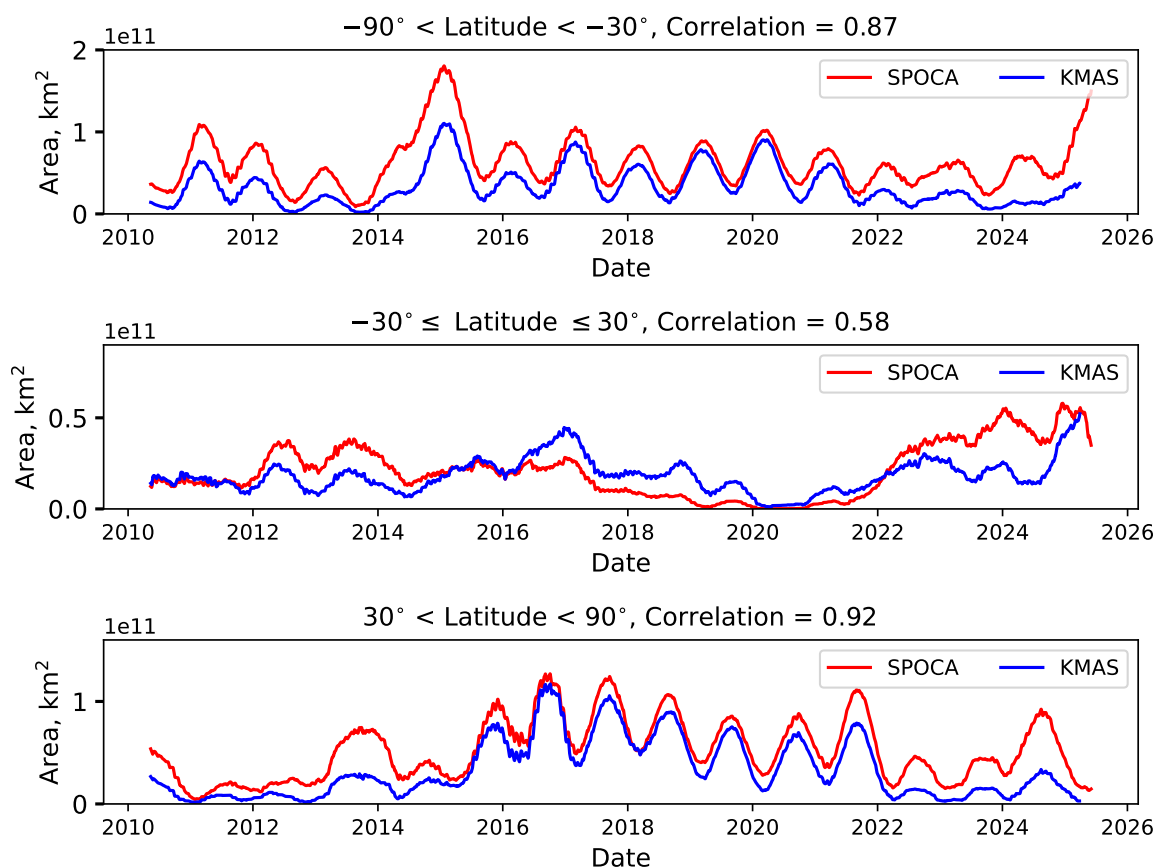


Рис. 4.9: Ежедневная суммарная площадь КД, усредненная по скользящим окнам размером 180 дней. Красная линия соответствует КД, представленным в каталоге SPoCA-НЕК, синяя линия показывает КД из каталога Кисловодской горной астрономической станции. Название каждого графика указывает широтный интервал, использованный для выбора КД, и коэффициент корреляции между временными рядами. Рисунок из работы [115].

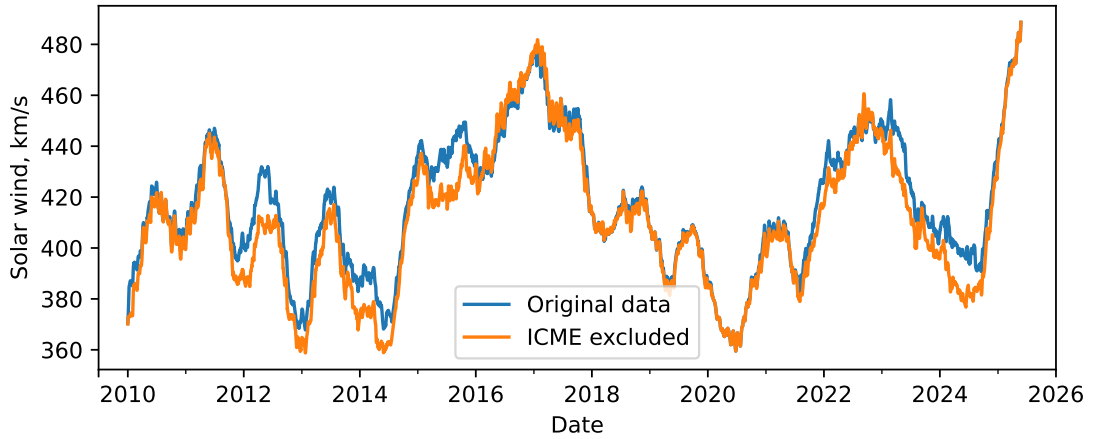


Рис. 4.10: Скорость солнечного ветра, усредненная по скользящим окнам в 180 дней. Синяя линия показывает усреднение исходных данных АСЕ, оранжевая линия показывает усреднение данных АСЕ вне событий КВМ. Рисунок из работы [115].

оба временных ряда, используя скользящее окно в 180 дней. При усреднении пропущенные значения не заполняются нулями, а игнорируются как в числителе, так и в знаменателе формулы усреднения. Полученные значения присваиваются центральным точкам скользящих окон.

На рисунке 4.10 показано сравнение исходных данных АСЕ и данных АСЕ вне событий КВМ. Можно видеть, что разница довольно незначительна, и для простоты далее будем использовать исходные данные АСЕ без какой-либо фильтрации.

Далее перейдем сопоставлению данных по КД и солнечному ветру. Хотя параметры и контуры КД позволяют составлять сложные морфологические индексы, будем рассматривать наиболее простой из них – ежедневную суммарную площадь КД в пределах определенных широт, усредненную по различным временным интервалам.

Рассмотрим три широтные зоны: (i) $|\theta| \leq 30^\circ$, (ii) $|\theta| \leq 50^\circ$ и (iii) $|\theta| \leq 90^\circ$. Граница 50° выбрана в качестве границы, разделяющей полярные КД (см., например, [97]). В каждой из них будем вычислять суммарную площадь КД за каждый день (если в конкретный день КД нет, суммарная площадь полагается равной нулю). Далее, ежедневные значения усредняются с использованием скользящие окна размером (i) 1/2 года, (ii) 1 год и (iii) 2 года. В общей сложности получается девять вариантов индексов

КД, для которых изучается корреляция со скоростью солнечного ветра, усредненной за те же временные интервалы.

На рисунке 4.11 показано сравнение девяти построенных индексов со сглаженными значениями скорости солнечного ветра. На этом рисунке индексы КД масштабированы так, чтобы соответствовать диапазону значений скорости солнечного ветра. Коэффициенты корреляции для каждого индекса показаны на рисунке 4.12.

На рисунках 4.11 и 4.12 можно видеть, что для каталога Кисловодской горной астрономической станции уменьшение широтной зоны с 90° (весь солнечный диск) до более низких широт (30°) равномерно увеличивает корреляцию для всех окон усреднения по времени. Увеличение окна усреднения по времени приводит к увеличению коэффициентов корреляции во всех широтных областях. В частности, для индекса, построенного по КД в пределах 30° от солнечного экватора и усредненного по скользящему окну в 1 год, получен коэффициент корреляции 0.9. Усреднение по скользящим окнам в 2 года дает коэффициент корреляции 0.94. Явная формула для индекса КД выглядит следующим образом:

$$I_{CH} = (2.7/10^9) [1/(\text{km} \times \text{s})] \times Area [\text{km}^2] + 365 [\text{km/s}] , \quad (4.2)$$

где $Area$ – результат усреднения за 1 год (или 2 года) ежедневных суммарных площадей КД, центр которых находится в пределах 30° от солнечного экватора. Значение I_{CH} присваивается середине временного окна, по которому проводится сглаживание.

Сравнение с каталогом SPoCA-НЕК показывает, что высокая корреляция для низких широт и усреднения за ≥ 1 год является не тривиальным свойством исключения полярных КД и большого окна усреднения, а особенностью каталога. Действительно, в каталоге SPoCA корреляция не превышает 0.55 для всех рассмотренных комбинаций широтной границы и окна усреднения по времени. Более того, можно видеть, что максимальная корреляция (0.55) достигается для КД, взятых со всего диска, т.е. включая полярные КД, в то время как для КД с низких широт корреляция составляет всего около 0.3. Следует отметить, что оба каталога дают довольно

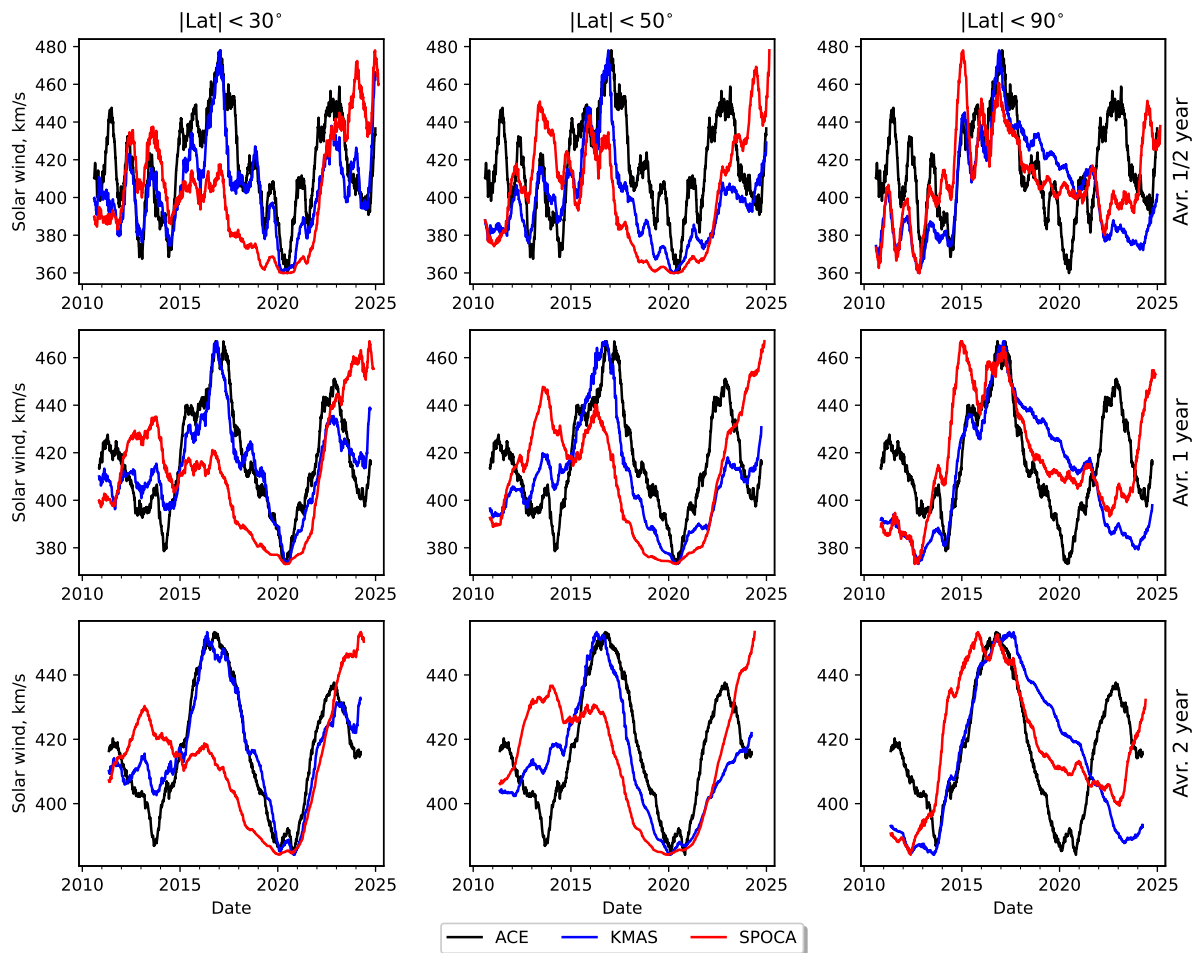


Рис. 4.11: Различные индексы площадей корональных дыр в сравнении со скоростью солнечного ветра. Синие линии показывают индексы, построенные на основе каталога Кисловодской горной астрономической станции, красные линии – индексы, построенные на основе каталога SPoCA-НЕК. Черные линии показывают скорость солнечного ветра, измеренную спутником ACE. В первой строке индексы и данные о скорости солнечного ветра усреднены по скользящим окнам в 1/2 года, во второй строке – по скользящим окнам в 1 год, в последней строке – по скользящим окнам в 2 года. В первом столбце показана общая площадь корональных дыр в пределах 30° от солнечного экватора, во втором столбце – в пределах 50° , а в третьем столбце – площадь со всех широт. Рисунок из работы [115].

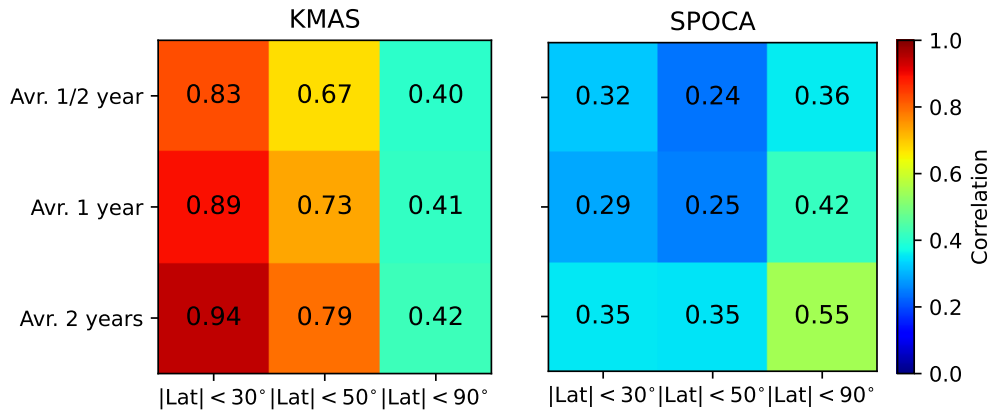


Рис. 4.12: Коэффициенты корреляции между индексами КД и скоростью солнечного ветра. Левая панель соответствует каталогу Кисловодской горной астрономической станции, правая – каталогу SPOCA-НЕК. Строки и столбцы на каждой панели соответствуют строкам и столбцам на рисунке 4.11. Рисунок из работы [115].

схожую умеренную корреляцию ($\approx 0.4 - 0.5$) для КД со всего диска.

Сильная корреляция, полученная с использованием каталога Кисловодской горной астрономической станции, вызывает интерес для более детального исследования. А именно, изучим следующий вопрос: для данного момента времени и на каких широтах наиболее высока корреляция между областями КД и скоростью солнечного ветра? Для ответа на этот вопрос построим широтно-временную диаграмму (рисунок 4.13), где каждое значение представляет собой коэффициент корреляции между областями КД вблизи данной широты и вблизи данного момента времени со скоростью солнечного ветра. Более подробно алгоритм построения широтно-временной диаграммы выглядит следующим образом:

- широты разделяются на перекрывающиеся интервалы ($90^\circ, 80^\circ$), ($85^\circ, 75^\circ$), ($80^\circ, 70^\circ$), ..., ($-80^\circ, -90^\circ$); В каждом широтном интервале за каждый день вычисляется суммарная площадь КД;
- ежедневные суммарные площади КД усредняются с использованием скользящего окна размером 1/2 года (180 дней);
- ежедневные данные о скорости солнечного ветра усредняются с использованием скользящего окна того же размера 1/2 года (180

дней);

- для каждого широтного интервала рассчитываются скользящие коэффициенты корреляции с использованием скользящих окон размером 2 года (т.е., в каждом временном окне размером 2 года рассчитывается коэффициент корреляции);
- полученные коэффициенты корреляции для каждого временного окна размером 2 года и широтного интервала отображаются на широтно-временной диаграмме

На рисунке 4.13 можно видеть локализованные временные и широтные области, в которых площади КД сильно (выше 0.75) коррелируют со скоростью солнечного ветра. Некоторые из этих областей расположены на высоких широтах (выше 50°). Скорее всего, эти корреляция вызваны вариациями солнечного В-угла. Возможно, локальное увеличение скорости солнечного ветра случайным образом совпало с увеличением В-угла и соответствующим увеличением видимой площади СН в полярной области. Еще один аргумент против высокой корреляции на полярных широтах заключается в том, что в каждом случае, когда обнаруживается высокая корреляция на полярных широтах, существуют также области и на низких широтах с высокой корреляцией. Можно предположить, что низкоширотные КД являются потенциальными кандидатами на роль источников высокоскоростных потоков солнечного ветра.

Для сравнения на рисунке 4.14 показана широтно-временная корреляционная диаграмма, основанная на каталоге SPoCA-НЕК. Хотя визуально обе диаграммы достаточно хорошо согласуются между собой, однако количественные выводы следует делать из значений на рисунке 4.12.

Проведенный анализ позволяет говорить о том, что каталог КД Кисловодской горной астрономической станции является репрезентативным и может быть использован в качестве образца для моделей машинного обучения.

Однако поскольку данные в каталоге Кисловодской горной астрономической станции представлены с шагом по времени один день, то даже

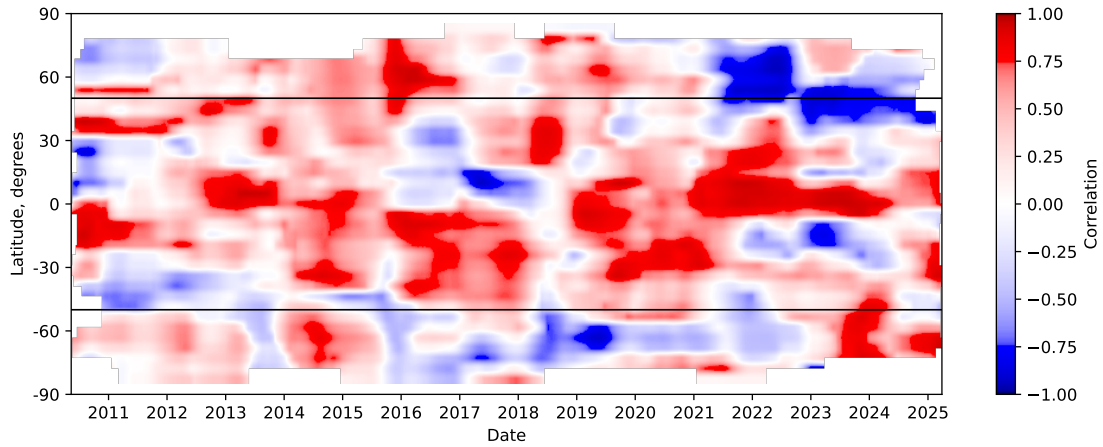


Рис. 4.13: Широтно-временная диаграмма коэффициентов скользящей корреляции между площадями КД вблизи данной широты и данного момента времени и скоростью солнечного ветра. Данные усреднены с использованием скользящих окон размером $1/2$ года; коэффициенты скользящей корреляции вычислены с использованием скользящих окон размером 2 года. Данные по КД получены из каталога Кисловодской горной астрономической станции. Черные горизонтальные линии обозначают широты $\pm 50^\circ$. Рисунок из работы [115].

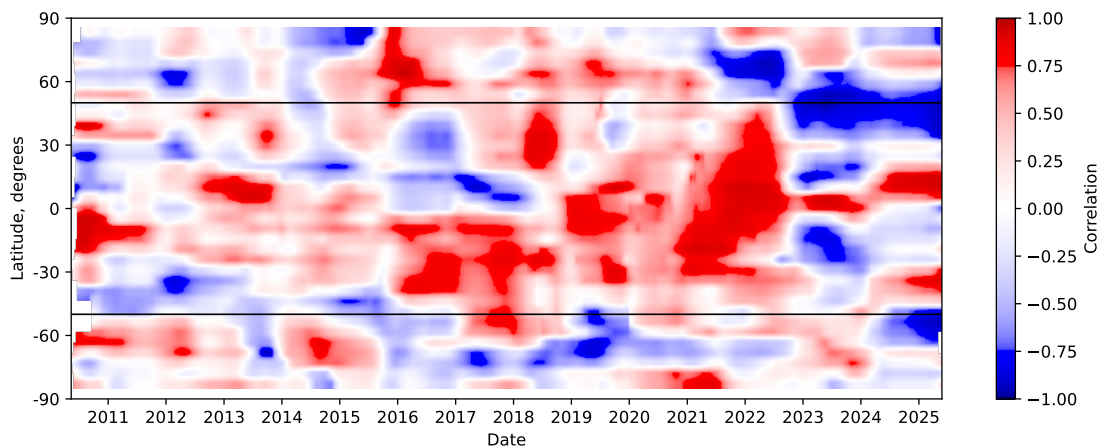


Рис. 4.14: Аналогично рисунку 4.13, но для каталога SPoCA-HEK. Рисунок из работы [115].

десять лет наблюдений дает лишь несколько тысяч карт КД, что недостаточно для обучения моделей, имеющих десятки тысяч параметров. В противном случае может наступать эффект переобучения, при котором модель демонстрирует высокое качество на обучающей выборке, но при этом показывает низкое качество на образцах не из обучающей выборки (говорят, что модель имеет низкую обобщающую способность). Поэтому ограниченность обучающей выборки будем компенсировать тем, что использовать предварительную обработку изображений, расширяющую обучающий набор данных (эту процедуру принято называть аугментацией данных). А именно, уменьшим размер исходных изображений с 1024×1024 до 256×256 пикселей, нормируем значения пикселей в диапазон $[0, 1]$ из исходных значений интенсивности $0, 1, \dots, 255$, и применим поворот каждого изображения на случайный угол в $0, 90, 180, 270$ градусов и случайное отражении вдоль вертикальной и горизонтальной оси. Случайные преобразования, включенные в предварительную обработку, увеличивают количество обучающих данных и уменьшают риск переобучения модели (см., например, [172]). Карты КД также уменьшаются в размере с исходного размера 1024×1024 пикселей до 256×256 пикселей. Каждый пиксель равен 1 или 0 в зависимости от того, принадлежит он к КД или нет.

4.2. Модель сегментации корональных дыр на изображениях солнечного диска

Предлагаемая модель сегментации основана на сверточной нейронной сети. Это специальный тип архитектуры нейронной сети, который является естественной модификацией модели полносвязной нейронной сети для тех задач, в которых входные данные представлены многомерными массивами, между соседними элементами которых предполагается наличие связей. Типичный пример подобных массивов – это любые изображения (фотографии). Однако это могут быть не только двумерные массивы, но и одномерные, например, временной ряд, и массивы размерности больше двух. Интерес к применению модели нейронной сети в значительной степени вос-

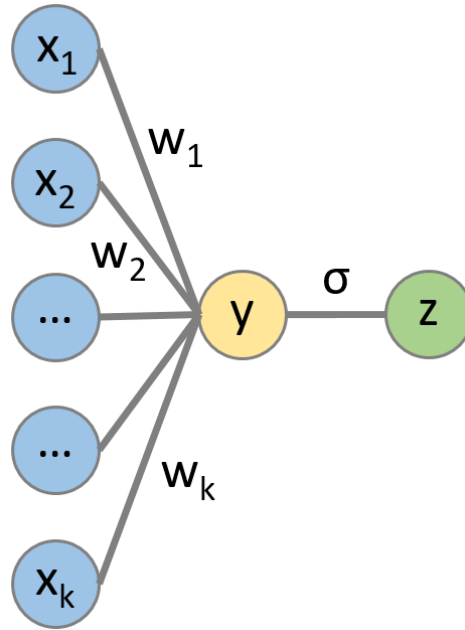


Рис. 4.15: Вычислительная схема нейрона. Входные переменные $x_1, x_2, \dots, x_k$ складываются с весами $w_1, w_2, \dots, w_k$ в величину y , к которой применяется функция активации σ . Выходом нейрона является величина $z = \sigma(y)$.

ходит к результату, известному как теорема об универсальной аппроксимации (см., например, [61]).

Чтобы пояснить этот результат и его фундаментальное значение, напомним понятие полносвязной нейронной сети. Самый простой пример полносвязной нейронной сети – это модель обычной линейной регрессии, в которой зависимая переменная y выражается через зависимые $x_1, x_2, \dots, x_k$ (k – размерность признакового пространства) через линейную комбинацию и весовыми коэффициентами $w_1, w_2, \dots, w_k$ и сдвиг b :

$$y = b + w_1x_1 + w_2x_2 + \dots + w_kx_k.$$

Конечно, подобную модель принято называть именно линейной регрессией, а не нейронной сетью, хотя она и является частным случаем нейронной сети. Далее обозначим ряд идей, которые расширяют данную конструкцию. Первая идея – добавление в модель нелинейности за счет того, что выходное значение y пропускается через выбранную нелинейную функцию $\sigma(\cdot)$, и итоговым результатом становится значение $z = \sigma(y)$. На рисунке 4.15 приведена схема нейрона.

Выбор конкретной нелинейной функции обычно происходит из соображений простоты вычисления ее самой и, что важно на этапе оптимизации модели, ее производной. В качестве примера удобного в этих отношениях выбора можно привести сигмоидальную функцию

$$\sigma(y) = \frac{1}{1 + e^{-y}}.$$

В терминах нейронных сетей нелинейные функции называются функциями активации, а получившаяся выше модель – нейронная сеть, состоящая из одного нейрона с функцией активации σ , или просто *нейрон*.

Следующая ключевая идея для построения нейронной сети – использование множества нейронов, выстроенных слоями в единую сеть. Для этого ко входным переменным $x_1, x_2, \dots, x_k$ применим сразу h различных нейронов и обозначим их выходы через $z_1, z_2, \dots, z_h$. Отметим, что весовые коэффициенты в нейронах могут быть различны между собой. Функции активации обычно выбирают одинаковыми для всех нейронов. Набор $z_1, z_2, \dots, z_h$ называют *скрытым* слоем сети. Затем возьмем еще один нейрон, определим его входами значения $z_1, z_2, \dots, z_h$ и обозначим его выход через $\tilde{z}$. Наглядно всю конструкцию удобно представить в виде вычислительного графа (см. рисунок 4.16), который в данном примере называется нейронной сетью с одним скрытым слоем. Можно заметить, что построенная функция $\tilde{z} = \text{net}(x_1, x_2, \dots, x_k)$ является непрерывной и, более того, гладкой. Ясно, что варьируя параметры модели (весовые коэффициенты, число нейронов) будут получаться разные непрерывные функции. Результат, полученный в работе [61], говорит о том, что любую непрерывную функцию в ограниченной области можно сколь угодно близко приблизить функцией, реализуемой полносвязной нейронной сетью с одним скрытым слоем и сигмоидальной функцией активации.

Теорема об универсальной аппроксимации не накладывает ограничений на размер скрытого слоя сети, и для конкретной задачи он может оказаться достаточно большим. Однако на практике вместо увеличения числа нейронов на скрытом слое оказывается эффективнее строить более глубокие сети, в которых реализуется несколько последовательных скрытых слоев.

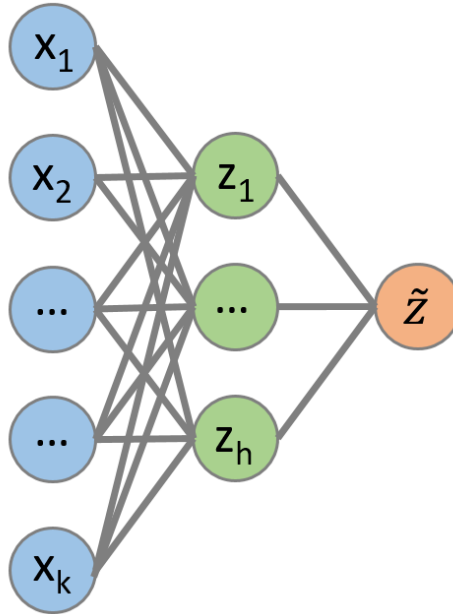


Рис. 4.16: Пример архитектуры полносвязной нейронной сети с одним скрытым слоем. Синим цветом показаны входные переменные, зеленым – нейроны скрытого слоя, оранжевым – нейрон выходного слоя.

Также из практических соображений выясняется, что полносвязные сети (для которых входами в каждый нейрон текущего слоя являются все выходы с предыдущего слоя) не вполне подходят для работы с изображениями. Причин здесь несколько. Во-первых, для полносвязной сети требуется преобразование двумерного массива в одномерный, что нарушает исходную структуру данных. Во-вторых, полносвязная сеть для работы с изображением потребует большого числа параметров. Например, если изображение имеет размер 100×100 пикселей, то каждый нейрон первого слоя будет содержать $10^4 + 1$ свободных параметров. Большое число параметров модели на практике приводит к явлению переобучения, и требует больших ресурсов памяти на этапе обучения модели.

Напомним, как обычно строится процедура обучения модели нейронной сети на примере задачи регрессии (прогноза непрерывной величины). Для этого обычно используют идею обучения с учителем (supervised learning). Вначале формируется обучающая выборка, состоящая из пар (X, y) , где X – вектор признаков, y – целевая переменная. Не касаясь всех деталей процедуры сборки обучающей выборки, отметим только наиболее важные требования. Во-первых, значение имеет размер выборки. Также как и в

методах статистической оценки, точность модели зачастую напрямую зависит от размера выборки. Помимо размера выборки, критически важным оказывается ее качество: отсутствие ошибок, систематических искажений и т.д. Конечно, на практике этого гарантировать трудно, поэтому сбор и подготовка выборки обычно занимает длительное время, часто даже на этот этап уходит основное время проекта. Наконец, помимо размера и качества, важную роль играет разнообразие (вариативность) выборки. Это позволяет модели достигать лучшей обобщающей способности и большей точности при работе с новыми выборками.

Следующим шагом на этапе обучения модели является выбор метрики – способа измерения близости между прогнозным и истинным значением. Выбор метрики будет определять поведение функции потерь, которая будет минимизироваться в процессе обучения модели. Соответственно, от выбора метрики будет зависеть скорость обучения и точность итоговой модели. Примером функции потерь для задачи регрессии может случить среднеквадратичная ошибка (mean squared error, MSE):

$$L(\theta) = \sum_j (net(X_j, \theta) - y_j)^2,$$

где θ – набор всех свободных параметров модели, (X_j, y_j) – элемент обучающей выборки, а запись $net(X_j, \theta)$ подчеркивает, что выходное значение модели нейронной сети зависит от вектора признаков X_j и параметров модели θ . Процедура обучения состоит в подборе значений θ , минимизирующих функцию потерь $L(\theta)$. Учитывая, что нейронная сеть является гладкой функцией, для решения этой задачи мог бы подойти метод градиентного спуска. Однако на практике функция $L(\theta)$ имеет множество локальных минимумов и поиск подходящего (пусть и не глобального) оказывается сложной задачей. Для ее решения применяют более сложные процедуры оптимизации.

Сложность процедуры оптимизации, особенно в случае, когда размерность набора параметров θ высокая, является еще одним аргументом, почему для работы с изображениями необходима более подходящая архитек-

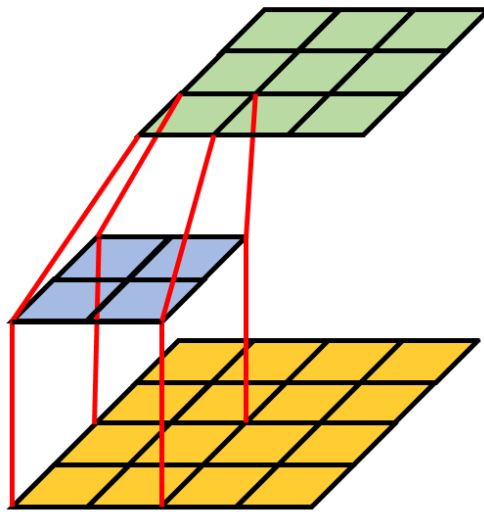


Рис. 4.17: Схематичное изображение процедуры свертки. Исходное изображение (показано желтыми квадратиками-пикселями) поэлементно перемножается с ядром свертки (синие квадратiki), результат суммируется и записывается в элемент выходного изображения (зеленые квадратiki).

тура нейронной сети, чем полносвязная. На практике для работы с изображением часто используют сверточную сеть. Идея в том, что изображение сворачивается с некоторым ядром, обычно небольшого размера, например, 3×3 или 5×5 , значения в ядре свертки являются свободными параметрами, по аналогии с весовыми коэффициентами полносвязной сети. Для примера, в случае ядра 3×3 , для каждого фрагмента размера 3×3 из исходного изображения производится поэлементное перемножение фрагмента и ядра свертки, для полученной матрицы 3×3 вычисляется сумма, результат записывается в новый двумерный массив, сохраняя соответствие с положениями исходных фрагментов. Схематично это процедура показана на рисунке 4.17.

Количество применяемых ядер свертки может быть больше одного, тогда у выходного массива добавляется еще одна размерность, соответствующая результатам свертки с каждым ядром. Данная операция называется *сверточным слоем*. Основными глобальными параметрами сверточного слоя является

- размер ядра свертки;

- число ядер свертки;
- величина шага сдвига фрагментов по каждой пространственной размерности.

Далее с выходу сверточного слоя применяется функция активации и затем может быть определен следующий сверточный слой.

Полезно отметить, что хотя по определению свертка с ядром, имеющим размер больше единицы, приводит к изменению пространственного размера изображения, однако его можно сохранить, окружив по краям исходное изображение рядом пикселей, например, заполненных нулями. Кроме того, существенным отличием сверточной модели от полносвязной является то, что сверточная модель может работать с изображениями любого размера, в то время как число входов в полносвязной сети фиксировано.

Подобные сети состоят из входного и выходного слоев и ряда скрытых слоев. Скрытые слои могут быть представлены сверточными слоями, слоями, понижающими или повышающими пространственную дискретизацию, нормализующими слоями и некоторыми другими типами слоев. Подробное определение слоев можно найти, например, в [27], [64] или [85]. Способ соединения слоев определяет архитектуру нейронной сети. Обучение нейронных сетей заключается в оптимизации обучаемых параметров для заданной функции потерь между целевыми значениями и предсказаниями модели.

Для сегментации КД будет применяться архитектура типа U-Net, разработанная первоначально для сегментации биомедицинских изображений [184]. Стоит отметить, что U-Net-подобные сети демонстрируют высокое качество при решении самых разных задач сегментации, как в 2D, так и в 3D. Например, при анализе спутниковых [103] или в анализе медицинских изображений [52; 53; 104].

На рисунке 4.18 показана архитектура нейронной сети, которая предлагается для сегментации КД. Для простоты будем называть эту сеть U-Net. Входной и выходной слои сети имеют одинаковые размерности $256 \times 256 \times 1$. Входной слой принимает черно-белое (одноканальное) изображение солнечного диска размером до 256×256 пикселей. Выходной слой возвращает

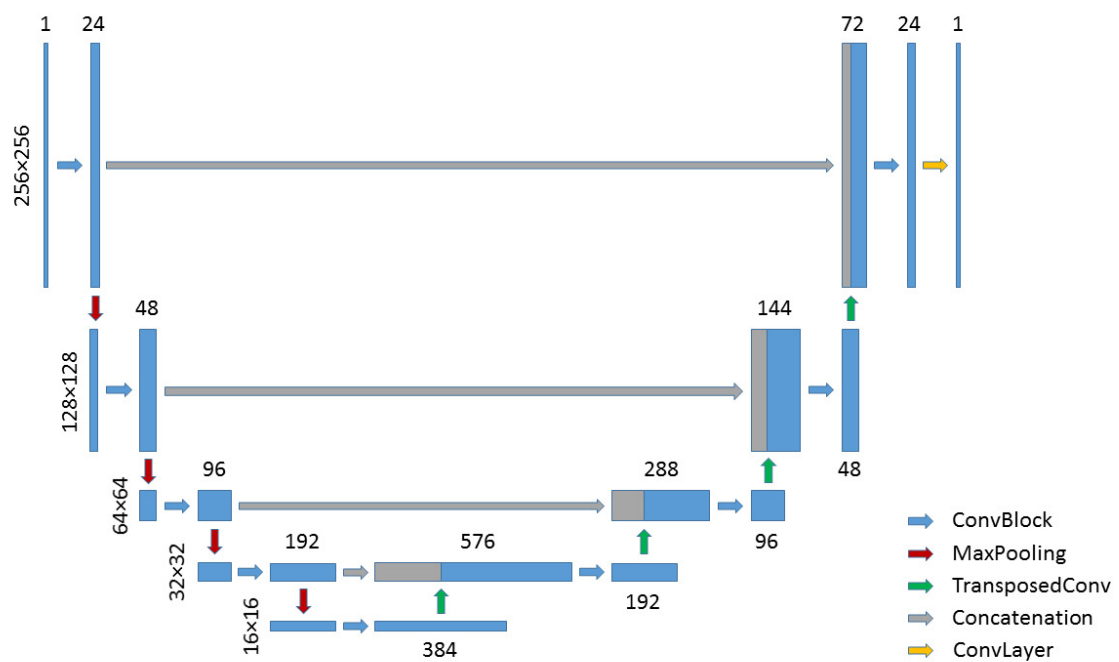


Рис. 4.18: Архитектура нейронной сети для сегментации КД. Каждый блок соответствует многоканальному массиву признаков. Числа над и под блоками указывают на число каналов, а числа слева от блоков показывают пространственные размеры. Цветные стрелки соответствуют различным операциям, обозначенным на рисунке. Рисунок из работы [116].

карту сегментации, т.е. матрицу размера 256×256 , где пиксели, отнесенные к КД, имеют значения, близкие к 1, а все прочие пиксели имеют значения, близкие к 0. Скрытые слои представлены операциями под названием ConvBlock, MaxPooling, TransposedConv, Concatenation и Conv и объясняются ниже.

ConvBlock – это обозначение двух последовательных сверточных слоев с функцией активации ELU (см. [57]). Оба сверточных слоя имеют одинаковое количество фильтров, эти числа показаны на рисунке 4.18. Обратим внимание, что количество фильтров в ConvBlocks удваивается сверху вниз по сети, начиная с 24. Размер ядра для всех сверток в модели берется равным 3×3 . После операции свертки пространственное разрешение остается неизменным. В конце ConvBlock применяется слой Dropout [206] с параметром 0.1. Слой Dropout деактивирует во время обучения случайный (с заданной вероятностью) набор нейронов. Это помогает нейронной сети бороться с явлением переобучения.

Слой MaxPooling уменьшает пространственное разрешение в два раза, используя функцию максимума для скользящих окон размера 2×2 . Размерность числа канала остается неизменной.

TransposedConv – сверточный транспонированный слой [74] с функцией активации ELU, имеющей вид

$$ELU(x) = \begin{cases} x, & \text{при } x > 0 \\ \exp(x) - 1, & \text{при } x \leq 0 \end{cases} \quad (4.3)$$

Данный слой удваивает выходные пространственные размеры. Иногда эту операцию также называют ”деконволюцией”.

Операция Concatenation просто складывает два тензора вдоль оси каналов изображения.

Последний выходной слой Conv – это слой свертки с функцией активации $\sigma(x) = (1 + e^{-x})^{-1}$. Сигмоидная функция гарантирует, что выходные значения сети находятся в диапазоне $[0, 1]$. Напомним, что эти значения интерпретируются как вероятность принадлежности пикселей к КД.

Интуитивно архитектуру U-net сети можно понять следующим образом.

Левая ветвь сети сжимает входное изображение для извлечения контекстной информации. Соединения между левой и правой ветвями передают контекстную информацию для улучшения ее локализации во время восстановления маски из сжатого состояния (правая ветвь).

Для обучения модели используются изображения солнечного диска и соответствующие карты КД. Обучение происходит с помощью модифицированного алгоритма градиентного спуска ADAM [129].

Мера сходства между предсказанной и целевой картами сегментации (функция потерь для алгоритма оптимизации) вычисляется с помощью бинарной кросс-энтропии, определяемой как

$$loss(Y, \hat{Y}) = -\frac{1}{n^2} \sum_{i,j=0}^n y_{ij} \log \hat{y}_{ij} + (1 - y_{ij}) \log(1 - \hat{y}_{ij}), \quad (4.4)$$

где $Y = (y_{ij})$, $\hat{Y} = (\hat{y}_{ij})$ – целевая и предсказанная карты КД соответственно.

Процедура обучения происходит итеративно, на каждой итерации выбирается поднабор данных (батч), вычисляется значение функции ошибки и в соответствии с заданным алгоритмом оптимизации обновляются веса (обучаемые параметры) модели. Когда наборы данных исчерпываются, говорят, что завершилась очередная эпоха обучения. Затем данные перемешиваются в случайном порядке и начинается новая эпоха обучения. Подобная схема обучения зачастую улучшает сходимость алгоритма оптимизации (см., например, [157]). Как было показано, например, в [176], большие размеры батчей обеспечивают лучшие результаты классификации или регрессии для нейронных сетей. Однако всегда существует компромисс между размером батча, размером нейронной сети и ограничениями памяти CPU/GPU. Сеть U-Net имеет около 6.2 миллионов обучаемых переменных. Для работы использовалась видеокарта GeForce GTX 1060 с 6 Гб памяти и размер батча был выбран равным 20. Стоит отметить, что процедура обучения полностью на CPU занимает более чем в 10 раз больше времени.

На рисунке 4.19 показано, как функция потерь изменяется с итерациями обучения. Можно видеть, что 3 эпохи (357 итераций) достаточны для до-

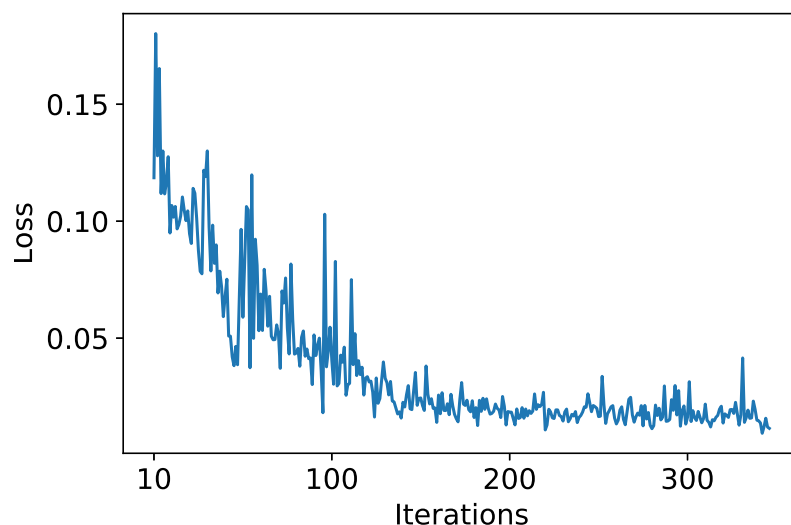


Рис. 4.19: Функция потерь (бинарная кросс-энтропия) в зависимости от итераций. Первые десять итераций пропущены из-за больших значений функции потерь. Рисунок из работы [116].

стижения плато в функции потерь, что означает сходимость к некоторому правильному локальному минимуму. Среднее значение потерь на последних эпохах равно 0.018.

Отметим, что исходный код, необходимый для воспроизведения процедуры обучения, предоставлен в репозитории https://github.com/observethesun/coronal_holes.

4.3. Анализ результатов сегментации корональных дыр

Обученная сеть была использована для получения карт КД на тестовой части набора данных. Напомним, что тестовая часть состоит из ежедневных изображений SDO/AIA 193 Å с января 2017 по июнь 2018 года. На рисунке 4.20 показан пример сегментации КД (в этот день, 30 января 2017 года, U-Net обнаружила самую большую КД в тестовом периоде, площадь КД составила около 13% площади солнечного полушария).

Следует отметить, что в алгоритме не применяется никакой постобработки для полученных карт КД. Причин несколько. Во-первых, это дает

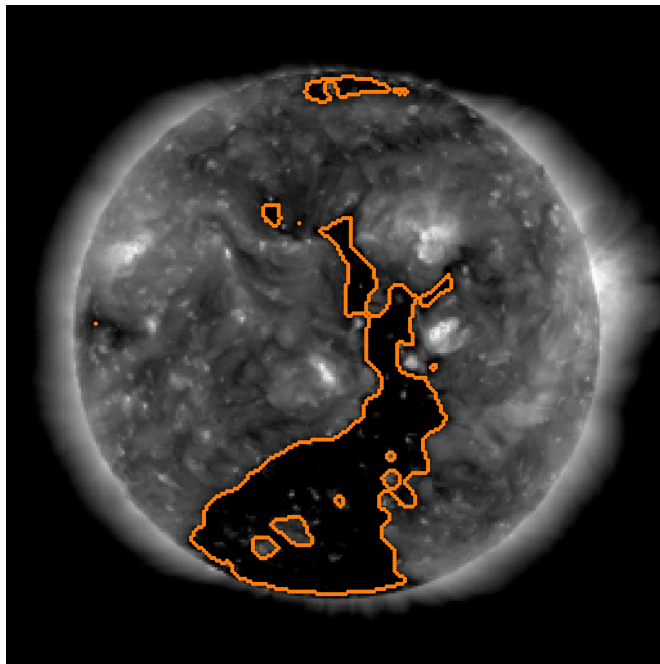


Рис. 4.20: Контуры корональных дыр, выделенных U-Net (30 января 2017 года). Здесь и далее размер изображения 256×256 пикселей. Рисунок из работы [116].

представление о реальном уровне качества сегментации КД с помощью нейронной сети. Во-вторых, как представляется, что большинство недостатков в предсказанных результатах могут быть устранены не за счет исправлений на этапе постобработки, а за счет усовершенствования архитектуры сети, схемы обучения сети или обучающей выборки. В-третьих, сравнение КД с магнитограммами и отбрасывание некоторых КД в связи с их униполярностью является процедурой, которая требует детального исследования, которое выходит за рамки данной работы.

Также следует отметить, что КД, выделенные с помощью нейросетевой модели, скорее являются лишь кандидатами в КД и вероятно, требуют уточнения. Однако поскольку вопрос о том, как именно в реальности выглядит КД, является открытым, сосредоточимся на демонстрации стабильности процедуры и ее сравнении с другими каталогами КД. Для сравнения

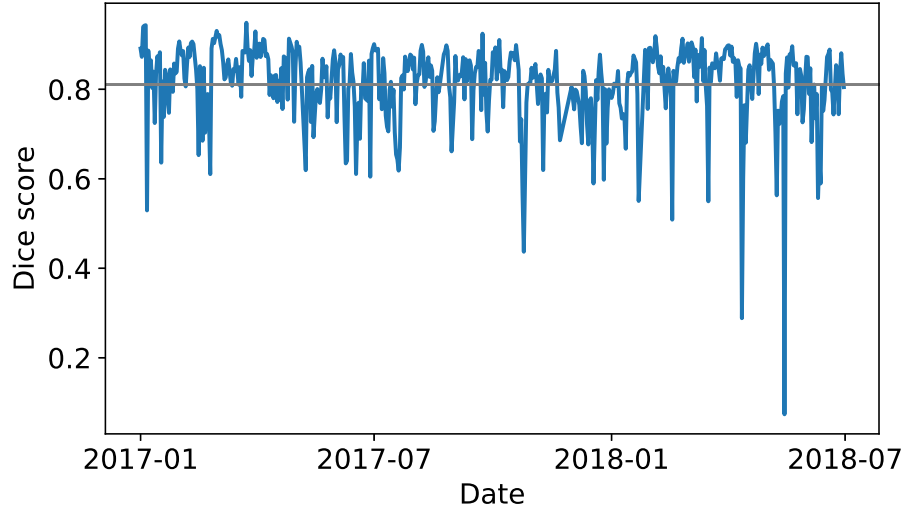


Рис. 4.21: Коэффициент dice между картами КД, предсказанными с помощью U-Net модели и карт КД из тестового набора. Горизонтальная линия показывает среднее значение 0.81. Рисунок из работы [116].

рассматривается каталог КД, выделенных алгоритмом CHIMERA (доступен на сайте <https://solarmonitor.org/data/>, алгоритмом SPOCA (доступен на сайте <http://lmsal.com/isolsearch>) и карты КД из тестовой части набора данных Кисловодской горной астрономической станции.

Будем сравнивать карты КД, используя коэффициент сходства dice [67]. Для двух множеств A и B он выражается как

$$dice(A, B) = \frac{2|A \cap B|}{|A| + |B|}, \quad (4.5)$$

где $|A|$ – мощность множества A . Интуитивно, это можно рассматривать как процент перекрытия между двумя множествами.

Сначала сравним карты КД, предсказанные с помощью U-Net модели, с картами КД для того же дня из тестовой выборки. На рисунке 4.21 показан коэффициент dice между двумя картами КД для тестового периода времени.

Можно видеть, что коэффициент dice флуктуирует около своего среднего значения, которое равно 0.81, со стандартным отклонением 0.1. Чтобы лучше интерпретировать это значение, можно отметить, что два concentric circles с внешним радиусом на 20% больше внутреннего имеют

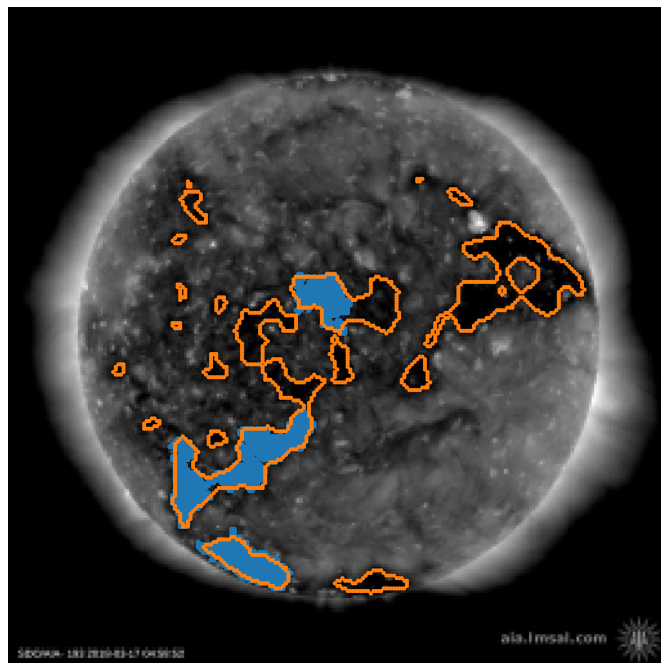


Рис. 4.22: Существенная разница между КД из тестового набора данных (синие области) и U-Net моделью (оранжевые контуры). 17 марта 2017 года. Dice score – 0.55. Рисунок из работы [116].

Коэффициента dice 0.82. Редкие выбросы на рис 4.21 в основном вызваны недооценкой КД в тестовых картах. Пример выброса со значением dice 0.55 показан на рисунке 4.22. Можно видеть, что U-Net обеспечивает более точный результат сегментации.

Коэффициент dice также может быть использован для оценки стабильности карт сегментации. Действительно, рассматривая карты сегментации КД не в солнечном диске, а в кэррингтонской системе координат, можно естественно ожидать, что изображения не сильно меняются от дня к дню. Таким образом, имеет смысл вычислять коэффициент dice между соседними картами. Чтобы пренебречь эффектом вращения, будем считать коэффициент dice между текущей картой и объединением карт за день до и день после текущего дня. Затем построим гистограмму коэффициентов dice за тестовый период времени. На рисунке 4.23 показаны сглаженные

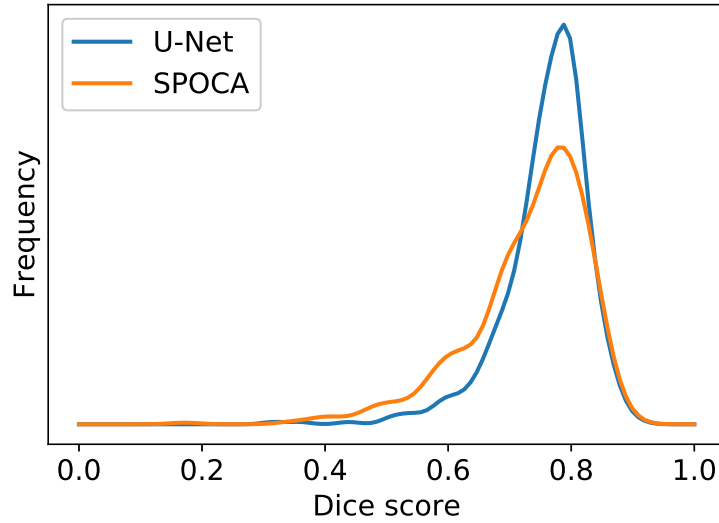


Рис. 4.23: Распределение коэффициентов dice для карт КД, полученных моделью U-Net (синяя линия) и SPOCA (оранжевая линия). Рисунок из работы [116].

гистограммы для карт КД, полученных моделью U-Net, и карт КД из каталога SPOCA.

На рисунке 4.23 можно заметить, что хотя моды распределений очень близки, график распределения для U-Net примерно на 25% выше. Это означает, что U-Net создает более устойчивые карты сегментации по сравнению с SPOCA. К сожалению, каталог КД, выделенных CHIMERA, не содержит границ КД и поэтому не включен в данный анализ.

Далее рассмотрим другой аспект устойчивости КД, который заключается в изменении во времени общей площади КД. Поскольку типичные КД существуют более одного периода обращения Солнца, маловероятно наблюдать быстрые дневные скачки на графике площади КД.

Напомним, что можно вычислять площади областей относительно площади солнечного диска или, после поправки на проекцию, относительно солнечного полушария. На практике, однако, поправки площадей на проекцию могут быть неточными, поскольку многие КД расположены вблизи полюсов, где эффекты проекции существенны. С другой стороны, площади, измеренные относительно площади солнечного диска также могут вводить в заблуждение, поскольку две КД одинаковой площади относительно площади солнечного диска, расположенные вблизи центра диска и вблизи

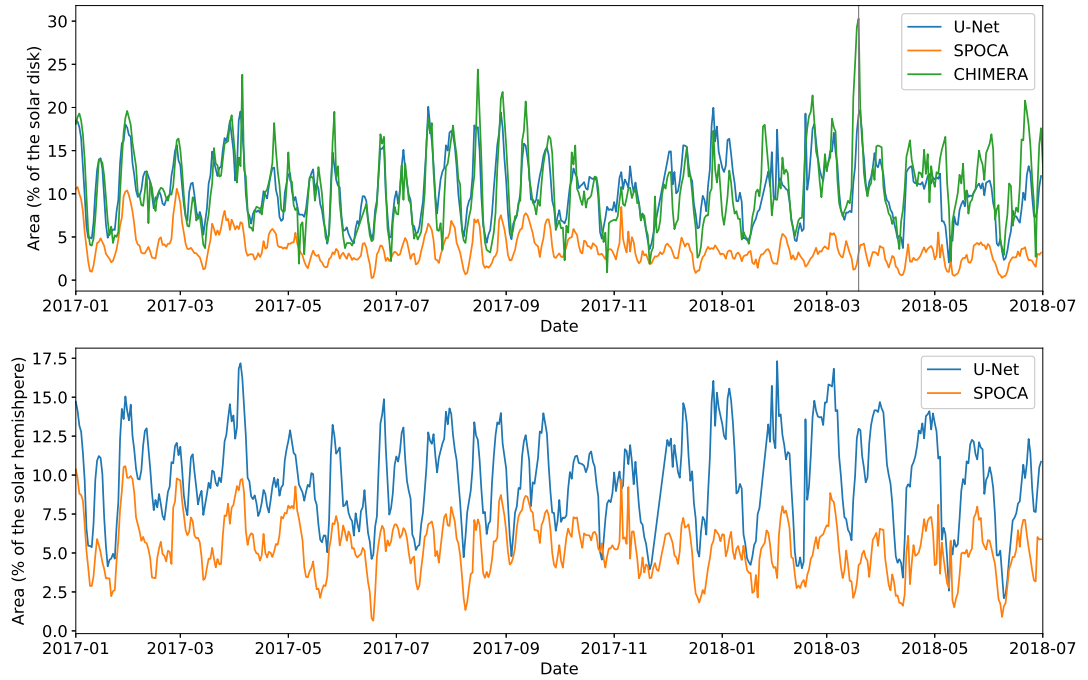


Рис. 4.24: Верхняя панель: суммарная площадь корональных до поправки на проекцию. Синяя линия для модели U-Net, оранжевая – модель SPOCA, зеленая линия – алгоритм CHIMERA. Вертикальная линия показывает день, выбранный для детального сравнения (см. рисунок 4.25). Нижняя панель: суммарная площадь корональных дыр после поправки на проекцию. Синяя линия – U-Net, оранжевая – SPOCA. Рисунок из работы [116].

полюса, имеют очень разные реальные размеры. Ниже покажем площади, рассчитанные этими двумя способами.

На рисунке 4.24 (верхняя панель) показана суточная вариация общей площади КД, измеренной до поправки на проекцию. Можно видеть, что U-Net и CHIMERA дают очень похожие результаты с коэффициентом корреляции равным 0.76. В то же время, общая площадь КД по данным SPOCA до 3 раз меньше в отличие от CHIMERA и U-Net. На рисунке 4.25.показан пример наибольшей разницы между результатами работы алгоритмов (19 марта 2018 года). Как представляется, карта В (SPOCA) явно недооценивает КД, карта С (CHIMERA) несколько переоценивает КД относительно изображения 193 Å, в то время как карта А (U-Net) выглядит наиболее

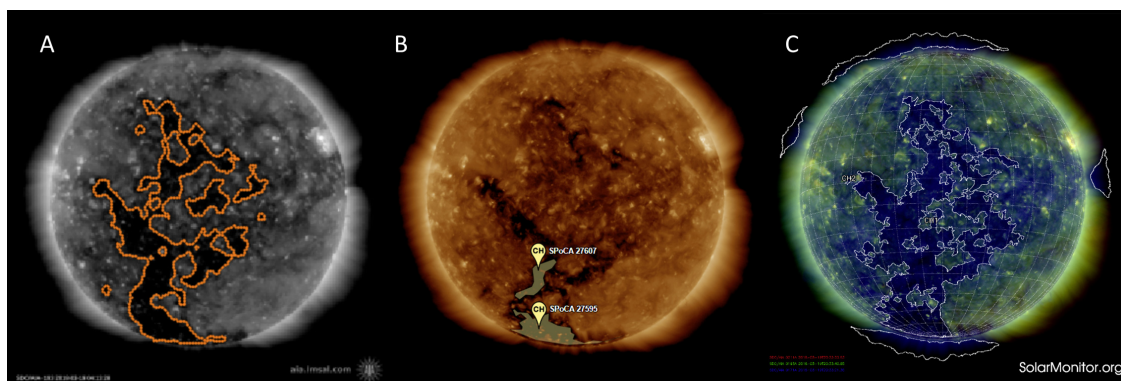


Рис. 4.25: Карты КД на 19 марта 2018 года, полученные моделью U-Net (А), SPOCA (В) и CHIMERA (С). Рисунок из работы [116].

близко к ожидаемому результату. Отметим, что общая площадь КД, показанная на рисунке 4.25, составляет 19% от площади солнечного диска по модели U-Net, 3% для SPOCA и 30% для CHIMERA.

На рисунке 4.24 (нижняя панель) показано изменение суммарной площади КД с учетом проекции. Можно видеть, что площади по алгоритму SPOCA примерно в два раза меньше, чем для U-Net, но оба метода демонстрируют схожие вариации с коэффициентом корреляции 0.66.

Тем не менее можно найти случаи некорректной работы и для модели U-Net. Они происходят, когда солнечный лимб, разделяющий КД и пространство за солнечным диском, почти отсутствует, например, как в случае с КД вблизи северного полюса, показанном на рисунке 4.26 для 25 октября 2017 года.

Дело в том, что тонкий солнечный лимб, после многократных сверток, теряется в глубоких слоях модели U-Net. Однако ситуацию можно легко исправить, просто проведя предварительную сегментацию солнечного диска. На рисунке 4.27 пикселям за пределами солнечного диска была присвоена установленная максимальная интенсивность. Как видно, теперь U-Net правильно выделяет КД вблизи северного полюса.

Таким образом, чтобы в дальнейшем избежать подобных проблем, для построения карт КД будет предварительно проводиться идентификация границ диска Солнца.

Далее приведем график изменения площадей КД, выделенных моделью U-Net, с начала наблюдений SDO/AIA в 2010 г. по 2018 г. Об-

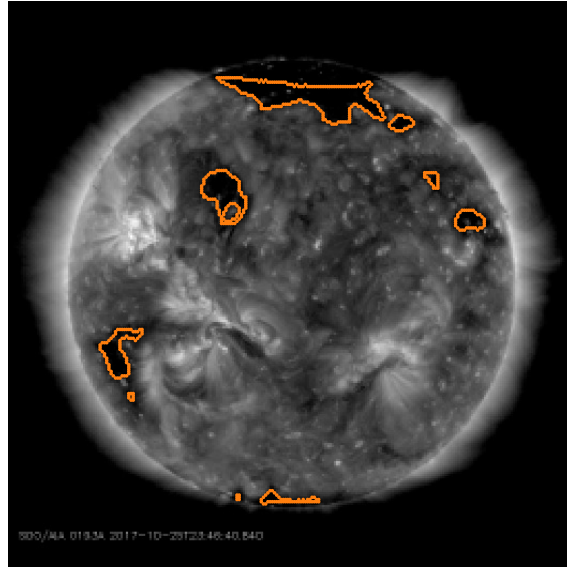


Рис. 4.26: Почти отсутствующий солнечный лимб может привести к неправильной сегментации КД (см. КД вблизи северного полюса). Рисунок из работы [116].

ратим внимание, что этот период времени включает в себя тренировочный и тестовый периоды для модели U-Net и охватывает приблизительно весь 24 солнечный цикл. Для сравнения приведем график изменения скорости солнечного ветра (СВ) по данным спутника ACE [210]. Ежедневные усредненные скорости СВ были получены из каталога <http://www.srl.caltech.edu/ACE/ASC/level2/>.

В связи с тем, что видимые области КД изменяются в зависимости от солнечного вращения, требуется некоторое усреднение данных, чтобы уменьшить этот эффект. Для этого заменим общую площадь КД для текущего дня на максимальную площадь КД в пределах 13-дневного окна с центром в текущем дне. Обратим внимание, что 13-дневное окно примерно соответствует половине периода вращения Солнца. Та же процедура применяется и для данных о скорости СВ. Результат показан на рисунке 4.28. Дополнительное 150-дневное скользящее среднее, также показанное на рисунке 4.28, выявляет долгосрочные колебания полученных временных рядов.

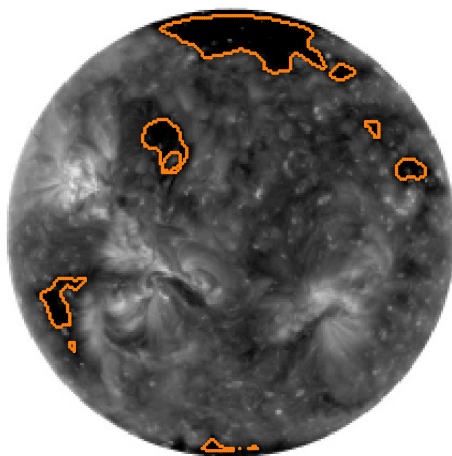


Рис. 4.27: Предварительная установка максимальной интенсивности на пиксели за пределами солнечного диска улучшает сегментацию КД вблизи солнечного лимба по сравнению с рисунком 4.26. Рисунок из работы [116].

Можно видеть, что площади КД демонстрируют годовые вариации, тенденцию к увеличению во время фазы спада солнечного цикла и спад до минимума во время максимума солнечного цикла. По-видимому, природа вариаций с периодом около года заключается в асимметрии север-юг и вариациях солнечного В-угла, а увеличение площади КД в минимуме солнечного цикла связано с усилением полярного магнитного поля. Отметим, что площади КД изменяются примерно в три раза в течение солнечного цикла. Обратим внимание на выраженную корреляцию между усредненными площадями КД и усредненными скоростями СВ. Численное значение этой корреляции равно 0.7. Более подробное исследование связи между КД и СВ можно найти, например, в [185] и [215].

Еще одним способом оценки результатов сегментации является сопоставление с результатами работы других актуальных алгоритмов на примере отдельных КД. Изложим далее методику и выводы, полученные в работе [180]. В этой работе для количественной оценки неопределенности границ корональных дыр в схемах автоматического обнаружения был взят

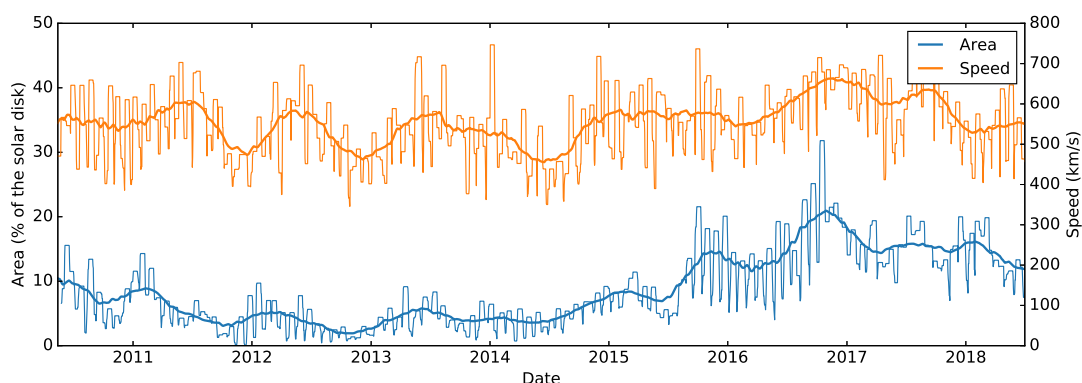


Рис. 4.28: Максимальные за 13-дневный период площади корональных дыр (синяя линия) и скорость солнечного ветра (оранжевая линия). Сглаженные линии на каждом графике представляют 150-дневную скользящую среднюю. Рисунок из работы [116].

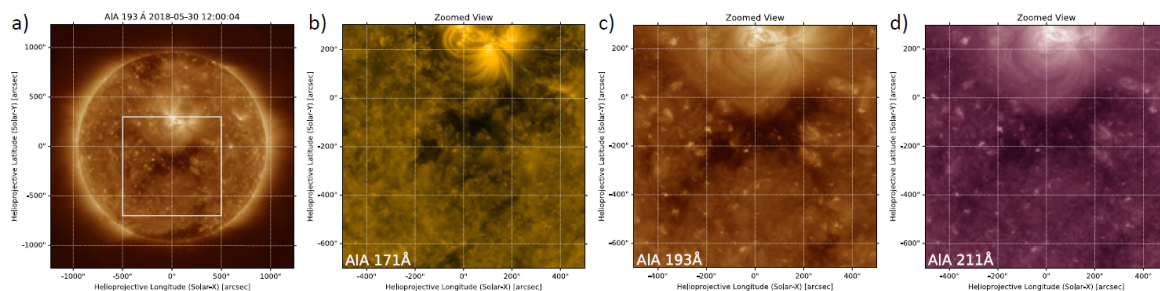


Рис. 4.29: Изображение корональной дыры 30 мая 2018 года по наблюдениям SDO/AIA: (a) изображение диска Солнца в Fe XII (19.3 нм) с выделенной областью КД; (b)–(d) область КД в линиях Fe IX (17.1 нм), Fe XII (19.3 нм) и Fe XIV (21.1 нм). Рисунок из работы [180].

пример низкоширотной корональной дыры, наблюдаемой 30 мая 2018 года. На рисунке 4.29 приведено изображение этой корональной дыры по наблюдениям SDO/AIA в различных спектральных линиях. КД расположена вблизи центра диска, к югу от активной области AR 12712.

Отметим, что эта КД наблюдалась в течение нескольких оборотов Солнца, впервые – около 24 ноября 2017 года. Первоначально КД была связана с южной полярной корональной дырой с отрицательной полярностью, как и ожидалось для солнечного цикла 24 [150]. После 30 мая 2018, КД наблюдалась в течение еще нескольких каррингтоновских оборотов, после чего она исчезла.

Для унификации входных данных а процедуры детекции КД, изображения загружались из архива SDO level 1.0, к которым уже были применены основные процедуры калибровки данных. Далее с помощью процедуры SolarSoft aia_prep.pro [3https://sohowww.nascom.nasa.gov/solarsoft/](https://sohowww.nascom.nasa.gov/solarsoft/) были применены геометрические поправки: центрирование изображений, коррекция угла, а также масштабирование всех изображений до 0.6 угловых секунд на пиксель. Для карт магнитного поля по лучу зрения (LOS) использовались данные HMI. Для анализа была выбрана магнитограмма LOS, наиболее близкая по времени к изображению AIA. Магнитограмма HMI обрабатывалась в программе aia_prep.pro с применением тех же процедур геометрической коррекции. Таким образом, магнитограмма HMI совпадает с магнитограммой AIA с точностью до пикселя. Это позволяет наносить границы корональных дыр на магнитограмму для получения информации о фотосферном магнитном поле. Обработанные изображения размером 4096×4096 пикселей сохраняются в формате FITS и затем используются в качестве входных данных для алгоритмов детекции КД.

Для анализа использовалось 9 различных схем выделения КД, приведенных в таблице 4.1. Обратим внимание на метод под названием TH35 – он используется как базовая (простейшая) модель выделения КД. В этом методе к КД относятся все пиксели ниже порогового уровня интенсивности, который принят как 35% от от средней интенсивности на солнечном диске. Никакая дополнительная постобработка карт корональных дыр не применяется.

Сравнение алгоритмов проводится по ряду физических параметров КД, ранее использованных в работе [137]. Для изображений в EUV диапазоне вычисляется средняя интенсивность КД, которая представляет собой среднее значение интенсивности всех пикселей внутри границы КД. Кроме того, рассматривается несколько показателей, рассчитанных на основе магнитограмм HMI, такие как знаковые B_{LOS} и беззнаковые ($|B_{LOS}|$) напряженности магнитного поля, усредненные по области внутри границы КД. На

Метод	Организация	Авторы	Входные данные
ASSA CH	Korean Space Weather Center	Hong et al. (2012) [99]	19.3 nm
CHARM	Trinity College Dublin; NOAA	Krista & Gallagher (2009) [141]	19.3 nm, LOS magnetogram
CHIMERA	Trinity College Dublin	Garton et al. (2018) [81]	17.1 nm, 19.3 nm, 21.1 nm
CHORTLE	Southwest Research Institute	Lowder et al. (2014) [149]	19.3 nm, LOS magnetogram
CNN193	Moscow State University	Illarionov & Tlatov (2018) [116]	19.3 nm
CHRONNOS	University of Graz	Jarolim et al. (2021) [118]	9.4 nm, 13.1 nm, 17.1 nm, 19.3 nm, 21.1 nm, 30.4 nm, 33.5 nm, LOS magnetogram
SPoCA-CH	Royal Observatory of Belgium	Delouille et al. (2018) [63]	19.3 nm
SYNCH	University of Oulu	Hamada et al. (2018) [89]	17.1 nm, 19.3 nm, 30.4 nm
TH35	—	—	19.3 nm

Таблица 4.1: Методы обнаружения КД, использованные для анализа в работе [180].

основе последних двух величин вычисляется коэффициент униполярности

$$U = \frac{\langle |B_{LOS}| \rangle - |\langle B_{LOS} \rangle|}{\langle |B_{LOS}| \rangle},$$

где угловые скобки означают процедуру усреднения. Значение $u = 0$ соответствует полностью униполярной области, $u = 1$ – полностью биполярной.

Кроме того, сравнивается величина магнитного потока, вычисляемая как

$$\Phi = \sum_{i=1}^N B_{LOS}^{(i)} A^{(i)},$$

где N – общее количество пикселей, лежащих внутри КД, $B_{LOS}^{(i)}$ напряженность магнитного поля в каждом пикселе, $A^{(i)}$ – площадь соответствующего пикселя.

На рисунке 4.30 представлены границы КД для девяти схем выделения КД на примере изображения от 30 мая 2018 г., которое является сложным для автоматических схем. Можно видеть, что разные схемы дают существенно разные результаты. Эти расхождения минимальны в районе темных областей, обозначающих центр корональной дыры, и наиболее заметны вдали от центра. Небольшие расхождения возникают и внутри границ корональной дыры, что, скорее всего, связано с эфемерными областями внутри корональной дыры (см., например, [227]). Хотя все методы способны обнаружить корональную дыру, ее размеры и форма существенно различаются. И эти различия не ограничиваются только ее формой, физические свойства корональной дыры также имеют значительные различия.

На рисунке 4.31(a) приведена количественная оценка неопределенности границ КД. Для этого каждому пикселю приписан номер от 0 до 9, который отражает, сколько раз пиксель был идентифицирован как принадлежащий корональной дыре: например, пиксели с номером 9 были идентифицированы всеми девятью схемами обнаружения. На рисунке 4.31 также показаны контуры девяти различных границ КД на одном изображении AIA (b) и магнитограмме HMI (c). Можно заметить, что все методы выделения КД фиксируют наиболее темные области внутри границы, но некоторые из них

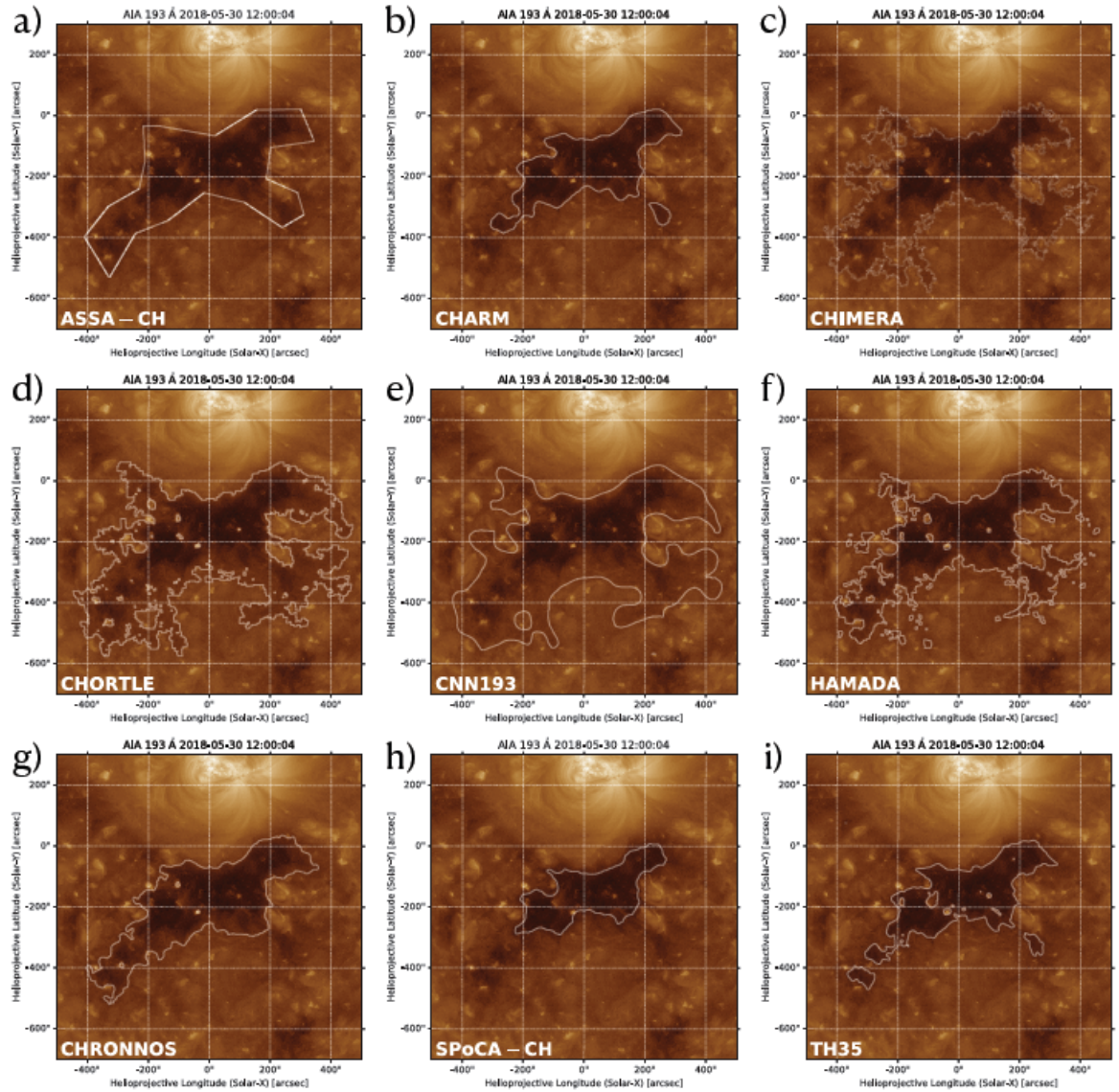


Рис. 4.30: Различия в определении границ корональных дыр для примере изображения AIA 193Å от 30 мая 2018 г.: (a) ASSA-CH; (b) CHARM; (c) CHIMERA; (d) CHORTLE; (e) CNN193; (f) HAMADA; (g) CHRONNOS; (h) SPoCA-CH; (i) TH35. Рисунок из работы [180].

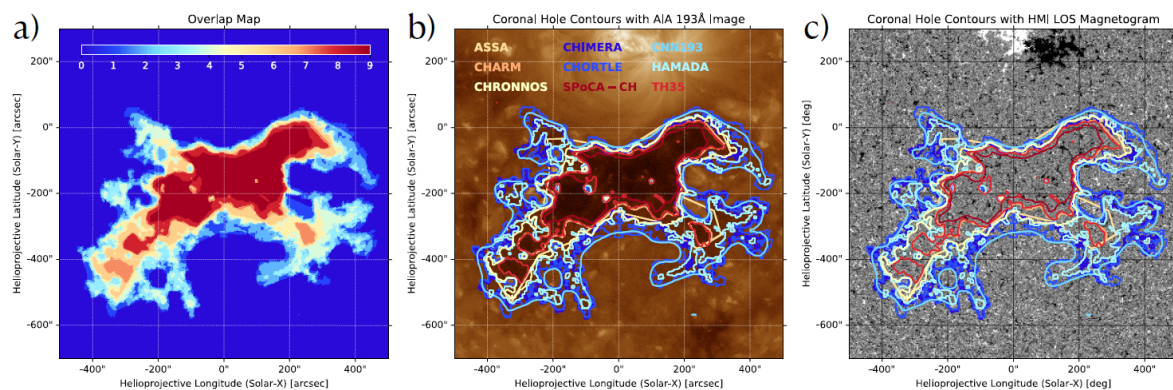


Рис. 4.31: Сравнение карт корональных дыр, полученных с помощью девяти различных схем автоматического обнаружения: (а) количество перекрывающихся корональных дыр; (б) контуры корональных дыр, наложенные на изображение AIA; (с) те же контуры, наложенные на магнитограмму HMI. Рисунок из работы [180].

также определяют более крупные области, ведущие например, более высокому среднему значению интенсивности КД.

На рисунке 4.32 показаны свойства корональных дыр, полученные для всех рассмотренных методов выделения КД. На рисунке 4.32(а) показана площадь КД, которая варьируется от $33.59 \times 10^3 \text{ Мм}^2$ до $151.24 \times 10^3 \text{ Мм}^2$. Это означает, что площади, полученные различными схемами, различаются в 4.5 раза между минимальным и максимальным значениями. Средняя интенсивность (б) изменяется от 14.84 до 31.18, различие между максимальным и минимальным значением в 2.1 раза. Средняя напряженность поля (с) находится в диапазоне от -1.21 Гс до -2.53 Гс, что также дает различие между максимальным и минимальным значением в 2.1 раза. Беззнаковая средняя напряженность магнитного поля (д) колеблется между значениями 7.85 Гс и 8.50 Гс, различие в 1.1 раза. Степень униполярности (е) находится в диапазоне от 0.70 до 0.85, различие в 1.21 раза. Наконец, открытый магнитный поток (ф) варьируется от $-8.49 \times 10^{20} \text{ Мкс}$ и $-1.87 \times 10^{21} \text{ Мкс}$, с коэффициентом различия между максимальным и минимальным значением 2.2 раза. Эти различия в геометрии и физических свойствах указывают на то, что выбор схемы детектирования играет решающую роль при анализе корональных дыр.

В работе [179] приводится выборочное сопоставление различных алго-

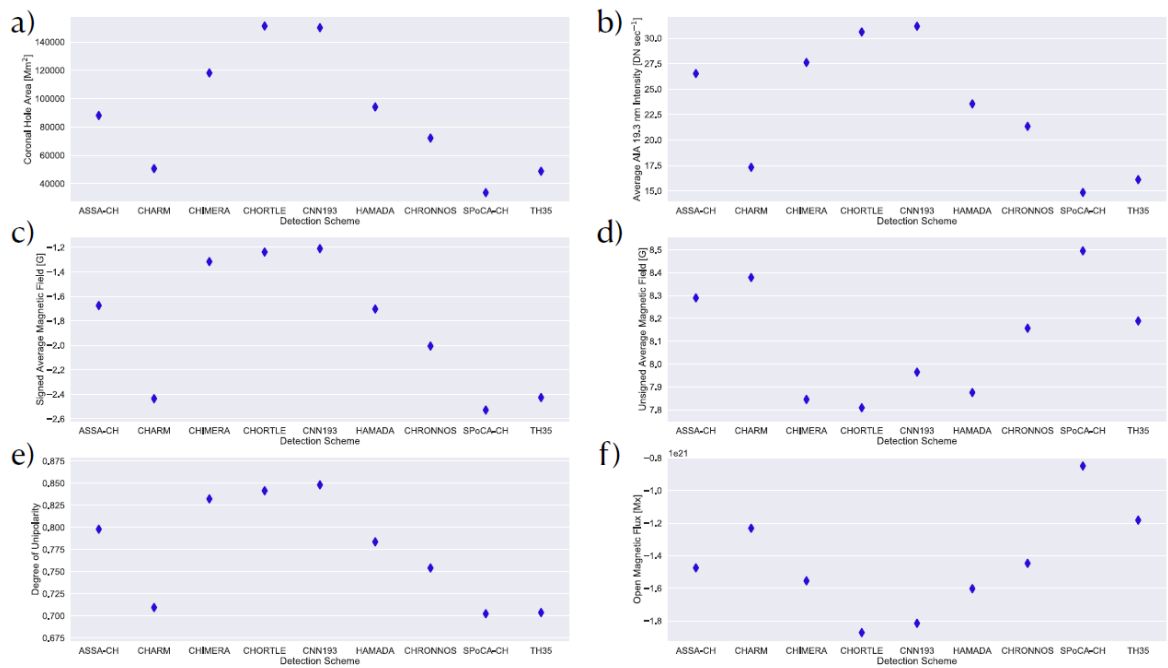


Рис. 4.32: Диапазон физических свойств внутри корональных дыр, обусловленный выбором схемы выделения КД: (а) площади корональных дыр; (b) средняя интенсивность (с) среднее магнитное поле с учетом знака (d) среднее беззнаковое магнитное поле (е) степень униполярности (f) магнитный поток. Рисунок из работы [180].

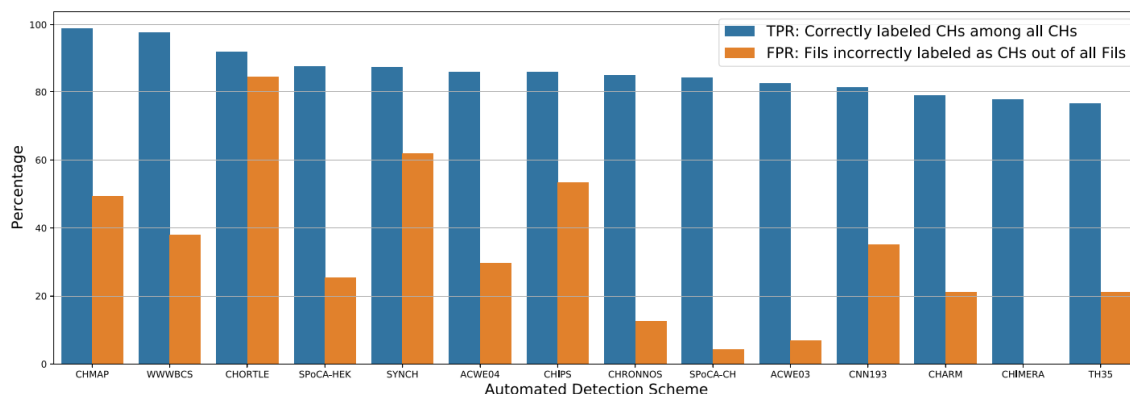


Рис. 4.33: Сравнение доли правильно выделенных КД среди всех КД (показатель чувствительности метода, синие столбики) и доли волокон, ошибочно определенных как КД, среди всех волокон (величина ошибки первого рода, оранжевые столбики). Рисунок из работы [179].

ритмов сегментации КД на основе созданного референсного набора данных из 29 изображений солнечного диска с выделенными на нем КД и волокнами. Основной фокус исследования заключался в том, насколько хорошо алгоритмы могут отличать КД от волокон, также имеющих вид темных структур на диске солнца. На рисунке 4.33 показаны параметры чувствительности и величины ошибки первого рода для исследованных алгоритмов. Из рисунка следует, во-первых, что алгоритмы имеют существенное различие между собой с точки зрения результата сегментации КД. Во-вторых, высокая точность в определении КД сопровождается ростом ошибки первого рода (доли волокон, отнесенных к КД). В-третьих, рисунок не позволяет выделить абсолютно лучший алгоритм. Также следует учитывать, что представленные результаты получены выборке малого размера и не отражают таких аспектов, как, например, устойчивость алгоритма на малых и больших временных масштабах. В связи с этим остается актуальным проведение оценки методов выделения КД путем сравнения характеристик полученных КД, например, с долговременными вариациями солнечного ветра, как было сделано в работе [115].

Далее перейдем к вопросу сегментации КД на синоптических картах.

4.4. Задача сегментации корональных дыр на синоптических картах

Развитие методов сегментации КД на изображениях солнечного диска позволяет повысить точность определения границ КД. Однако поскольку КД обычно представляют собой крупные структуры, то на одном дисковом изображении (видимой стороне Солнца) КД может быть видна лишь частично. Поэтому для получения полной картины КД необходим анализ серии последовательных дисковых изображений, а лучше – полной поверхности Солнца. За исключением небольшого периода работы спутников STEREO-A и STEREO-B, мгновенные изображения полной поверхности Солнца остаются недоступными, и их приходится воссоздавать на основе серии изображений с видимой стороны Солнца путем построения синоптических карт. Получаемый при это образ не является мгновенным состоянием поверхности Солнца и разные части карты отвечают ее состояниям в разные моменты времени.

Наиболее простой способ получения границ КД на синоптической карте состоит в том, что сначала КД выделяются на изображениях солнечного диска, а затем полученные карты склеиваются в синоптическую карту. Этот подход был реализован, например, в работе [41]. Следует отметить, что процедура склейки не является однозначной. В силу того, что изображения солнечного диска отвечают разным моментам времени, границы КД могут успеть измениться. Соответственно, границы КД, относящиеся к разным моментам времени, не будут совпадать в точности, и возникает проблема того, как их совместить на синоптической карте. Одним из стандартных решений является сохранение только тех участков КД, которые присутствуют сразу на нескольких изображениях, однако выбор того, сколько изображений следует учитывать остается субъективным и, вообще говоря, значимо влияющих на получаемый образ.

Альтернативный подход состоит в том, что сначала из серии изображений солнечного диска строится синоптическая карта и затем КД выделяются непосредственно на построенной карте. Преимуществом такого

подхода является то, что неопределенности, связанные с построением синоптической карты, возникают для непрерывных значений – интенсивностей пикселей, и их значительно удобнее разрешать, чем в случае склейки бинарных значений, задающих контуры КД. Однако выясняется, что не всякий метод выделения КД, откалиброванный на работе с изображениями солнечного диска, успешно переносится на синоптические карты. Среди известных пример можно отметить серию работ [216] и [215], в которой для выделения КД использовались синоптические карты в диапазонах 171, 195, 284, 304, 10830 Å, дополненные картами в линии H α и картами магнитных полей. В работе [97] проводилось сравнение площадей КД, выделенных на изображениях солнечного диска и на синоптических картах. Хотя общие статистические закономерности оказались схожими (например, цикличность, периоды максимумов и минимумов), количественные различия выглядят значительными. Кроме того, перечисленные работы анализируют ряды данных до 2010 года, с которого начинается современный ряд данных со спутника SDO.

В работе [89] была предпринята попытка объединить серии данных, полученных с разных телескопов в период с 1996 по 2016 и создать согласованный ряд синоптических карт. Далее, к синоптическим картам применялся пороговый метод (по интенсивности пикселей) для отделения областей КД и анализа их свойств в 23 и 24 цикле солнечной активности.

Обзор предыдущих исследований показывает, что задача разработки единого метода, который мог бы работать как с изображениями солнечного диска, так и с синоптическими картами (и вообще говоря, с любыми другими проекциями поверхности Солнца), пока остается нерешенной.

Сформулируем желаемые свойства для единого алгоритма. Во-первых, он должен быть локальным в том смысле, что он должен быть независим от глобального масштаба изображения и контекста. Например, он должен демонстрировать один и тот же результат независимо от того, используется весь солнечный диск или только обрезанный участок с без информации о его местоположении в исходном изображении диска. Во-вторых, простые геометрические преобразования не должны влиять на идентификацию КД, например, не должно быть разницы, в какую плоскость проецируется сол-

нечная сфера проецируется, – концепция КД остается неизменной.

Подходящим кандидатом, удовлетворяющим желаемым свойствам, мог бы стать алгоритм, основанный на свертке с некоторым локальным ядром или последовательности таких сверток. Для создания такого алгоритма будем использовать сверточные нейронные сети (CNN). Точнее говоря, рассмотрим вопрос о том, насколько CNN, обученная ранее сегментации КД на изображениях солнечного диска, может быть применима к синоптическим картам.

Далее будет описан алгоритм построения солнечных синоптических карт и показано, что модель CNN обеспечивает приемлемый результат сегментации. В качестве частного случая будут рассмотрены синоптические карты, спроецированные на северное и южное полушария Солнца, и показано, что CNN модель выдает результат, согласованный с другими проекциями.

4.5. Построение каталога синоптических карт

Стандартный способ построения синоптической карты состоит из двух этапов. Во-первых, изображение солнечного диска переносится в керрингтоновскую систему координат. Во-вторых, выбираются вертикальные полосы с центром на центральном меридиане и эти полосы объединяются в пределах одного периода вращения Солнца. С помощью данного подхода был подготовлен ряд каталогов синоптических карт SDO/AIA, например, [125], [41] [88].

Для построения синоптических карт будет использован набор изображений солнечного диска в линии $193 \text{ \AA}$ со спутника SDO/AIA. Исходные изображения диска имеют разрешение 1024×1024 пикселей, из них будут строиться синоптические карты размером 720×360 пикселей с шагом полградуса на один пиксель.

На первом шаге изображение солнечного диска переводится в керрингтоновскую систему координат. Для этого, используя основные тригонометрических формулы, каждому пикселю на дисковом изображении, находится соответствующий пиксель на синоптической карте. При этом образ пик-

селей, расположенных плотно на солнечном диске, на синоптической карте будет получаться разреженным (и чем выше разрешение синоптической карты, тем более разреженной она будет получаться).

Для решения проблемы разреженности строится обратное отображение, в котором каждому пикселю синоптической карты ставится в соответствие пиксель на изображении солнечного диска (при этом некоторые пиксели солнечного диска могут не попасть в образ). Наконец, результаты, полученные при прямом и обратном отображении усредняются. Тем самым, образ солнечного диска на синоптической карте получается плотным и используется информация со всех пикселей солнечного диска.

Следующим шагом обычно является выбор ширины полосы вокруг центрального меридиана на диске Солнца, которая будет перенесена на синоптическую карту. Вместо этого, будет приписывать каждому пикселю на диске Солнца весовой коэффициент, который будет уменьшаться при отдалении от центрального меридиана. Далее, вместо того чтобы склеивать полосы на синоптической карты, будем усреднять значения перенесенных пикселей в соответствии с их весовыми коэффициентами.

Определим весовую функцию для пикселя, находящегося на расстоянии d от центрального меридиана, как $\text{sigmoid}((-d + a)/b)$, где $\text{sigmoid}(x) = 1/(1 + \exp(-x))$, a и b – параметры сдвига и масштаба, определяющие, как быстро убывает вес пикселя при удалении от центрального меридиана. Варьируя эти параметры, можно получить более широкие или более узкие области, дающие основной вклад в синоптическую карту, и контролировать жесткость границ. В данной работе будут использоваться параметры $a = 13.2$, $b = 2$, что приблизительно соответствует тому, что каждый пиксель на синоптической карте преимущественно является результатом смешения двух ближайших изображений диска. Увеличение параметра сдвига приводит к потере тонких структур на синоптических картах, а уменьшение делает заметными зоны перехода между последовательными изображениями диска. Далее будет показано, что при варьировании параметров весовой функции вокруг выбранных значений результаты сегментации КД остается устойчивым.

Последним шагом является выравнивание гистограмм для снижения

эффекта усиления яркости лимба. Из-за этого эффекта синоптическая карта, построенная из полос вокруг центрального меридиана, оказывается темнее, чем оригинальные изображения диска и распределение интенсивности пикселей оказывается смещенным (см. рисунок 4.34).

Для коррекции эффекта усиления яркости лимба были предложены различные методы, основанные, в том числе, на физике (см., например, [41]). В данной работе будем использовать наиболее простой подход, основанный на квантильном преобразовании. Для этого вычисляется (эмпирическая) функция распределения F_1 интенсивностей пикселей на изображениях солнечного диска и функция распределения F_2 интенсивностей пикселей на синоптической карте. Далее каждое значение p интенсивности пикселей синоптической карты заменяется на новое значение по правилу $F_1^{-1}(F_2(p))$. Нетрудно заметить, что получаемое таким преобразованием распределение интенсивностей будет совпадать с распределением F_1 (см., например, [84]).

Выберем в качестве примера (см. рисунок 4.35) три кэррингтонских оборота: CR 2098, приходящийся на минимум солнечной активности между 23 и 24 циклами, CR 2145 вблизи максимума 24-го цикла и CR 2145 вблизи минимума между 24 и 25 циклами. Отметим, что синоптические карты во время солнечного минимума выглядят более темными. Это хорошо видно и на рисунке 4.36, на котором представлена последовательность синоптических карт, усредненных по долготе. Помимо долгосрочных вариаций интенсивности, связанных с солнечным циклом, прослеживаются годовые вариации, связанные с изменением В-угла и затрудняющие обнаружение полярных КД (обсуждение этих эффектов см. в работе [132]).

Отметим, что наблюдаемая изменчивость интенсивности излучения может быть связана как с собственными процессами на Солнце, так и с деградацией прибора. В данном исследовании используются изображения, которые скорректированы с учетом деградации на основе процедуры, предложенной разработчиками инструмента SDO/AIA. Однако данный процесс калибровки не является единственно возможным; другие подходы, см., например, в работе [79].

Исходный код для построения синоптических карт представлен в от-

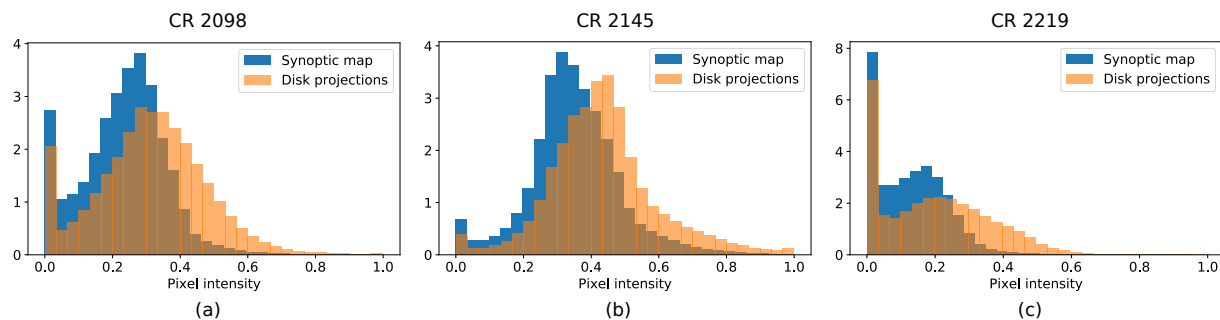


Рис. 4.34: Распределение интенсивности пикселей на синоптических картах до выравнивания гистограмм в сравнении с распределением на изображениях солнечного диска. Слева для кэррингтоновского оборота 2098, по центру – оборот 2145, справа – 2219. Рисунок из работы [113].

крытом доступе в репозитории GitHub https://github.com/observethesun/synoptic_maps, а синоптические карты доступны в каталоге https://sun.njit.edu/coronal_holes/. На рисунке 4.37 показан вид каталога синоптических карт с сайта https://sun.njit.edu/coronal_holes/.

Пользователю доступен просмотр каждой карты по отдельности в формате jpeg и возможность скачать либо отдельную карту, либо весь архив карт себе на компьютер в форматах jpeg и fits. На примере файла 'aia193_synmap_cr2097.fits' перечислим доступные заголовки и соответствующие значения в файле fits:

- bitpix: -64
- naxis: 2
- naxis1: 720
- naxis2: 360
- date: 2020-05-29T20:24:26
- car_rot: 2098
- date-obs: 2010-06-29T23:00:00
- t_obs: 2010.06.29_23:00:00_TAI
- t_rot: 2010.06.29_23:00:00_TAI

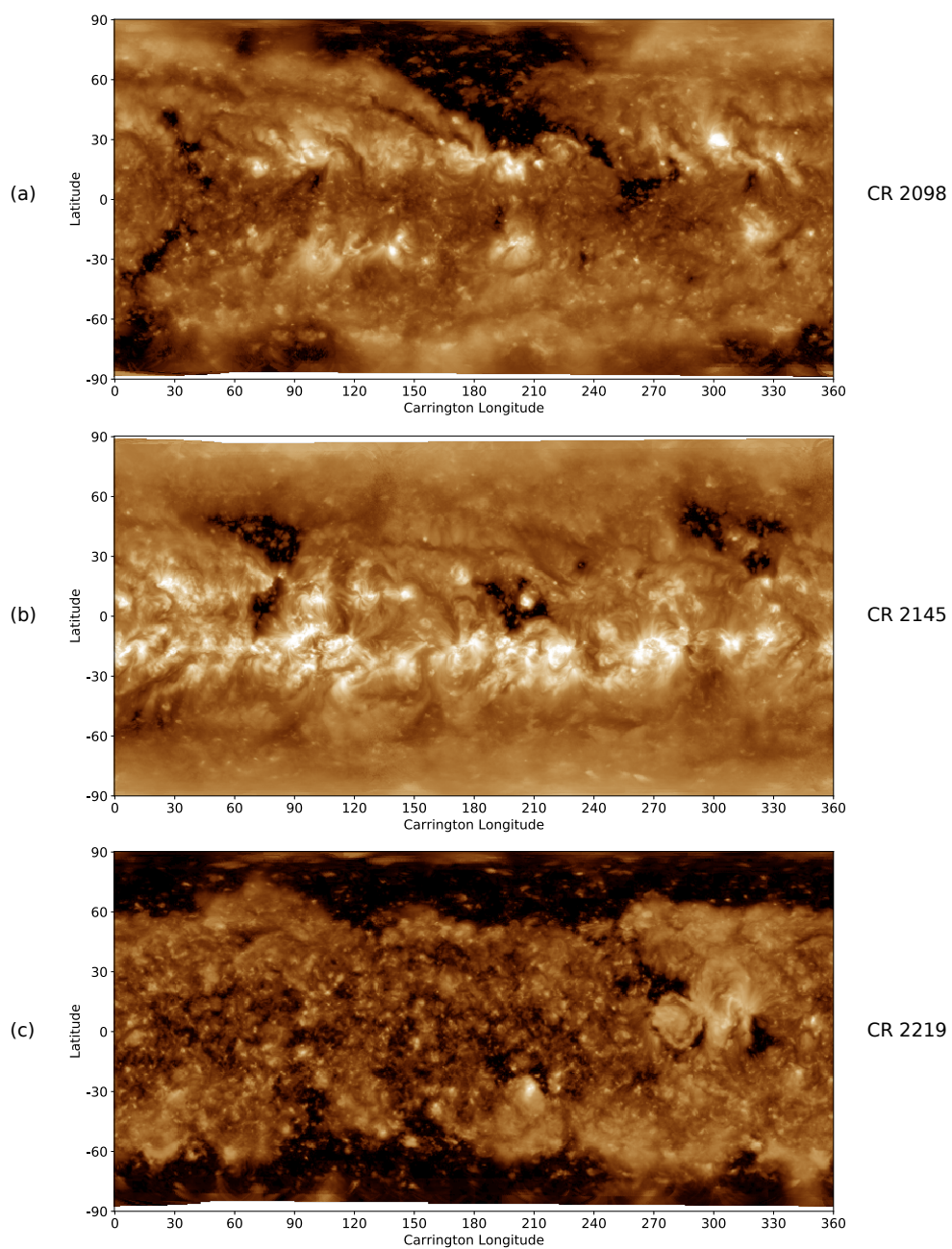


Рис. 4.35: Примеры синоптических карт для кэррингтоновских оборотов: а) 2098, б) 2145 и с) 2219. Рисунок из работы [113].

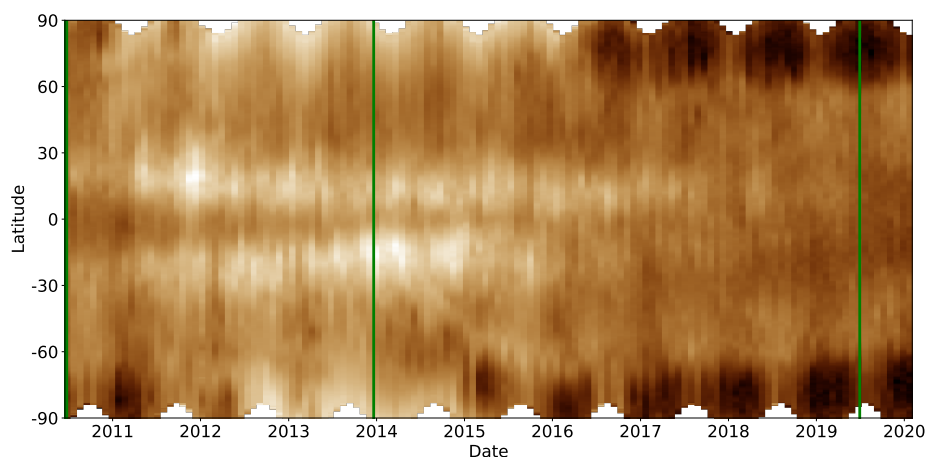


Рис. 4.36: Последовательность синоптических карт, усредненных по долготам. Зеленые вертикальные линии показывают моменты времени, соответствующие кэррингтоновским оборотам 2098, 2145 и 2219, показанным на рисунке 4.35. Рисунок из работы [113].

Welcome to IDSEAR HOME ABOUT SYNOPTIC MAPS DISK IMAGES SUNQUAKES SOLAR FLARES

Catalogue of SDO/AIA 193 Å synoptic maps and coronal holes

Authors: Illarionov E., Kosovichev A., Tlatov A.

[SYNOPTIC MAPS](#) [CORONAL HOLES](#)

[DOWNLOAD ALL FITS FILES](#) [DOWNLOAD ALL JPEG FILES](#)

Carrington rotation ↓	Start date	FITS	JPEG
2274	2023-08-07	FITS	JPEG
2273	2023-07-11	FITS	JPEG
2272	2023-06-14	FITS	JPEG
2271	2023-05-17	FITS	JPEG
2270	2023-04-20	FITS	JPEG

Рис. 4.37: Каталог синоптических карт на сайте https://sun.njit.edu/coronal_holes/.

- t_start: 2010.06.16_23:00:00_TAI
- t_stop: 2010.07.12_23:00:00_TAI
- b0_rot: 2.731979095539582
- b0_first: 1.229423595582269
- b0_last: 4.108634189987116
- crpix1: 360.5

- crpix2: 180.5
- crval1: 180.0
- crval2: 0.0
- cdelt1: 0.5
- cdelt2: 0.5
- cunit1: deg
- cunit2: deg
- ctype1: Carrington Longitude
- ctype2: Latitude
- bunit: counts / pixel
- wcsname: Carrington Heliographic
- missvals: 3322
- wavelnth: 193.0
- waveunit: angstrom
- telescop: SDO/AIA
- instrume: AIA_2
- source: https://github.com/observethesun/synoptic_maps
- authors: Illarionov E. et al.
- simple: True
- comment:
- history:
- keycomments: 'SIMPLE': 'conforms to FITS standard', 'BITPIX': 'array data type', 'NAXIS': 'number of array dimensions'

4.6. Модель сегментации корональных дыр на синоптических картах

Для сегментации КД на синоптических картах будет использоваться та же сверточная нейронная сеть (CNN), что применялась ранее для сегментации КД на изображениях солнечного диска. Однако есть некоторые отличия технического плана. Во-первых, синоптические карты имеют пространственное разрешение 720×360 пикселей. Поскольку модель сегментации была обучена на изображениях диска размером 256×256 пикселей, то для лучшего соответствия размеров пикселей размер синоптической карты уменьшается. Во-вторых, возникает особенность при сегментации КД вблизи границ синоптической карты. Пиксели вблизи границы синоптической карты имеют меньше пикселей вокруг себя, в отличие, например, от пикселей в центре изображения. Соответственно, при свертке этих участков с ядрами в обученной сверточной модели могут возникать артефакты. Подсчет показывает, что нейроны на самом глубоком слое рассматриваемой сверточной модели имеют поле зрения размером 140×140 пикселей исходного изображения. Таким образом, что корректной работы модели вблизи границ синоптической карты ее необходимо окружить слоем шириной около 70 пикселей. Были проведены эксперименты с различными способами заполнения окружающих пикселей (в частности, заполнение постоянным значением, отражение вдоль границ, заполнение краевыми значениями) и оказалось, что простое заполнение максимальным значением интенсивности работает лучше всего.

На рисунке 4.38 показан пример карты сегментации (ее также часто называют тепловой картой), полученной с помощью модели CNN. Модель для каждого пикселя выдает оценку вероятности (в пределах от 0 до 1) того, что данный пиксель является частью КД. Для преобразования тепловых карт в бинарные маски применяется пороговое значение 0.5. Результат такого преобразования показан на рисунке 4.39.

Дополнительно применим модель CNN к проекциям синоптических карт на северный и южных полюса. На рисунке 4.40 показаны примеры

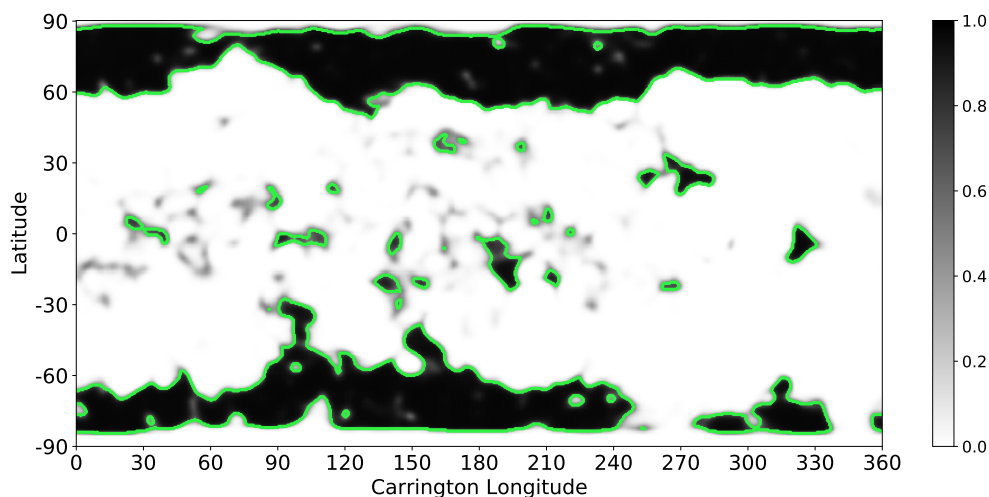


Рис. 4.38: Тепловая карта КД на выходе CNN модели для карты CR 2219 (показана в градациях серого). Зеленые линии соответствуют пороговому значению 0,5, использованному для бинаризации. Рисунок из работы [113].

карт сегментации, полученных для входных данных в виде полярной проекции. Для сравнения, поместим на тот же рисунок результат проекции КД, полученных на синоптических картах. Можно отметить, что оба метода хорошо согласуются.

4.7. Анализ каталога синоптических карт корональных дыр

Покажем, что метод обнаружения КД является устойчивым по отношению к изменениям параметров построения синоптических карт, и затем проведем анализ общих свойств выделяемых КД.

Наиболее существенным параметром при построении синоптической карты является характерная ширина полосы, извлекаемая из изображений солнечного диска и определяемая параметрами сдвига и масштаба в весовой функции. Более широкие полосы дают более гладкие карты без мелких деталей, в то время как более узкие полосы сохраняют детали, но дают более шумные карты. Кроме того, из-за эффекта осветления лимба ширина полосы влияет также на распределение интенсивности пикселей.

Для оценки влияния параметров в применяемой весовой функции на выделяемые КД рассмотрим различные комбинации значений параметра

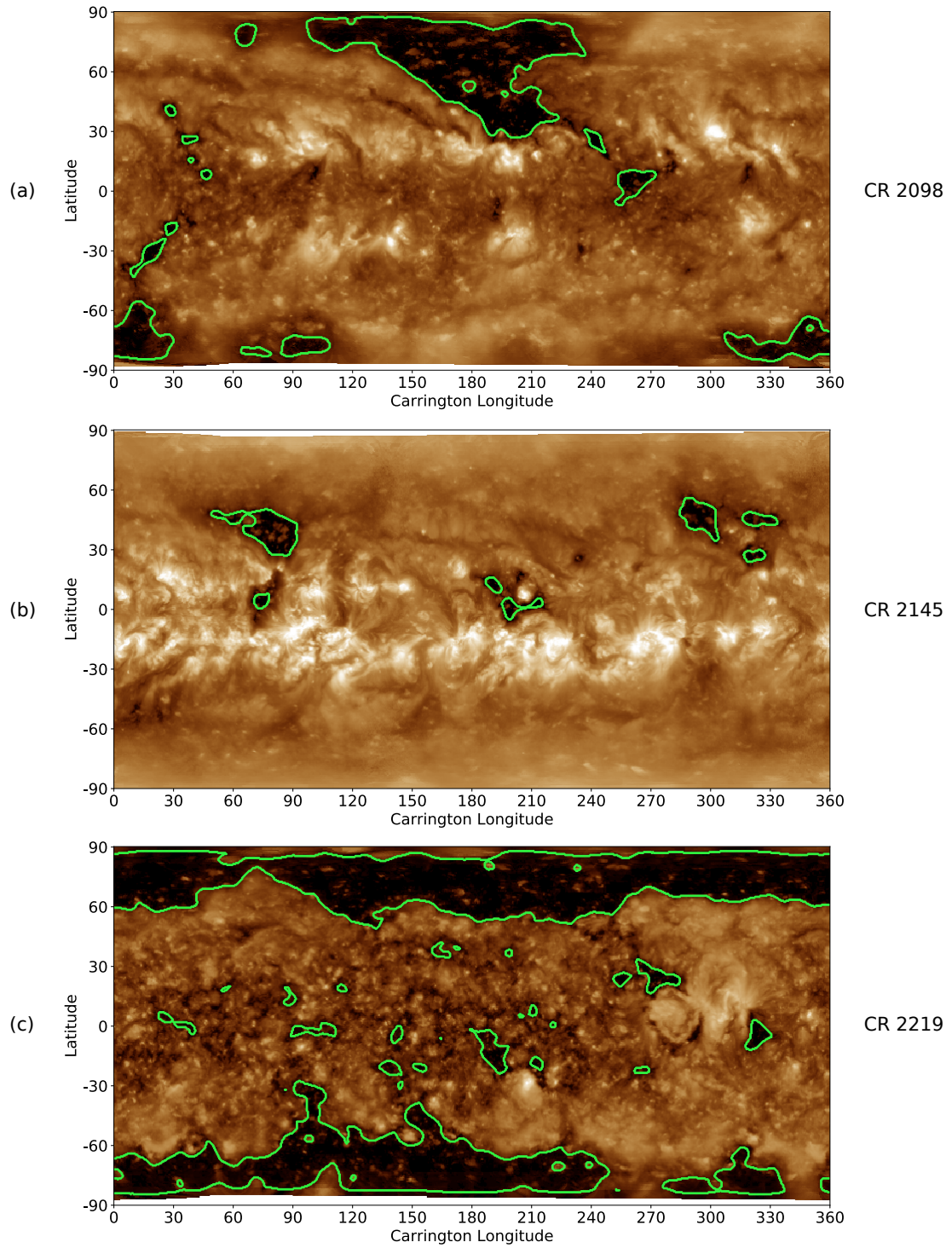


Рис. 4.39: Синоптические карты и границы КД (зеленые линии) для CR 2098 (a), CR 2145 (b) и CR 2219 (c). Это те же CR, что и на рисунке 4.35. Для сравнения, волокна из каталога Кисловодской Горной астрономической станции показаны синим цветом. Рисунок из работы [113].

сдвига: $\{6.6^\circ, 13.2^\circ, 19.8^\circ, 26.4^\circ, 33.0^\circ, 39.6^\circ\}$ и параметра масштаба: $\{0.5, 1, 2, 4\}$. Самая узкая полоса в этом наборе формирует карту, в которой

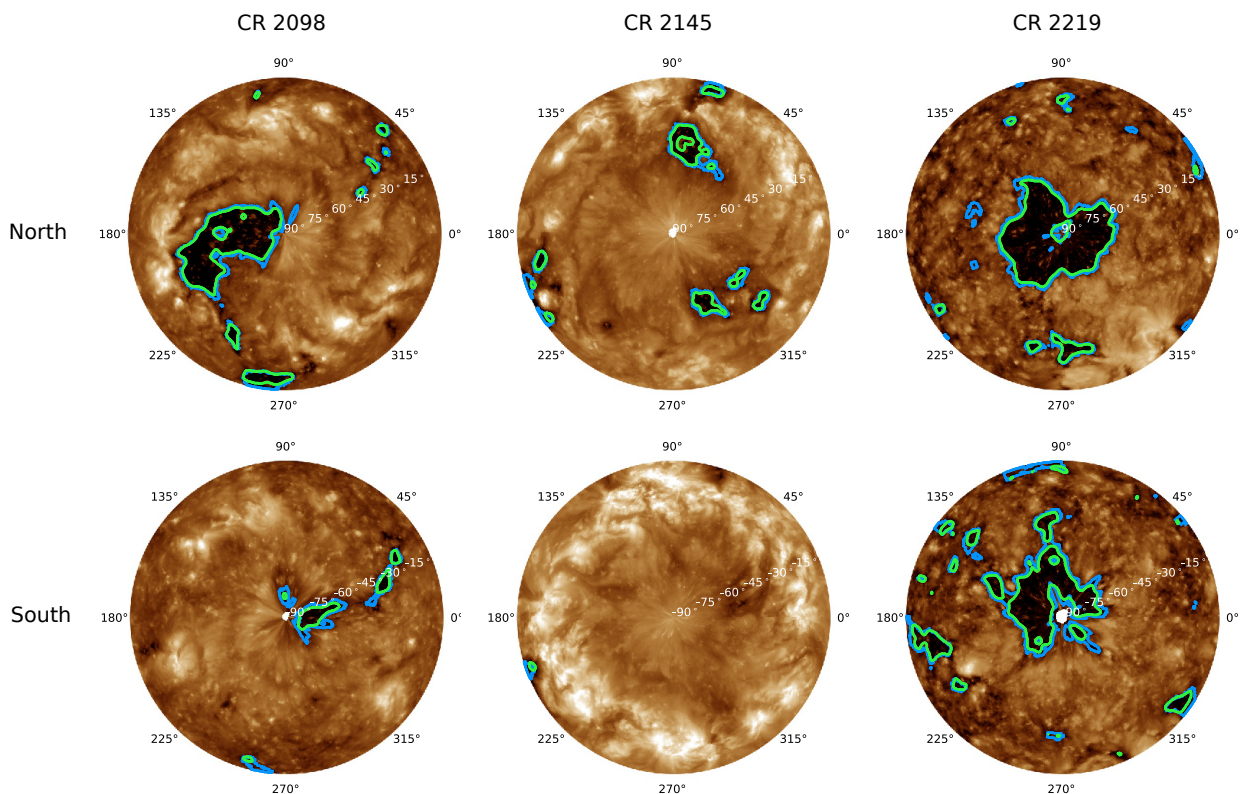


Рис. 4.40: Границы КД (зеленые линии), идентифицированные на полярных проекциях синоптических карт (цветной фон), в по сравнению с полярными проекциями границ КД, выделенных из синоптических картах (синие линии). Столбцы соответствуют тем же КД, что и на рисунке 4.35. Верхняя и нижняя строки показывают проекции северного и южного полюсов. Рисунок из работы [113].

каждый пиксель отвечает какому-то одному изображению солнечного диска, а самая широкая – усреднению шести ближайших изображений диска. На рисунке 4.41 показаны интервалы между наименьшими и наибольшими суммарными площадями полученными для всех комбинаций параметров. Можно заметить, что различия в площадях довольно незначительные. Этот позволяет сделать вывод, что области КД выделяемые на синоптических картах, оказываются устойчивыми к вариациям параметров построения синоптических карт.

На рисунке 4.41 показано изменение по времени площадей КД в северном и в южном полушариях, а также для полярных ($|\theta| > 50^\circ$) и низкоширотных ($|\theta| \leq 50^\circ$) КД. Выбор границы $\theta = \pm 50^\circ$, разделяющей полярные и низкоширотные КД, согласуется с работой [97].

Следует отметить, что разделение на полярные и низкие широты происходит на уровне отдельных пикселей, а не в зависимости от расположения центра КД. Таким образом, пиксели из одной и той же КД могут вносить вклад в разные области.

Из рисунка 4.41 можно сделать несколько выводов. Во-первых, большие годовые вариации имеют четкую связь с вариациями солнечного В-угла (вследствие чего северный и южный полюса Солнца попеременно скрыты от наблюдателя).

Во-вторых, существует асимметрия между северным и южным полушариями. Асимметрия прослеживается как по времени. (площадь южных полярных КД уменьшается позже и начинает увеличиваться раньше, чем площадь северных КД), так и по амплитуде (высокоширотные КД в южном полушарии демонстрируют тенденцию к увеличению площади во время солнечного минимума между 24 и 25 циклами, в то время как для северных КД такой тенденции не наблюдается). Этот результат согласуется с работой [97], в которой также показывается асимметрия в полярных КД во время солнечного минимума между 23 и 24 циклами.

В-третьих, на нижнем графике на рисунке 4.41 можно видеть, что солнечный минимум проявляется в увеличении как полярных, так и низкоширотных областей КД. Более того, в то время как площади полярных КД продолжают увеличиваться, площади низкоширотных КД колеблются около постоянного значения. Это может соответствовать идеям теории переноса солнечного потока, а именно тому, что магнитные поля мигрируют из низких широт к полюсам и накапливаются там во время солнечных минимумов. (см. [18; 144]).

Анализ площадей и потоков КД, захватывающий 25 солнечный цикл, см. в работе [237].

Далее сравним площади КД, выделяемых на синоптических картах, со стандартным подходом, в котором КД выделяются на изображениях солнечного диска и затем склеиваются в синоптическую карту. Для выделения КД на изображениях солнечного диска используем CNN модель из работы [116]. Построение синоптических карт из карт КД проводится по процедуре, описанной выше для изображений солнечного диска, за исключением

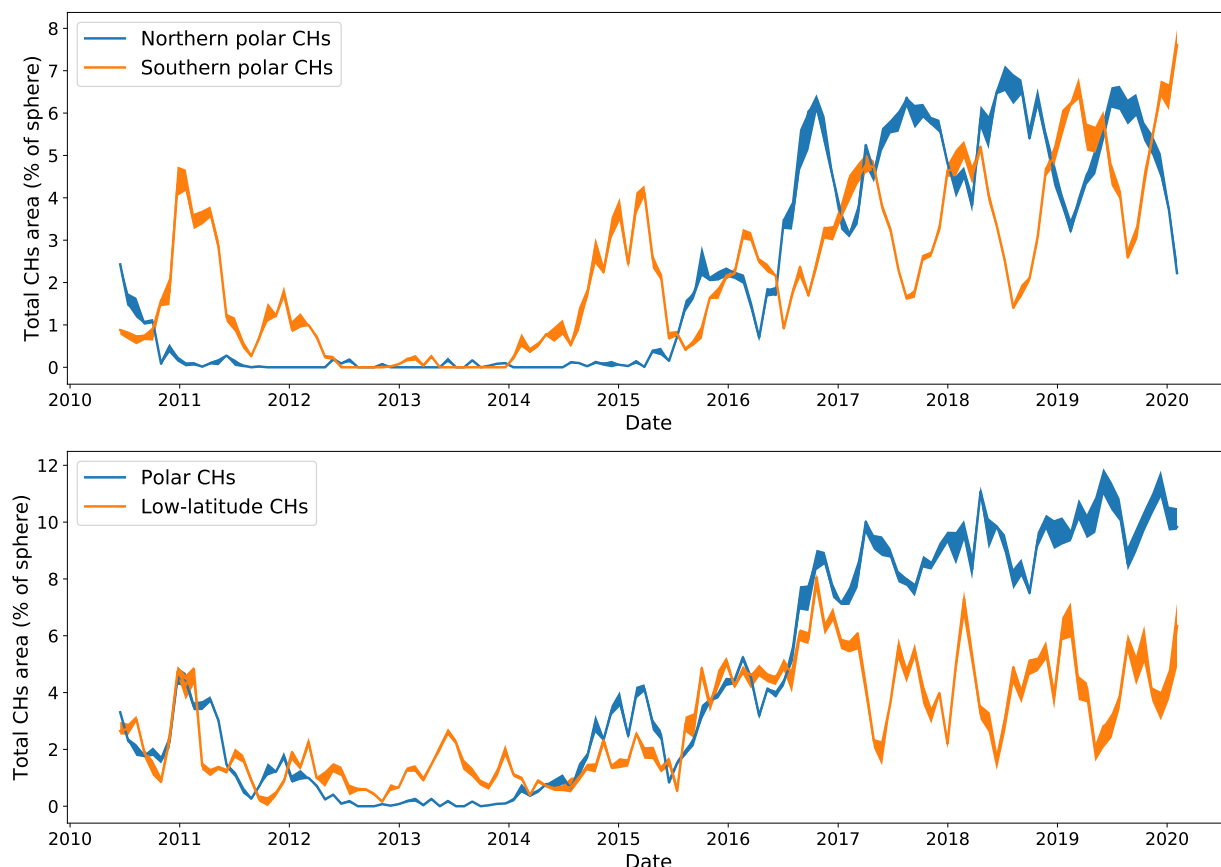


Рис. 4.41: Верхняя панель: годовая вариация В-угла. Средняя панель: суммарная площадь КД в северном и южном полушарии. Нижняя панель: суммарная площадь приполярных и низкоширотных КД. Разделительная граница между полярными и низкоширотными областями $\theta = \pm 50^\circ$. Ширина линии соответствует неопределенности, возникающей из-за различных параметров построения синоптических карт. Рисунок из работы [113].

квантильного преобразования. При этом оказывается, что результат становится более чувствителен к параметрам сдвига и масштаба по сравнению с созданием синоптических карт из изображений солнечных дисков. Наилучшая корреляция площадей КД достигается для параметра сдвига равного 39.6° и параметра масштаба равного 4. На рисунке 4.42 показана суммарная площадь КД, выделенных на изображениях солнечного диска и составленных в синоптическую карту, в сравнении с КД, выделенными напрямую на синоптических картах. В целом, результаты оба подхода к выделению КД находятся в согласии, однако количественно различаются.

Далее рассмотрим синоптические карты КД по отношению к магнит-

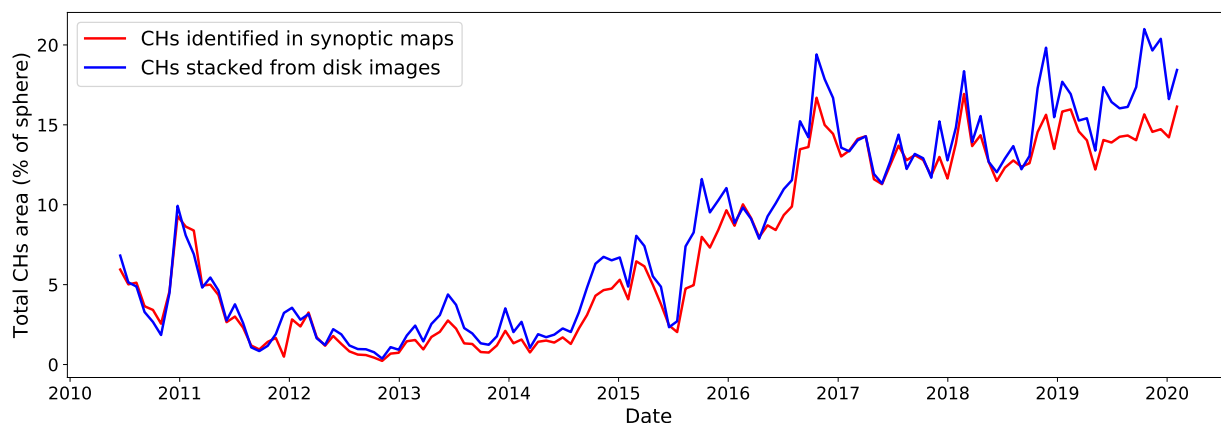


Рис. 4.42: Общая площадь КД, выделенных на синоптических картах (красная линия) в сравнении с КД, выделенными на изображениях солнечного диска (синяя линия). Рисунок из работы [113].

ным синоптическим картам и построим широтно-временные и долготно-временные диаграммы. Чтобы избежать влияния шума, магнитные поля слабее 10 Гаусс учитываться не будут.

Начнем с широтно-временной диаграммы, которая показывает отношение беззнакового магнитного потока в КД к беззнаковому магнитному потоку, просуммированному по всем долготам (рисунок 4.43). Из этого рисунка можно сделать вывод, что в то время как солнечный минимум сопровождается увеличением площади КД в низких широтах (см. рисунок 4.41, нижняя панель), его вклад в магнитный поток не является преобладающим. Напротив, полярные КД генерируют почти весь магнитный поток.

Теперь будем учитывать знак магнитного поля. Черно-белый фон на рисунке 4.44 представляет собой магнитное поле, усредненное по всем долготам, а синими и красными цветами показано магнитное поле, усредненное по долготам внутри КД. Для повышения статистической значимости, при усреднении магнитного поля внутри КД поле учитываются только те широты, где КД покрывают в сумме интервал не менее 20° по долготе. Из полученного графика видно, что полярные широты имеют преобладающий знак магнитного поля, который противоположен на севере и юге и меняется при переходе на новый солнечный цикл. Кроме того, в минимуме между циклами 24 и 25 низкоширотные КД имеют значительно более слабые магнитные поля по сравнению с полярными КД,.

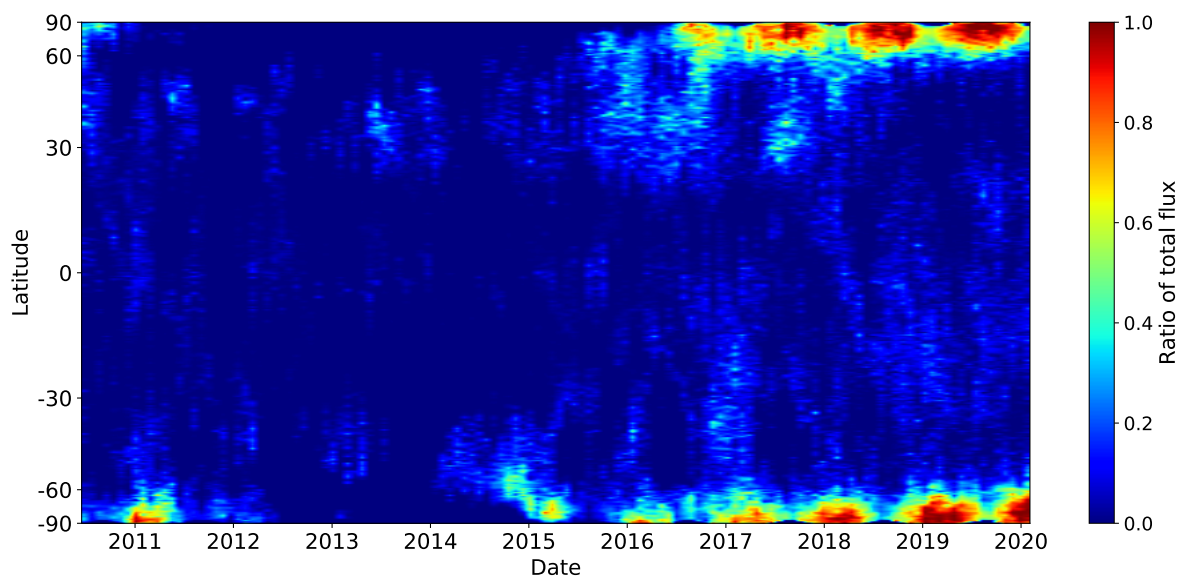


Рис. 4.43: Отношение беззнакового магнитного потока в КД к беззнаковому магнитному потоку, интегрированному по всем долготам. Рисунок из работы [113].

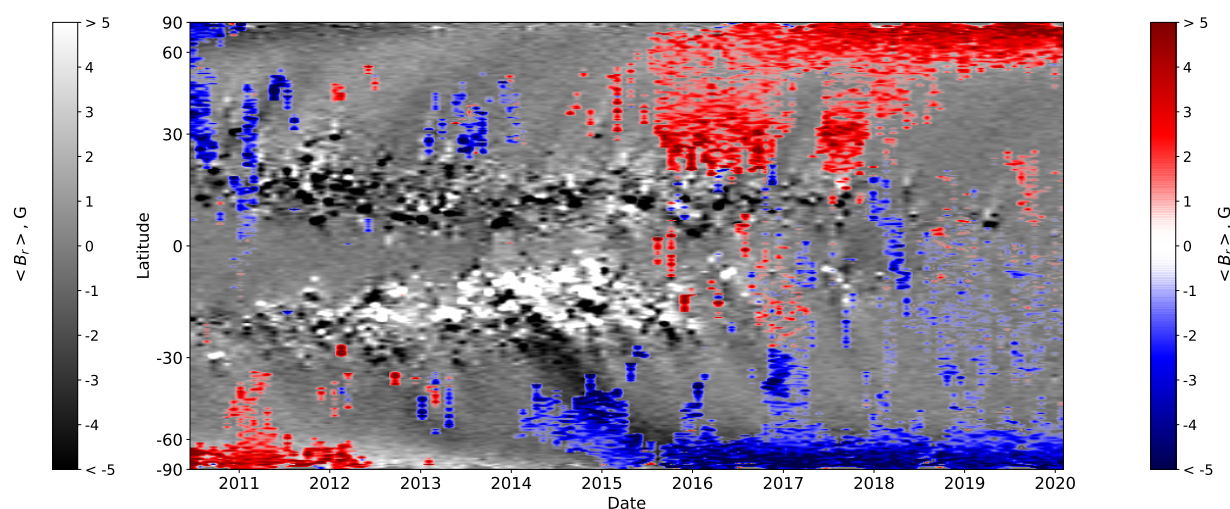


Рис. 4.44: Широтно-временная диаграмма усредненного по долготе магнитного поля внутри КД (показано синим и красным цветами) и магнитного поля, усредненного по всем долготам (серая карта). Обратите внимание, что нейтральный цвет в красно-синей цветовой полосе не белый, а прозрачный, поэтому слабые магнитные поля КД на графике не видны. Рисунок из работы [113].

Детальное исследование картины магнитных полей, показанной на рисунке 4.44, может дать представление о происхождении открытого магнитного потока в КД и его связи с механизмом переноса потока. Например, в работе [83] КД связывались с распадающимися комплексами магнитной

активности, а работы [213] и [102] выявили перенос открытого потока от полюса к полюсу. В работе [89] изучалась связь доминирующей полярности и относительных площадей КД в циклах 23 и 24.

Перейдем к изучению долготно-временных диаграмм магнитных полей КД. Панели на рисунке 4.45 соответствуют трем широтным областям, разделяемых границей $\theta = \pm 50^\circ$. Можно видеть, что распределение КД существенно отличаются в полярных и низкоширотных областях. Вблизи полюсов заметны крупномасштабные структуры, которые существуют около года. Это указывает на то, что КД формируют стабильные секторные структуры в распределении магнитного поля. В экваториальной области можно выделить смесь двух распределений. До 2015 года (во время солнечного максимума) можно наблюдать мелкомасштабные структуры, которые существуют в течение нескольких месяцев. После 2015 года (во время солнечного минимума) заметны характерные структуры в виде полос, которые можно проследить в течение нескольких лет. Обратим внимание на наклон структур на рисунке 4.45. Удлинение от правого нижнего угла к левому верхнему (которое видно в высокоширотных зонах) означает, что регион вращается медленнее, чем в кэррингтонской системе координат. Структуры в низких широтах, вытянутые в противоположном направлении, указывают на более быстрое вращение, что согласуется с общей картиной дифференциального вращения Солнца.

4.8. Сопоставление с методом пороговой сегментации

Сравним работу сверточной нейросетевой модели (CNN) и порогового метода, который часто применяется для выделения КД. Метод пороговой сегментации состоит в выборе пороговой интенсивности пикселей, ниже которой области относят к КД, а выше – к остальному фону. Пороговый уровень обычно определяется на основе гистограммы распределения интенсивностей пикселей по диску Солнца или на синоптической карте. Это распределение обычно имеет бимодальный вид, и в качестве пороговой от-

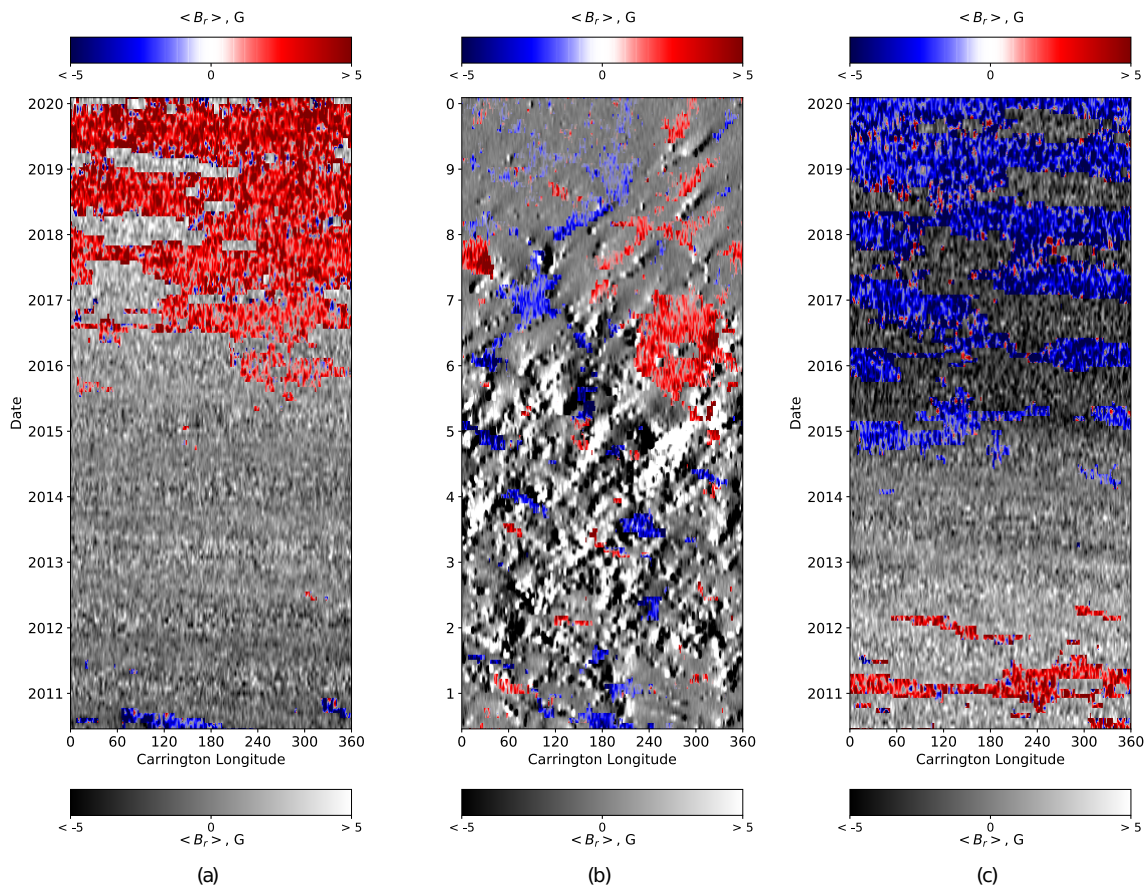


Рис. 4.45: Долготно-временные диаграммы магнитных полей КД (показаны синим и красным цветами) в трех широтных зонах. Панель (а) относится к высоким широтам в северном полушарии ($\theta > 50^\circ$), панель (b) – для низких широт ($|\theta| \leq 50^\circ$), панель (c) – для высоких широт в южном полушарии ($\theta < -50^\circ$). Фон в градациях серого показывает магнитное поле, усредненное по широтам для каждой широтной зоны. Обратите внимание, что нейтральный цвет в красно-синей гамме не белый, а прозрачный, поэтому слабые магнитные поля КД на графике не видны. Рисунок из работы [113].

сечки принято использовать положение вблизи минимума между двумя модами. Примеры гистограмм для синоптических карт для оборотов 2098, 2145 и 2219, использованных ранее, показаны на рисунке 4.46 и имеют характерное бимодальное распределение.

В качестве эквивалента модели CNN выберем такой пороговый уровень, при котором число пикселей, отнесенных к КД окажется равным числу пикселей, отнесенных к КД моделью CNN. Для разных синоптических карт эта граница будет разной, и на рисунке 4.46 показаны вычислен-

ные пороговые значений. Интересно отметить, что полученные значения попадают в область минимума между двумя модами, что соответствует стандартному физическому подходу к выбору пороговой границы. Тем самым можно сделать вывод, что эквивалентная пороговая сегментация оказывается согласованной со стандартным пороговым методом. Однако есть и определенные различия между картами, полученными моделью CNN и пороговым методом. Как видно на рисунке 4.46 карты сегментации CNN выглядят менее шумными по сравнению с пороговой сегментацией. Это говорит о том, что CNN модель включает в себя дополнительную обработку, которая приводит к формированию более устойчивых структур.

На примере синтетических синоптических карт изучим более подробно различие между методами при сегментации крупным и мелких структур. В качестве синтетической синоптической карты возьмем случайное гауссовское поле с радиальной экспоненциальной корреляционной функцией $K(r) = \exp(-r/r_0)$, где r – это расстояние между пикселями, а r_0 – корреляционный радиус. Малые значения r_0 формируют карту с некоррелированным шумом, при больших r_0 получаем крупномасштабные структуры. Далее с помощью квантильного преобразования приведем распределение интенсивности пикселей на синтетических картах в соответствие с распределением для реальной карты с оборота 2219 (взята для примера). Затем к полученным синтетическим синоптическим картам применим метод сегментации CNN и пороговый метод с тем же пороговым уровнем, как для карты с оборота 2219.

На рисунке 4.47 показаны примеры синтетических карт для различных r_0 и соответствующие карты сегментации. Можно видеть, что оба метода сегментации дают схожие результаты для крупномасштабных структур, но существенно отличаются для мелкомасштабных структур. В этом проявляется одна из особенностей модели CNN. Поскольку КД, как правило, являются крупномасштабными структурами, то релевантная модель должна учитывать размер области. Для пороговых методов сегментации учет площади делается путем явной фильтрации мелких областей, в то время как для CNN этот шаг делается неявно внутри модели и является следствием обучения.

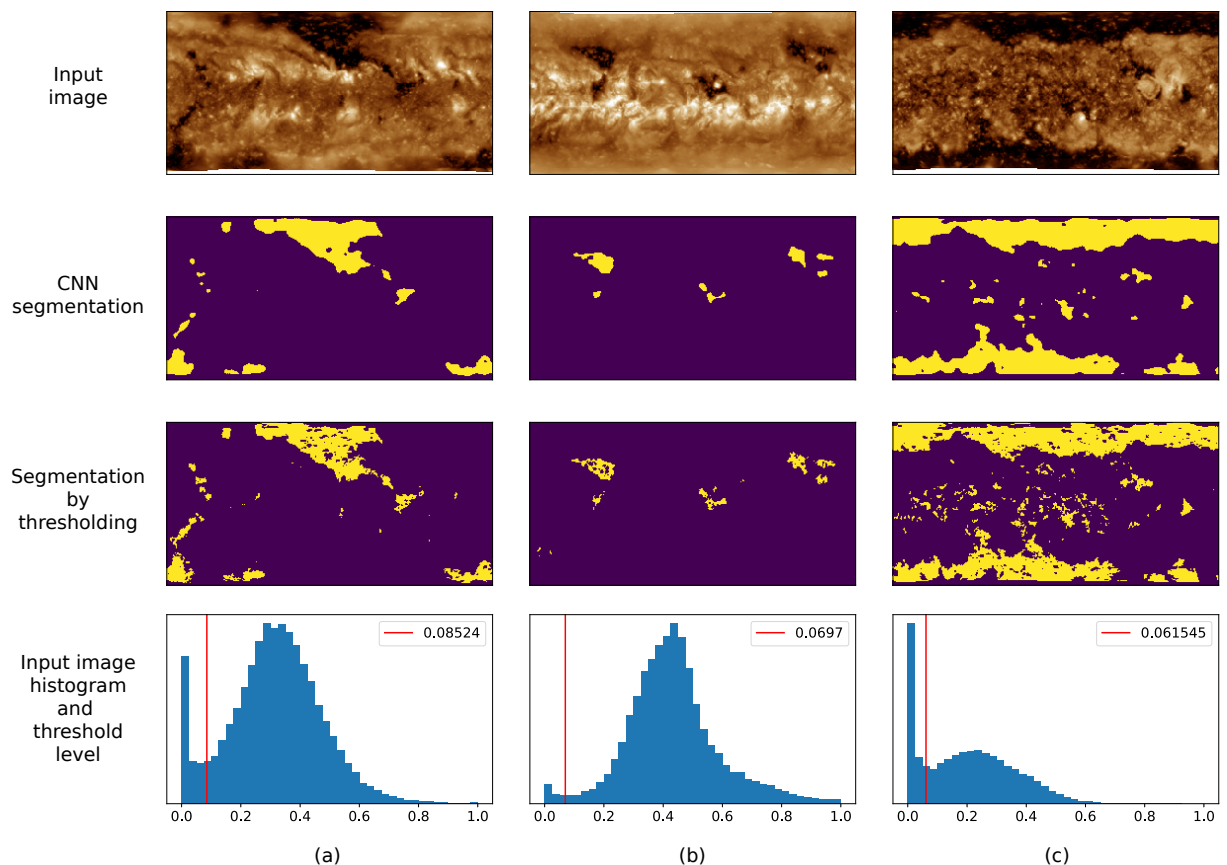


Рис. 4.46: Сравнение CNN модели и сегментации на основе порога. Столбцы соответствуют оборотам 2098 (a), 2145 (b) и 2219 (c). В верхнем ряду показаны исходные синоптические карты. Второй ряд показывает сегментацию КД с помощью модели CNN. Третий ряд показывает эквивалентную в смысле числа пикселей сегментацию на основе порогового метода. В нижнем ряду показаны гистограммы распределения интенсивности пикселей и пороговые уровни, которые обеспечивают эквивалентную сегментацию с точки зрения количества пикселей. Рисунок из работы [113].

Для более детального анализа, рассмотрим набор значений r_0 от 0.01 до 20, для каждого r_0 построим выборку из десяти синтетических карт, проведем процедуру сегментации двумя способами и подсчитаем количество пикселей, отнесенных к КД (для пороговой сегментации, в силу того, что гистограммы распределения интенсивности пикселей для всех карт одинаковы, применяется один и тот же пороговый уровень). На рисунке 4.48 показано, как меняется число пикселей, отнесенных к КД моделью CNN, в зависимости от корреляционного радиуса. Для малых r_0 пороговый метод, как ожидалось, относит мелкомасштабный шум к КД, при этом модель

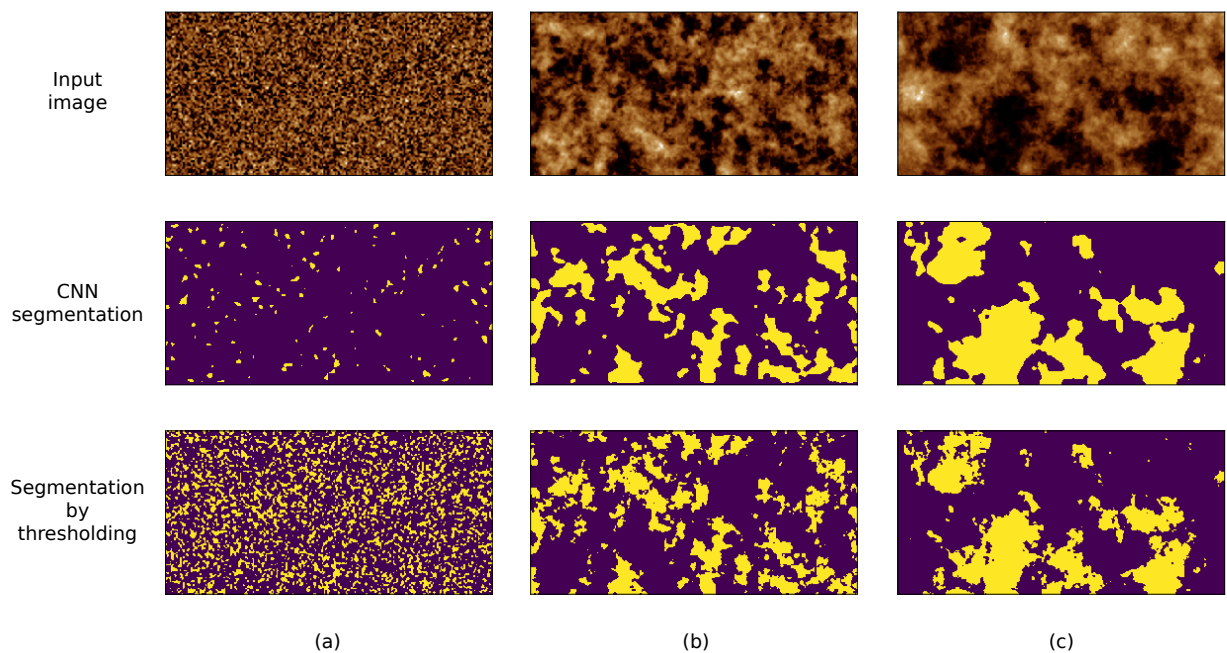


Рис. 4.47: Примеры синтетических синоптических карт и соответствующих карт сегментации. Столбцы соответствуют параметру радиуса корреляции $r_0 = 0.01$ (a), 10 (b) и 20 (c). В верхнем ряду показаны синтетические синоптические карты. В среднем ряду показаны карты сегментации полученные с помощью модели CNN. В нижнем ряду показана пороговая сегментации. Рисунок из работы [113].

CNN его игнорирует. При больших r_0 модель CNN сегментирует суммарно большую площадь как КД. Возможно, это связано с тем, что при пороговом подходе в крупномасштабных структурах могут встречаться дырки, в то время как CNN заполняет многие из них за счет глубокой сверточной архитектуры.

4.9. Выводы

Сегментация корональных дыр является основным шагом во многих модели прогнозирования космической погоды. Однако, как было показано, границы и параметры КД могут сильно отличаться от от одного алгоритма сегментации к другому. Проблема связана с тем, что алгоритмы, основанные на явных правилах, не обладают достаточным потенциалом для работы с большой вариативностью КД. Чтобы преодолеть это ограничение,

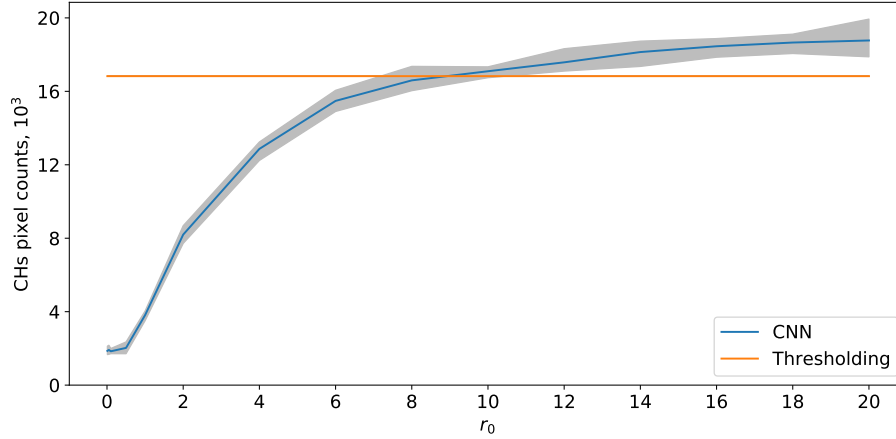


Рис. 4.48: Число пикселей, отнесенных к КД моделью CNN (синяя линия) и пороговым методом (оранжевая линия) в зависимости от корреляционного радиуса r_0 , использованного при создании выборки синтетических синоптических карт. Серый цвет показывает разброс в значениях по выборке из 10 синтетических карт. Рисунок из работы [113].

был предложен подход, основанный на машинном обучении и использовании нейронных сетей.

Нейронная сеть типа U-Net была обучена на наборе ежедневных изображений солнечного диска SDO/AIA в линии $193 \text{ \AA}$ и соответствующих карт КД за период с 2010 по 2017 год из архива Кисловодской горной астрономической станции. Период времени с 2017 по июнь 2018 года использовался для оценки модели и сравнения с другими алгоритмами сегментации.

Исходный код, позволяющий воспроизвести архитектуру модели и процедуру обучения доступен на сайте https://github.com/observethesun/coronal_holes.

Основной вывод заключается в том, что нейронная сеть способна обобщить эвристики, применяемые при составлении обучающего набора карт КД, и обеспечить сопоставимое качество сегментации.

Сравнение КД, выделенных с помощью U-Net, алгоритмов SPOCA и CHIMERA, показывает, что КД, выделенные U-Net, лучше коррелируют с изображениями SDO/AIA $193 \text{ \AA}$.

Выборочное детальное сопоставление предложенного метода и ряда других моделей на примере отдельно взятой КД было проведено в работе [180]. В работе [179] сравнение было проведено на более широком наборе рефе-

ренсных изображений солнечного диска. Общий вывод из этих исследований заключается в том, что между алгоритмами существует значительное различие, однако их оценка на выборках малого размера не позволяет однозначно выбрать лучший.

Далее было показано, что сверточная нейросетевая модель, обученная сегментации КД на изображениях солнечного диска, способна обнаруживать КД напрямую на синоптических картах Солнца. Это связано с тем, что сверточные операции, из которых состоит модель однотипным образом обрабатывает изображения разного размера. Это позволяет получать согласованные результаты для изображений диска целиком, частичных изображений диска и для синоптических карт.

В работе на основе ежедневных изображений солнечного диска был создан каталог синоптических карт. Было показано, что процесс сегментации КД на получаемых синоптических карт устойчив в достаточно широком вариациям параметров построения синоптических карт. В результате был создан однородный набор данных о положении КД с начала наблюдений SDO/AIA в 2010 г. по 2025 г. (24-й и 25-й солнечные циклы). На основе полученного каталога в работах [116], [113] и [237] изучались физических свойства КД и связь с солнечным циклом.

Для исследования физических свойств КД было проведено разделение на полярные, низкоширотные, северные и южные КД. На рисунке 4.41 было показано, что площади КД минимальны во время солнечного максимума и начинают увеличиваться во время фазы спада солнечного цикла. В цикле 24 площадь КД увеличивается примерно в три раза от минимальных значений в максимуме солнечного цикла до максимальных значений во время фазы спада солнечного цикла. Подтверждается асимметрия между северным и южным полушарием как во временном поведении КД, так и в величине площадей и магнитных потоков КД.

На рисунках 4.43, 4.44, и 4.45 были показаны структуры магнитного поля, связанного с КД, в широтно-временной и долготно-временной области. Широтно-временные диаграммы показывают перенос магнитного потока распадающихся активных областей из низких и средних широт в полярные области. Хотя ранее предполагалось, что КД формируются в высоких

широтах из магнитного поля, которое переносится с низких широт, рисунок 4.44 показывает, этот механизм не является единственно возможным. В некоторых случаях, например, в южном полушарии в 2015, 2016 и 2017 годах, действительно можно видеть связь КД с отрицательной полярностью с переносом отрицательным потока с низких широт. В особенности наиболее заметная зона образования КД около 2015 года, которая частично совпадает с крупным событием переноса потока. Однако в северном полушарии активность КД проявилась на год позже, продолжалась по времени дольше, и уже не так явно связана с событиями переноса потоков. Зона образования КД также была компактной в долготных зонах и располагалась в районе 240–300 градусов (рисунок 4.45b). Возможно, как показано в работе [25], КД также могут быть связаны с магнитными полями, возникающими в высоких широтах из подфотосферных слоев.

Связь между КД и переносом магнитных потоков требует дальнейшего детального изучения. Для непрерывного обновления каталога синоптических карт может быть использован разработанный комплекс программ для построения синоптических карт и сегментации КД, доступный в открытом репозитории https://github.com/observethesun/synoptic_maps. Каталог созданных синоптических карт и карт КД представлен в форматах fits и jpeg на сайте https://sun.njit.edu/coronal_holes/. На рисунке 4.49 показан вид базы данных карт КД с сайта https://sun.njit.edu/coronal_holes/.

Пользователю доступен просмотр каждой карты по отдельности в формате jpeg и возможность скачать либо отдельную карту, либо весь архив карт себе на компьютер в форматах fits и jpeg. На примере файла 'chs_synmap_cr2098.fits' перечислим доступные заголовки и соответствующие значения в файле fits:

- bitpix: -32
- naxis: 2
- naxis1: 720
- naxis2: 360

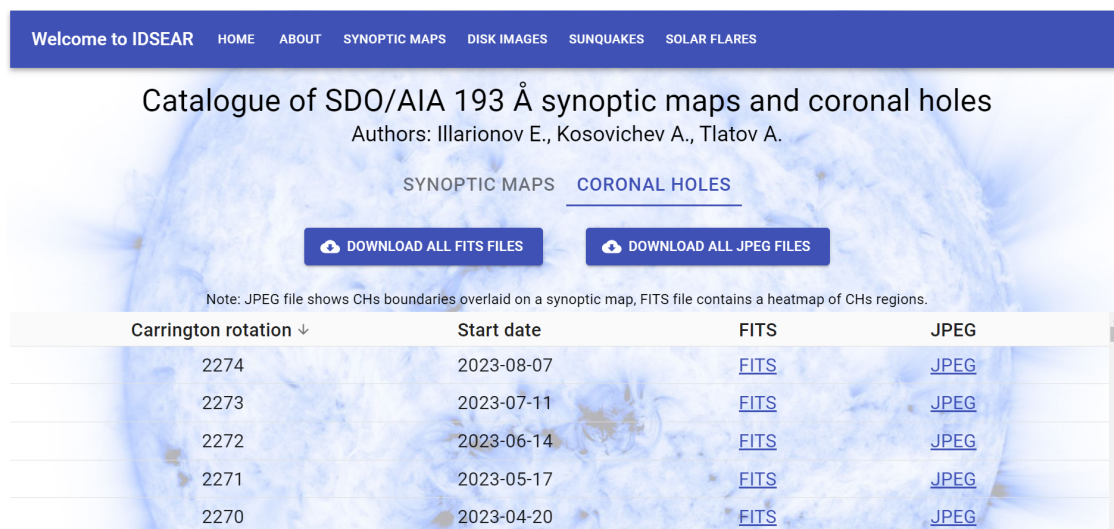


Рис. 4.49: Каталог синоптических карт КД на сайте https://sun.njit.edu/coronal_holes/.

- date: 2021-01-24T21:44:42
- car_rot: 2098
- date-obs: 2010-06-29T23:00:00
- t_obs: 2010.06.29_23:00:00_TAI
- t_rot: 2010.06.29_23:00:00_TAI
- t_start: 2010.06.16_23:00:00_TAI
- t_stop: 2010.07.12_23:00:00_TAI
- b0_rot: 2.731979095539582
- b0_first: 1.229423595582269
- b0_last: 4.108634189987116
- crpix1: 360.5
- crpix2: 180.5
- crval1: 180.0

- crval2: 0.0
- cdelt1: 0.5
- cdelt2: 0.5
- cunit1: deg
- cunit2: deg
- ctype1: Carrington Longitude
- ctype2: Latitude
- bunit: counts / pixel
- wcsname: Carrington Heliographic
- missvals: 0
- source: https://github.com/observethesun/synoptic_maps
- authors: Illarionov E. et al.
- simple: True
- comment:
- history:
- keycomments: 'SIMPLE': 'conforms to FITS standard', 'BITPIX': 'array data type', 'NAXIS': 'number of array dimensions'

Наряду с базой синоптических карт, разработан онлайн-инструмент сегментации и визуализации карт КД на солнечном диске основе изображений, полученных в режиме близком к реальному времени. Для этого из каталога <https://suntoday.lmsal.com/sdomedia/SunInTime> берется последнее доступное изображение солнечного диска в линии 193 Å. Обычно эти данные обновляются не реже, чем раз в час. Далее на изображении солнечного диска проводится сегментация КД и вычисляются параметры КД

– площадь полярных и низкоширотных КД. Затем, для данного изображения выбирается наиболее близкая по времени магнитограмма SDO/HMI. Отметим, что магнитограммы реального времени могут немного отличаться от тех, что впоследствии заносятся в архив магнитограмм SDO/HMI. На сайте используются именно магнитограммы реального времени, в названии их файлов присутствует суффикс *nrt* – near-real-time. Контуры КД накладываются на магнитограммы и вычисляется полный беззнаковый поток от полярных и низкоширотных КД. Результаты публикуются на сайте <https://sun.njit.edu/monitor>. Для оценки динамики развития КД на сайте приводятся данные за текущий момент и последние 25 дней (соответствует одному обороту Солнца). На рисунке 4.50 показан вид главной страницы сайта.

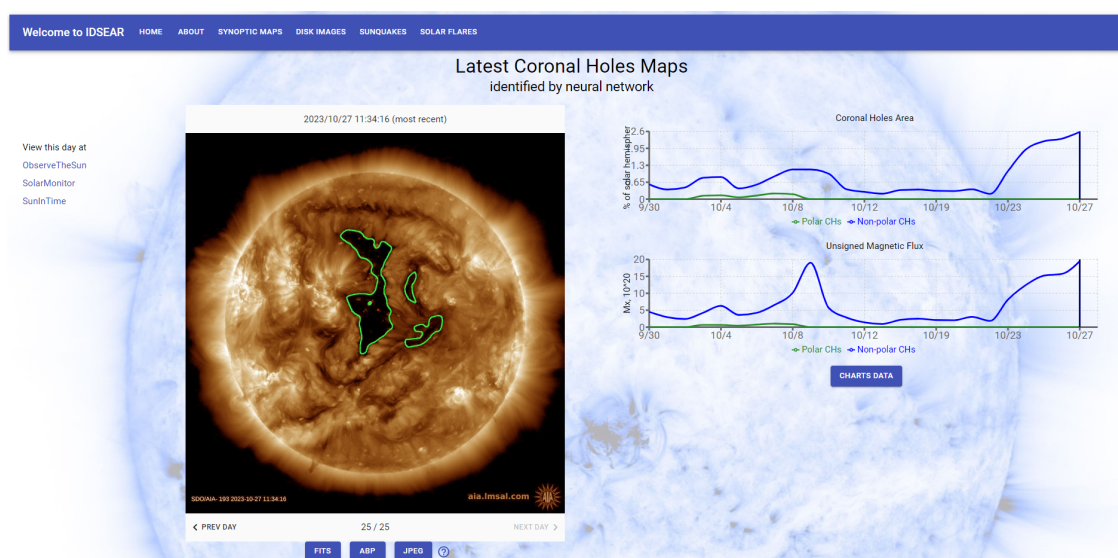


Рис. 4.50: Мониторинг КД в режиме близком к реальному времени на сайте <https://sun.njit.edu/monitor>.

В заключение раздела, обсудим перспективы развития методов сегментации активных областей на Солнце и синоптических данных.

Задача выделения активных областей на диске Солнце: солнечных пятен, флоккул, волокон, корональных дыр, – является одной из основных при обработке наблюдательных данных, а результаты используются для построения и проверки теорий в физике Солнца. Сегодня все чаще для решения этих задач используются методы машинного обучения. Однако эти

модели оказываются весьма локальными: они могут неплохо справляться с данными какого-то одного инструмента при условии стабильности его работы, но при деградации или замене инструмента качество ранее обученных моделей может существенно снижаться или они становятся вовсе нерелевантными, также как и для выделения других типов активных областей. В то же время для физики Солнца важнейший интерес представляют долговременные ряды данных, и за время их накопления техника и методики наблюдений менялись не один раз. Типичное решение этих проблем состоит в обучении новых моделей под новый тип данных. На практике это неэффективно сразу по многим причинам: необходимость сбора нового набора данных, проведение трудоемкой экспертной разметки данных, подбор архитектур и обучение моделей, необходимость существенных вычислительных ресурсов и экспертов по машинному обучению. С подобными проблемами сталкиваются и в других прикладных областях, и перспективным подходом становится разработка фундаментальных моделей машинного обучения.

Фундаментальные модели – это относительно новое направление в машинном обучении, в котором вместо сбора больших датасетов под каждую конкретную задачу и обучения на них частных моделей, обучается одна модель на объединении датасетов, и затем на ее основе уже на датасетах меньшего объема и за относительно быстрое время создаются модели, адаптированные под конкретные задачи. Поскольку получение качественной экспертной аннотации на больших объемах данных затруднительно, то использование стандартных подходов обучения с учителем (supervised learning) также требует переопределения. На одном из этапов обучения фундаментальных моделей формируют набор искусственных задач из неразмеченных данных. Обучение на этих задачах позволяет модели выявлять внутренние взаимосвязи в данных и формировать репрезентативное представление. Данный подход получил название self-supervised обучения. Наибольший прогресс в реализации идеи фундаментальных моделей виден в языковых моделях (например, BERT [65], GPT [37]). Эти модели, обучившись некоторым общим принципам естественных языков, оказались способными затем решать самые разнообразные задачи, связанные с естественными языками: перевод, генерация текстов, оценка тональности и

многие другие. Следуя этим идеям, недавно начали появляться работы и в области компьютерного зрения, например, модель SegmentAnything [131].

Стоит отметить, что архитектура, подход к обучению и многие другие детали модели SegmentAnything в разной степени наследуются из моделей обработки естественного языка, с которыми сегодня в первую очередь ассоциируется термин фундаментальных моделей. В качестве примера можно привести архитектуру Transformers (трансформер, [224]), которая от задач обработки последовательных данных (например, текста), была модифицирована и успешно себя показала в ряде задач обработки изображений. Отметим несколько моментов, ограничивающих потенциал модели SegmentAnything. Прежде всего, модель работает не полностью автоматически, а с опорой на подсказки. Так, для сегментации объекта необходимо указать какую-либо характерную точку этого объекта. Может показаться, что это ограничение обходится тем, что указывается множество пробных точек, равномерно разбросанных по изображению, однако это приводит к проблеме того, как из множества сегментаций выбрать наиболее правдоподобную. Другое ограничение связано со спецификой датасетов, на которых обучалась модель. По вполне прагматичным причинам авторы использовали преимущественно изображения сцен окружающей жизни. Подобные изображения резко отличаются от изображений, получаемых, например, в физике Солнца. Вполне ожидаемо, что на них качество модели снижается. При этом потребность в обработке научных измерений на том же уровне качества, как это делается для повседневных изображений, крайне высока: количество и объем данных, требующих обработки, оказывается сопоставимым.

Дальнейшее развитие подхода на основе фундаментальных моделей является перспективным как с точки зрения задач обработки наблюдательных данных по солнечной активности, так и с точки зрения переноса этих технологий на другие области науки, в которых возникают задачи обработки и интерпретации изображений.

Интересно отметить, что недавно в контексте изучения синоптических карт магнитных полей появилась возможность дополнить ряд современных данных, обсуждавшийся выше, реконструкцией из исторических дан-

ных, предшествующих первым прямым измерениям магнитных полей на Солнце. Разумеется, эта реконструкция возможна только в ограниченном смысле, а именно, возникает возможность восстановления карт полярности магнитного поля по хромосферным наблюдениям волокон.

Обычно, подобная реконструкция проводится вручную и базируется на предположении о том, что волокна являются трассерами линии инверсии магнитного поля (нейтральной линии). Соответственно, по обе стороны этой линии знаки магнитного поля должны быть противоположными. Создание согласованного каталога карт полярностей магнитного поля является исключительно трудоемкой задачей. Известными примерами являются каталоги, составленные Макинтошем [155] и Макаровым [152; 153].

Однако недавно, в работе [133] был предложен автоматический подход, основанный на методах машинного обучения. Его идея заключается в том, что строится нейронная сеть как функция от координат на синоптической карте и возвращающая знак полярности поля. Далее проводится обучение сети с той целью, чтобы получаемая функция была согласована с заданным положением волокон на синоптической карте и рядом общих физических ограничений. На рисунке 4.51 показаны примеры восстановления карты полярности в сравнении с картами из каталога Макинтоша. Предложенный метод может быть в дальнейшем использован для создания долговременных однородных рядов синоптических карт полярности магнитного поля.

Таким образом можно сделать вывод, что методы машинного обучения являются перспективным инструментом как для анализа серий данных, так и для их реконструкции. В последующих главах будут рассмотрены новые области применения методов машинного обучения в физике Солнца.

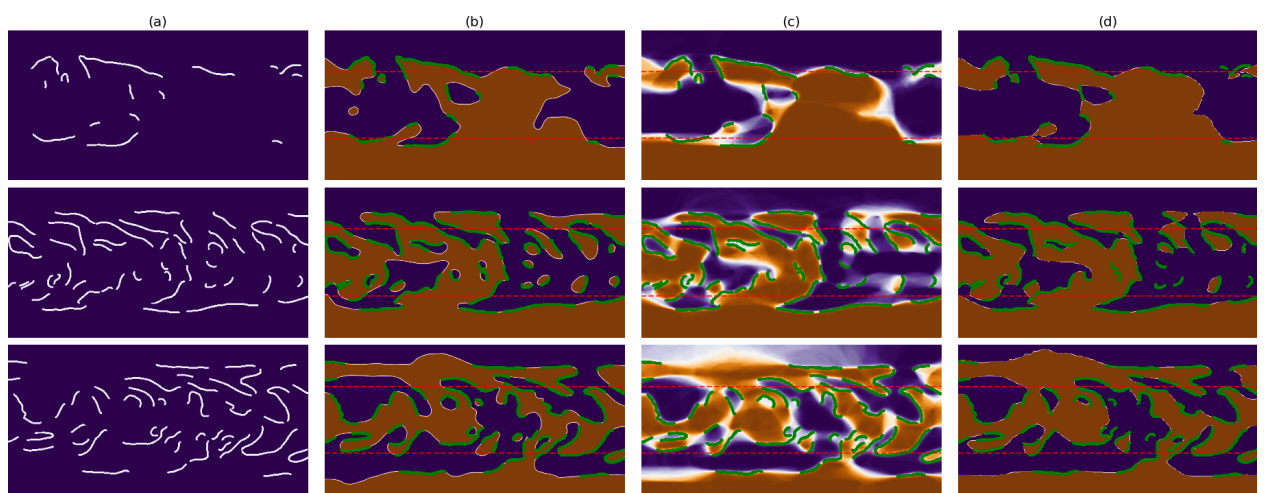


Рис. 4.51: Реконструкция карт полярности для кэррингтоновских оборотов 1355 (верхний ряд), 1373 (средний ряд) и 1387 (нижний ряд). Каждая строка включает четыре столбца: (a) исходные данные со структурами волокон; (b) целевая карта полярности из архива Макинтоша; (c) усредненный прогноз моделей; (d) бинаризованный усредненный прогноз. Белые линии в колонке (a), а также зеленые линии в колонках (b)–(d) соответствуют волокнам. Рисунок из работы [133].

Глава 5.

Параметрическое описание структуры активных областей

Понятие активной области на Солнце обычно отождествляют с областями сильных магнитных полей. Сильные магнитные поля могут приводить к образованию различных структур, наблюдаемых в соответствующих спектральных линиях и в разных слоях Солнца. Одними из самых примечательных образований являются группы солнечных пятен. Они хорошо видны в белом свете и выглядят как сложные структуры. Анализ и описание этих структур обычно основано на простых морфологических характеристиках, которые отражают самые общие свойства и не передают информации о тонких деталях. В частности, по этим общим характеристикам невозможно восстановить исходных образ группы.

В работе будет изучаться подход на основе машинного обучения для создания полного, но компактного набора характеристик (параметров), дающих описание групп солнечных пятен. Идея заключается в том, чтобы отобразить изображения групп солнечных пятен в низкоразмерное (латентное) пространство. Для этого будет применяться комбинация вариационного автоэнкодера и метода главных компонент, что позволит получить компактный (по отношению к размеру входного изображения) набор па-

раметров. Далее будет показано, что стандартные характеристики групп пятен в некотором виде содержатся в латентных. Таким образом, набор латентных параметров расширяет стандартное описание групп солнечных пятен и дает новые возможности для анализа их строения. Например, на их основе будет предложена модель оценки сложности группы и ее классификации.

Предложенный подход к параметризации на основе машинного обучения является достаточно общим и может быть применен для описания других явлений солнечной активности.

Дальнейшее изложение будет следовать работе [114].

5.1. Каталог групп солнечных пятен

В работе будет использоваться каталог ежедневных изображений групп солнечных пятен из каталога Кисловодской горной астрономической станцией за период 2010–2020 [160]. Наблюдения проводились в белом свете, затем полученные фотогелиограммы обрабатывались сотрудниками станции для выделения солнечных пятен, ядер и пор и отнесения их к группам солнечных пятен. Полученные в результате ежедневные карты солнечных пятен и группы пятен доступны на сайте observethesun.com.

Опишем процедуру предобработки карт групп солнечных пятен. Вначале масштаб всех карт приводится к постоянному радиусу солнечного диска, равному 1200 пикселей. Радиус выбран таким образом, чтобы большинство групп солнечных пятен умещалось в окне размером 256×256 пикселей. Затем вырезаются окна размером 256×256 пикселей с центром на каждой группе солнечных пятен, которая полностью находится в данном окне. При этом формируется 3 бинарные маски размером 256×256 , одна для солнечных пятен, вторая – задающая положения ядер, и третья – для пор. Бинарные маски строятся только для одной группы и игнорируют информацию о других группах, которые могли попасть в данное окно. Чтобы избежать нежелательных проекционных эффектов вблизи солнечного лимба, рассматриваются только группы с расстоянием до центрального меридиана менее 60° . Таким образом, для дальнейшего анализа было выделено

8 498 групп.

Построенный набор данных групп солнечных пятен находится в открытом доступе в репозитории GitHub github.com/observethesun/sunspot_groups. В репозитории также предоставляем общую информацию о группах, включая их площадь, положение, количество пятен и вытянутость. А именно, приводится следующая информация для групп пятен:

- `fname` – имя файла группы солнечных пятен в наборе данных (также формат имени файла `YYYYMMDDHHMM_N` кодирует дату, время наблюдения и номер группы солнечных пятен);
- `date` – дата и время наблюдения;
- `group_number` – номер группы солнечных пятен;
- `lat_max` – максимальная гелиографическая широта пикселей группы солнечных пятен;
- `lat_mean` – средняя гелиографическая широта группы солнечных пятен;
- `lat_min` – минимальная гелиографическая широта пикселей группы солнечных пятен;
- `long_max` – максимальная кэррингтоновская долгота пикселей группы солнечных пятен;
- `long_mean` – средняя кэррингтоновская долгота группы солнечных пятен;
- `long_min` – минимальная кэррингтоновская долгота пикселей группы солнечных пятен;
- `area` – площадь группы солнечных пятен в МДП (миллионных долях солнечной полусферы);
- `nspots` – общее количество пятен и пор в группе солнечных пятен;

- `ncores` – количество ядер в группе солнечных пятен;
- `nspots_with_cores` – количество пятен с ядрами;
- `tilt` – наклон (в градусах, положительный по часовой стрелке) линии регрессии, вписанной в группу солнечных пятен;
- `complexity` – целое число, отражающее сложность группы солнечных пятен. Определяется как число главных компонент, при котором ошибка реконструкции составляет половину ошибки реконструкции для первой главной компоненты;
- `B0` – угол B_0 для даты и времени наблюдения;
- `L0` – угол L_0 для даты и времени наблюдения.

Для дальнейшего исследования 3 бинарные маски объединяются в один двумерный массив размера 256×256 , в котором пиксели имеют одно из трех значений: 0, 1 или 2, причем 0 означает фотосферу (фон), 1 – солнечные пятна и поры, а 2 – ядра солнечных пятен. На рисунке 5.1 показан пример группы солнечных пятен.

5.2. Постановка задачи понижения размерности данных

Проблема параметризации объектов тесно связана с проблемой представления объектов в подходящем низкоразмерном пространстве. Для решения задачи низкоразмерного представления существует ряд линейных и нелинейных подходов. В данной работе будет применяться нейросетевая модель с архитектурой типа автоэнкодер. Есть несколько причин, по которым используется именно данный подход.

Во-первых, изображения являются примером высокоразмерных данных (изображение размером 256×256 пикселей представимо вектором размера 256^2). Стандартные линейные модели уменьшения размерности, например, метод главных компонент (Principal Component Analysis – PCA, [171]),

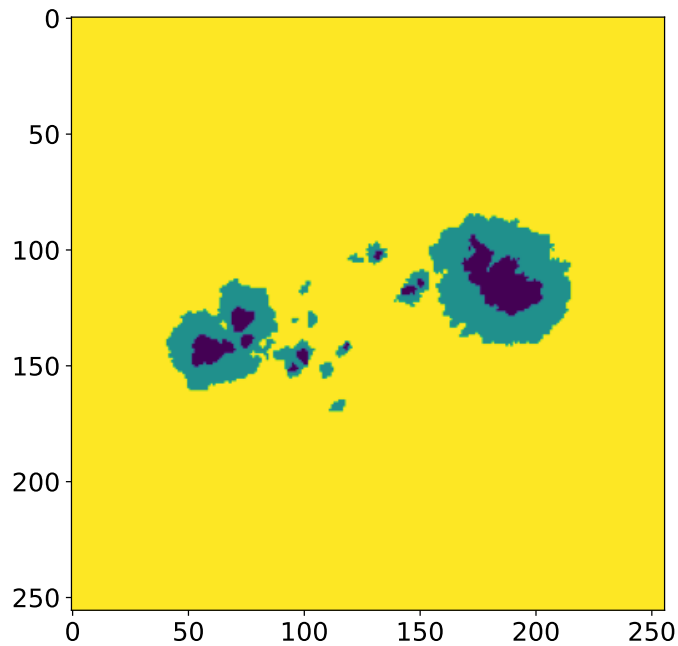


Рис. 5.1: Пример группы солнечных пятен из набора данных. Дата наблюдения – 18 июля 2016, 04:16UT. Номер группы солнечных пятен – 124 по каталогу Кисловодской горной астрономической станции. Рисунок из работы [114].

обычно работают устойчиво, если объем данных (размер выборки) сопоставим или превышает число измерений. В противном случае обнаруживаются нежелательные проблемы (см., например, [120] для строгого математического обсуждения). Поэтому имеет смысл сосредоточиться на нелинейных моделях, однако, следует отметить, что модель РСА все же может быть полезна в некоторых приложениях (см., например, [159]).

Во-вторых, многие модели (в том числе, метод главных компонент) способны работать только с данными, представленными в векторной форме. Для обработки изображений приходится складывать ряды матриц изображений в один ряд, что нарушает исходное представление данных. Гораздо меньше моделей способны обрабатывать изображения напрямую. В основном это модели, основанные на сверточных операциях (например, сверточные нейронные сети). Одной из таких моделей является вариационный автоэнкодер (Variational Autoencoder – VAE, [130]), к описанию которого перейдем далее.

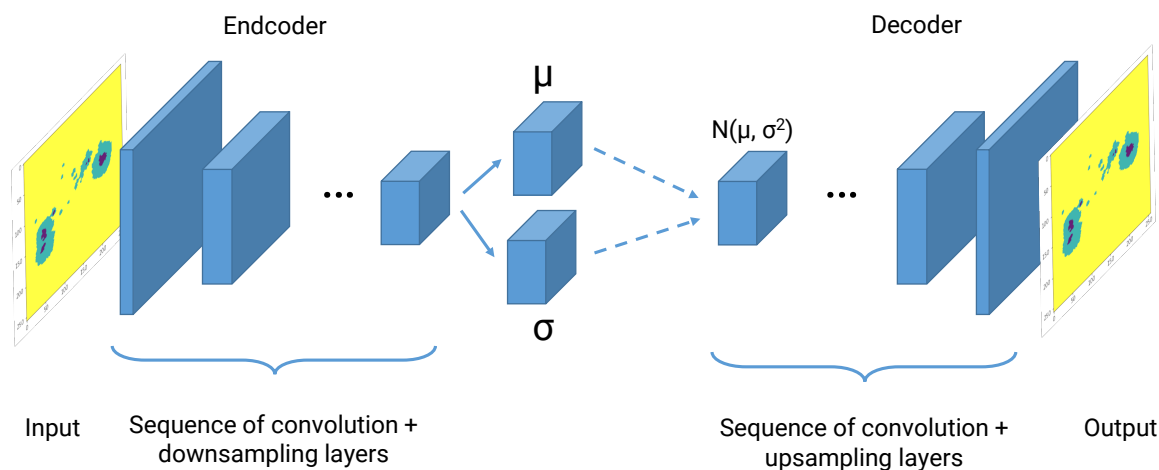


Рис. 5.2: Архитектура модели вариационного автоэнкодера. Кодировщик пропускает входное изображение через последовательность слоев свертки и понижающей размерности. на выходе из кодировщика формируется два тензора μ и σ , интерпретируемые как векторы среднего и дисперсии многомерного нормального распределения. Декодировщик получает выборку из этого распределения и пропускает ее через последовательность слоев свертки и повышения размерности. На выходе декодировщика получается изображение той же формы, что и входное изображение в кодировщике. Рисунок из работы [114].

5.3. Модель параметризации групп пятен

Модель VAE состоит из двух последовательных частей, называемых кодировщиком и декодировщиком (см. рисунок 5.2).

Кодировщик сжимает входное изображение в тензор (в приложении к нейронным сетям одно- или многомерные массивы называются тензорами) меньшей размерности через последовательность сверточных слоев и слоев понижающих размерность. Будем интерпретировать тензор, получаемый на выходе из кодировщика, как низкоразмерное представление входного изображения и называть его *латентным вектором*. Задача декодировщика состоит в восстановлении оригинального изображения из его низкоразмерного представления с помощью другой последовательности слоев свертки и повышения размерности. При наличии большого набора данных можно обучить такие модели сжимать и разжимать изображения без существенной потери деталей.

Кроме того, полезно потребовать, чтобы распределение, получаемое для

латентных векторов, было близко, например, к нормальному виду. В частности, это упрощает задачу генерации новых выборок. Такая модификация известна как вариационный автоэнкодер (variational autoencoder, VAE). В этом случае выходом кодировщика является два тензора μ и σ (см. рисунок 5.2), которые интерпретируются как векторы среднего и дисперсии гауссовского распределения. На этапе обучения модели декодировщик получает в качестве латентного вектора выборку из гауссовского распределения с этими μ и σ , а в функцию потерь добавляется слагаемое в виде расстояния Кульбака-Лейблера между параметрами распределения латентных векторов и стандартным гауссовским распределением с нулевым средним и единичной дисперсией (см. [130] для детального математического изложения). После обучения модели вариационного автоэнкодера тензор μ как низкоразмерное представление входного изображения (латентный вектор).

На этапе обучения модель штрафует, если восстановленное изображение (выход декодировщика) не похоже на вход кодировщика. Для определения сходства между двумя изображениями обычно используется среднеквадратичная ошибка (mean squared error, MSE), вычисляемая по пикселям. Эта метрика отражает сходство в среднем и мало чувствительна к сходству в деталях, из-за чего восстановленное изображение зачастую оказывается размытым (см., например, [72; 201]). Чтобы лучше учитывать тонкие детали изображения, будем применять дополнительную метрику, известную как *perceptual loss* [119]. Идея этой метрики состоит в измерении среднеквадратичного расстояния не напрямую между парой изображений, а между некоторыми промежуточными слоями предварительно обученной вспомогательной модели, через которую пропускается пара изображений. Вспомогательная модель обычно обучается общей задачи классификации изображений на каком-либо размеченном наборе данных и предполагается, что обученная модель на промежуточных слоях вычисляет информативные характеристики изображения. Метрика *perceptual loss* вычисляет среднеквадратичное расстояние между этими характеристиками для данной пары изображений. На практике это позволяет модели VAE генерировать более четкие изображения с сохранением большего количества деталей. Полагается, латентные признаки при этом становятся более репрезентативными.

В работе для вычисления этой вспомогательной метрики будет использоваться предварительно обученная модель VGG11 [200]). Более тонкие детали конфигурации модели VAE представлены в открытом репозитории GitHub https://github.com/observethesun/sunspot_groups вместе с процедурой обучения модели. Наиболее существенная деталь заключается в том, что тензор μ имеет размерность 4096 (размерность латентного пространства). Учитывая, что входное изображение имеет размер 256×256 , это дает сжатие в 16 раз. Однако это еще не достаточно компактный размер, более того, латентные признаки никак не ранжированы, а некоторые из них довольно сильно коррелированы.

Оказывается, что дальнейшее сокращение латентного пространства в рамках модели VAE существенно усложняет процесс обучения. Поэтому для дополнительного сжатия будем применять к латентным векторам μ метод главных компонент (principal component analysis, PCA).

Напомним, что идея метода главных компонент состоит в том, чтобы найти ортогональный базис заданного размера n , который наилучшим образом представляет выборку. Можно показать, что этот базис должен состоять из n главных (т.е. упорядоченных по убыванию собственных значений) собственных векторов, вычисленных из корреляционной матрицы наблюдаемых переменных. Упорядоченные по собственным значениям собственные векторы называются *главными компонентами* (PC). Модель PCA гарантирует, что полученный базис минимизирует общую ошибку реконструкции, а также является подпространством с максимальной дисперсией данных (см., например, [161] и рисунок 5.3).

Для применения модели PCA, сначала получим латентный вектор μ (размером 4096) для каждой группы солнечных пятен с помощью кодировщика VAE. Затем рассмотрим латентные вектора μ как входные данные для модели PCA и найдем главные компоненты. На рисунке 5.4 показано, как число n главных компонент влияет на точность реконструкции. Оказывается, что $n = 285$ главных компонент достаточно, чтобы восстановить 95% исходной вариации данных. Будем обозначать $Z_1, Z_2, \dots, Z_{285}$ координаты латентного вектора μ в базисе главных компонент.

На рисунке 5.4 можно заметить, что более простые группы (например,

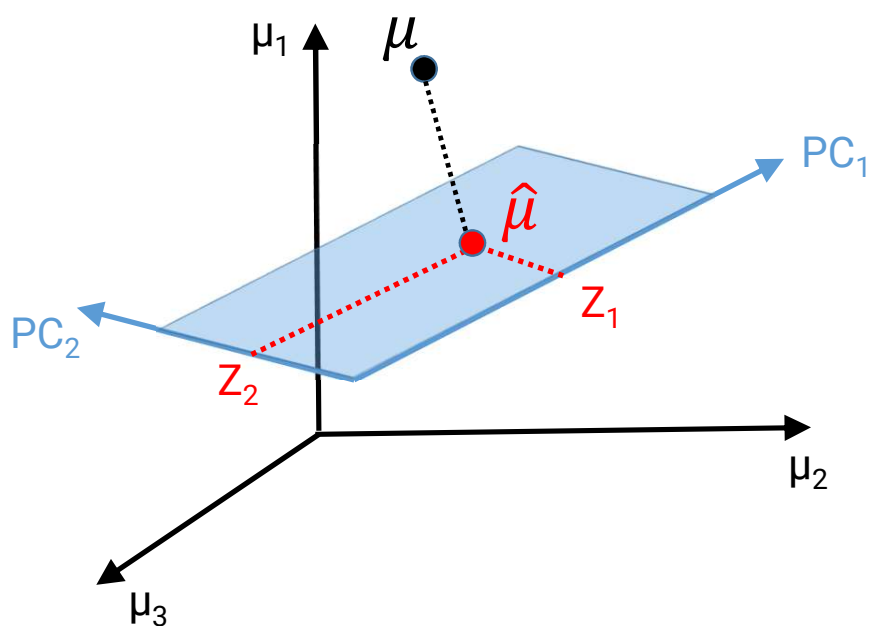


Рис. 5.3: Иллюстрация модели PCA. Черная точка μ представляет вектор признаков (единичное наблюдение). Синяя плоскость – подпространство, образованное $n = 2$ ведущими главными компонентами (PC). Красная точка $\hat{\mu}$ – проекция μ на подпространство, образованное PC_1 и PC_2 . Z_1 и Z_2 обозначают координаты $\hat{\mu}$ в базисе PC_1 и PC_2 и называются латентным вектором. Квадрат длины черной пунктирной линии – это ошибка реконструкции. Учитывая набор векторов признаков (набор данных), общая ошибка реконструкции равна сумме ошибок реконструкции для каждого наблюдения. Рисунок из работы [114].

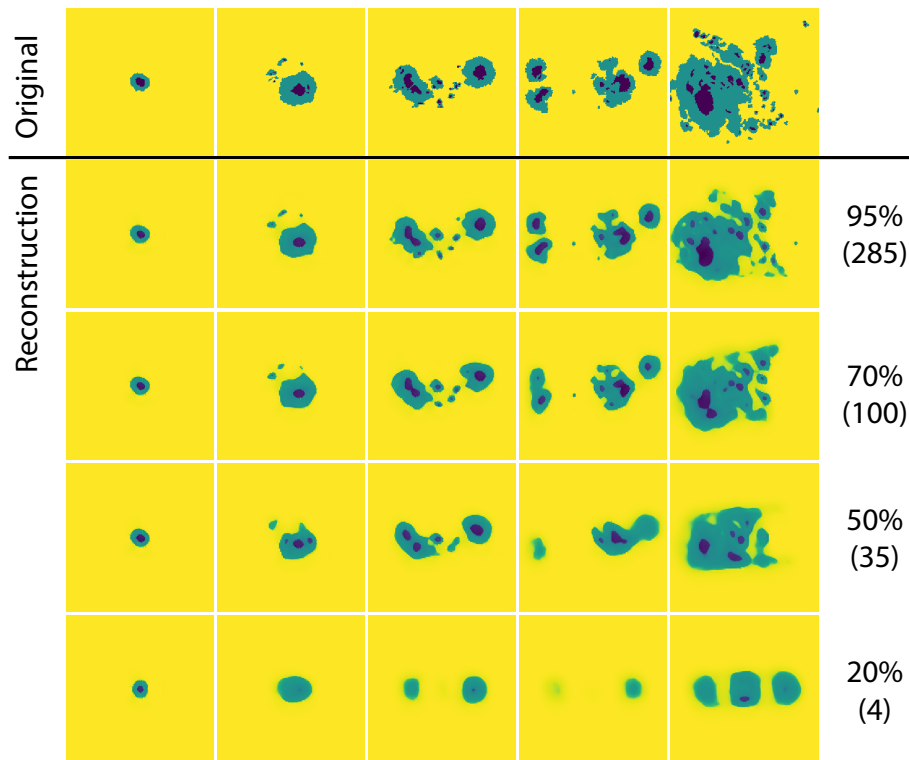


Рис. 5.4: Точность реконструкции в зависимости от количества главных компонент в латентном пространстве кодировщика VAE. В верхнем ряду показаны примеры групп солнечных пятен. В следующих рядах показана реконструкция по различным числам главных компонент. Проценты возле каждой строки показывают объясненную дисперсию, а цифры внизу указывают на количество главных компонент. Например, 285 главных компонент объясняют 95% дисперсии данных. Рисунок из работы [114].

группы одиночных точек) требуют меньше главных компонент (меньше n) для точной реконструкции. Далее это наблюдение будет использовано для оценки сложности структуры группы солнечных пятен.

Опишем полную схему модели параметризации. Изображение группы пятен пропускается через кодировщик обученной модели VAE и на выходе получается латентный вектор μ . Далее этот вектор пропускается через модель PCA, которая преобразует его в вектор Z , состоящий из 285 компонент. При этом компоненты вектора Z упорядочены в соответствии с убыванием собственных значений корреляционной матрицы.

Для восстановления прообраза вектора Z , он с помощью обратного PCA преобразования переводится в вектор μ , который затем подается на вход декодировщику.

В следующем разделе обсудим физическую интерпретацию латентных параметров Z , полученных из набора данных изображений групп солнечных пятен.

5.4. Исследование структуры пространства параметров, связь с физическими параметрами

Пусть $Z_1, Z_2, \dots, Z_{285}$ – компоненты латентного вектора Z . Чтобы получить интерпретацию конкретной компоненты Z_k , приравняем все компоненты кроме Z_k . Варьируя Z_k , получим декодированные изображения и проанализируем их.

Начнем со старшей компоненты Z_1 . На рисунке 5.5 показано, что происходит с декодированными изображениями, когда параметр Z_1 изменяется от -20 до 20 с шагом 10 (при $Z_2 = Z_3 = \dots = Z_{285} = 0$). Глядя на декодированные изображения на рисунке 5.5, можно сделать вывод, что Z_1 отвечает за униполярную (однопятенную) или биполярную (многопятенную) конфигурацию группы. Отметим, что понятие униполярности и биполярности рассматривается как чисто геометрическое, без привязки к знаку магнитного поля.

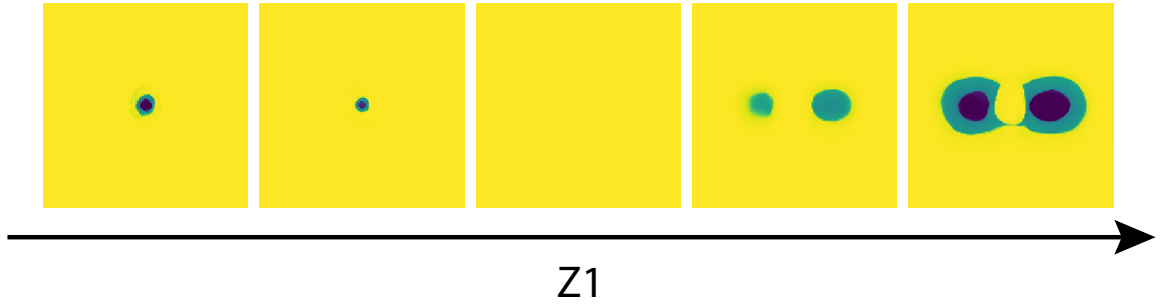


Рис. 5.5: Изображения групп солнечных пятен для значений латентного признака Z_1 от -20 до 20 с шагом 10 . Рисунок из работы [114].

Интересно отметить, что признак униполярности или биполярности является одним из первых при описании группы, и, как оказалось, этот же признак стал наиболее значимым в модели параметризации, причем без каких-либо явных указаний со стороны и только за счет обучения.

На рисунке 5.6 приведено сравнение распределения параметра Z_1 по однопятенным и многопятенным группам. Можно видеть, что эти два распределения достаточно хорошо отделяются. Чтобы найти оптимальное значение порога, построим набор пороговых классификаторов, основанных на различных пороговых значениях Z_1 . Классификатор относит группу солнечных пятен к классу однопятенных групп, если Z_1 ниже порога, и к классу многопятенных групп в противном случае. Сплошная линия на рисунке 5.6 показывает точность таких классификаторов при различных пороговых значениях Z_1 . Самая высокая точность составляет 0.95 для $Z_1 = -2.4$.

На рисунке 5.7 исследуется совместное влияние пары параметров Z_1 , Z_2 (т.е. варьируются Z_1 и Z_2 и строятся графики декодированных изображений). Можно сделать вывод, что Z_2 отвечает за размер группы или, более точно, за ее вытянутость.

На рисунке 5.8 показано сравнение параметра Z_2 и размером группы по долготе. Можно видеть сильную положительную корреляцию между этими характеристиками для униполярных групп и отрицательную корреляцию для биполярных групп.

На рисунке 5.9 показано распределение групп солнечных пятен и их физических свойств (количество пятен и площадь) в координатах Z_1 и Z_2 . Следует отметить, что структура, представленная на рисунке 5.9, доста-

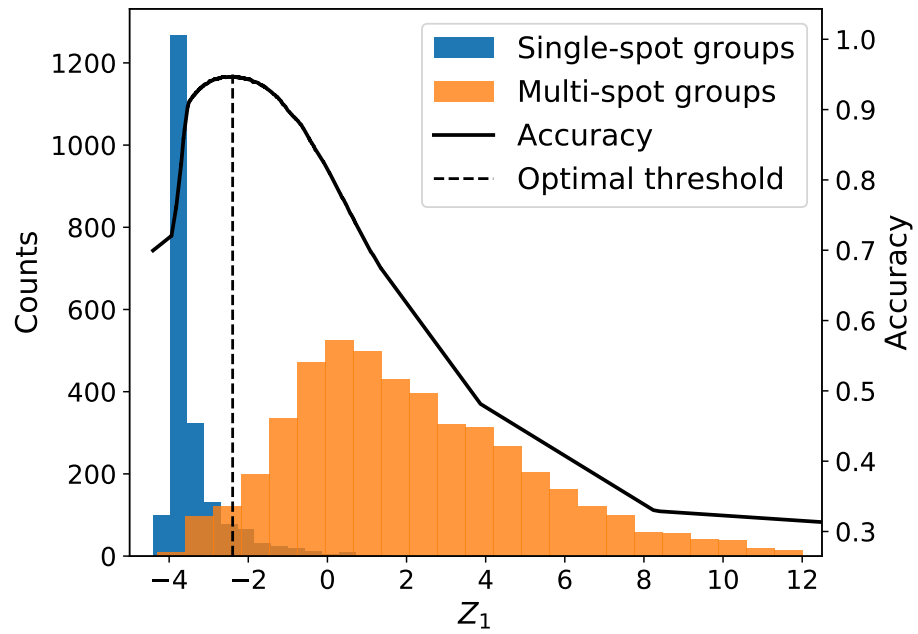


Рис. 5.6: Гистограммы распределения латентного параметра Z_1 по однопятенным (синие столбики) и многопятенным группам (оранжевые столбики). Сплошная линия показывает точность порогового классификатора, а пунктирная линия – значение порога для классификатора с наилучшей точностью. Рисунок из работы [114].

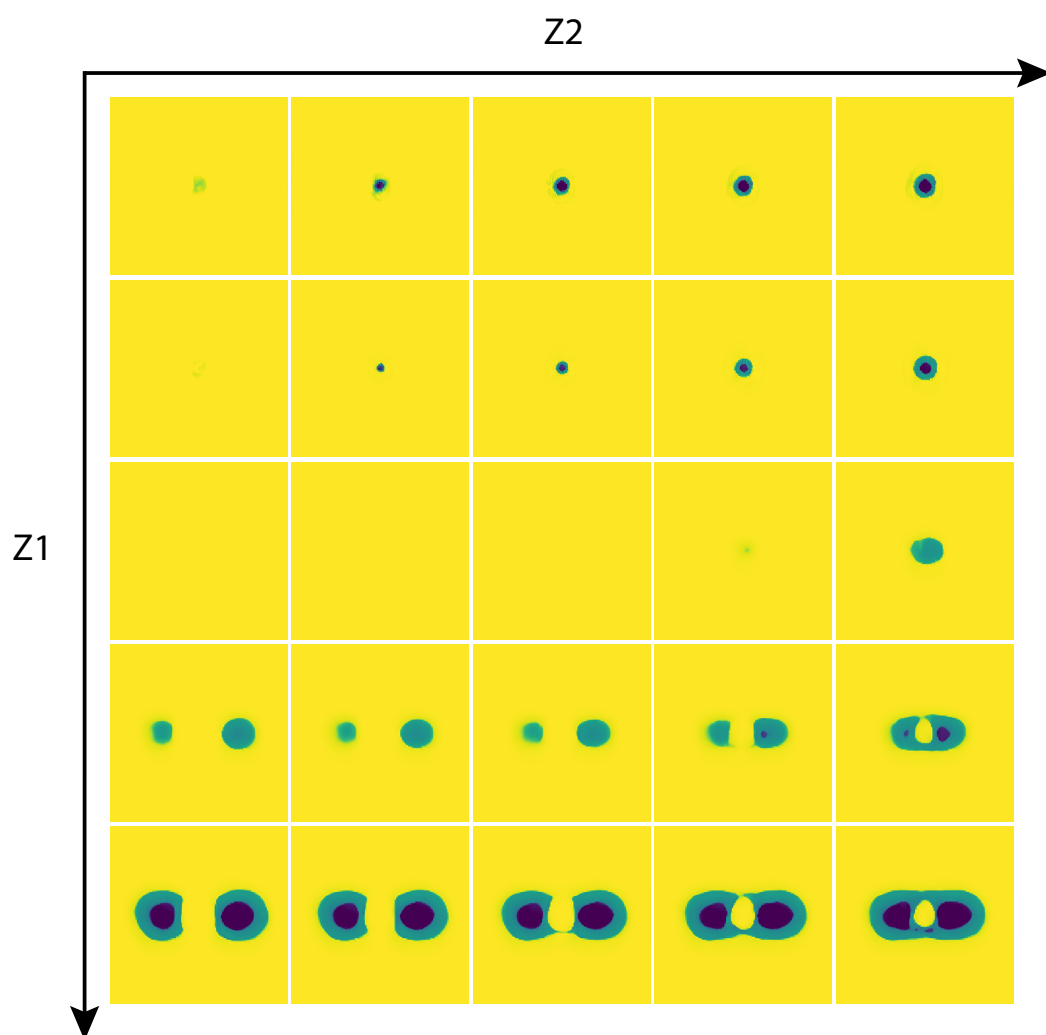


Рис. 5.7: Изображения группы солнечных пятен для различных значений скрытых параметров Z_1 и Z_2 . Варьируются Z_1 от -20 до 20 с шагом 10 и Z_2 от -5 до 5 с шагом 2.5 . Рисунок из работы [114].

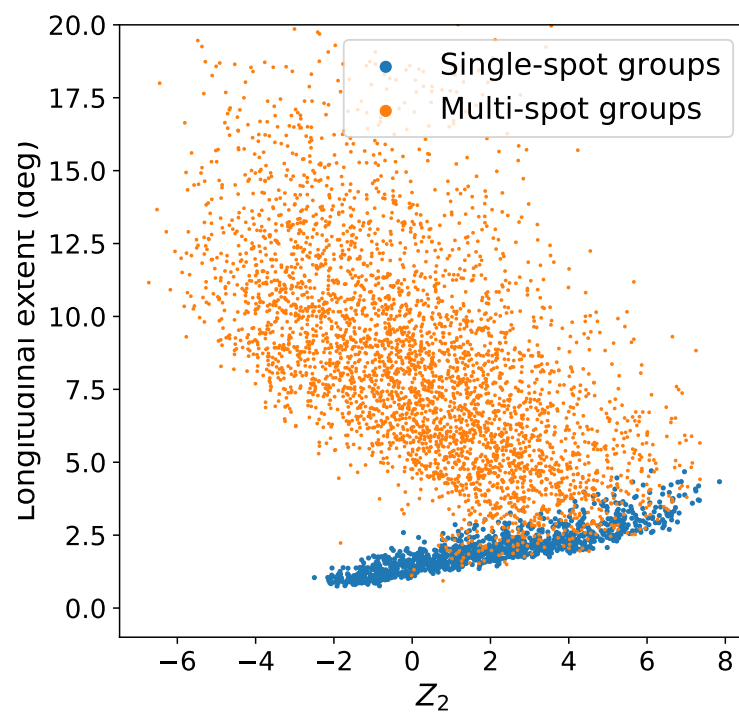


Рис. 5.8: Корреляция между параметром Z_2 и размером группы по долготе. Синим цветом выделены группы одиночных пятен, оранжевым – группы из нескольких пятен. Рисунок из работы [114].

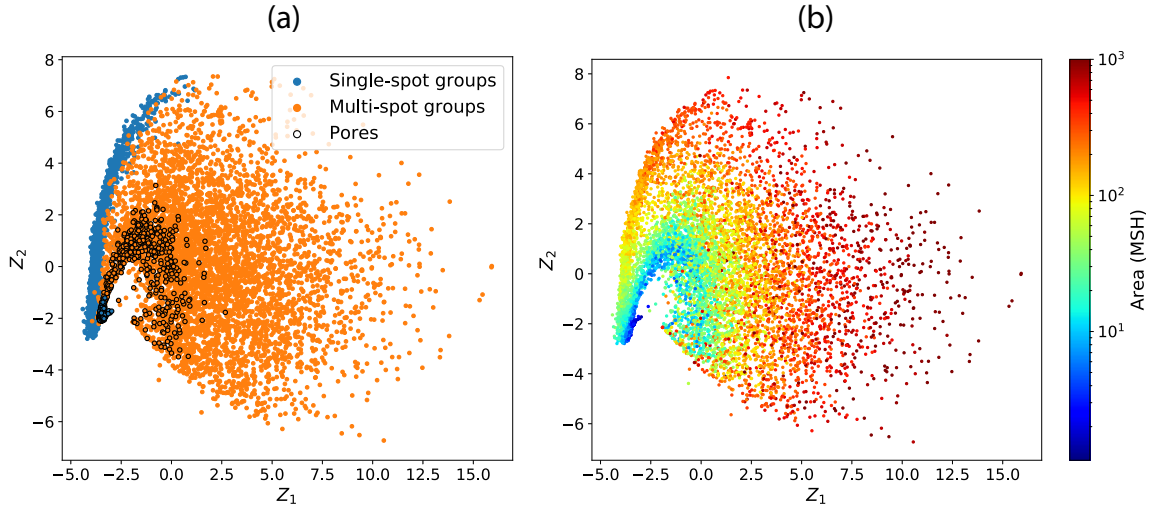


Рис. 5.9: Распределение групп солнечных пятен в пространстве латентных параметров Z_1 и Z_2 . Синим цветом на панели (a) показаны одинопятенные группы, оранжевым – многопятенные, точками с черными краями отмечены поры. Цвета на панели (b) показывают площадь группы солнечных пятен, измеренную в миллионных долях солнечной полусферы (МДП или MSH). Рисунок из работы [114].

точно устойчива к повторному обучению модели, небольшим изменениям в процедуре оптимизации и параметра самой модели. В дальнейшем интересно отдельно исследовать топологические свойства латентного пространства.

На левой панели рисунка 5.9 можно видеть четкое разделение между одиночными пятнами и многопятенными группами. В соответствии с рисунком 5.5 разделение в основном объясняется значением латентного параметра Z_1 , однако для более точной классификации необходимо учитывать и параметр Z_2 . Поры также оказываются локализованы в латентном пространстве, однако не выделяются на основе только Z_1 и Z_2 .

Правая панель на рисунке 5.9(b) показывает, что с помощью Z_1 и Z_2 можно оценить площадь группы солнечных пятен, хотя зависимость выглядит существенно нелинейной.

Анализ параметров Z_3 и Z_4 дает схожую интерпретацию, как для Z_2 . Обнаруживается заметная роль параметра Z_5 . На рисунке 5.10 показаны декодированные изображения, полученные для различных значений Z_1 и Z_5 , и можно видеть, что Z_5 определяет угол наклона (тилт-угол) группы.

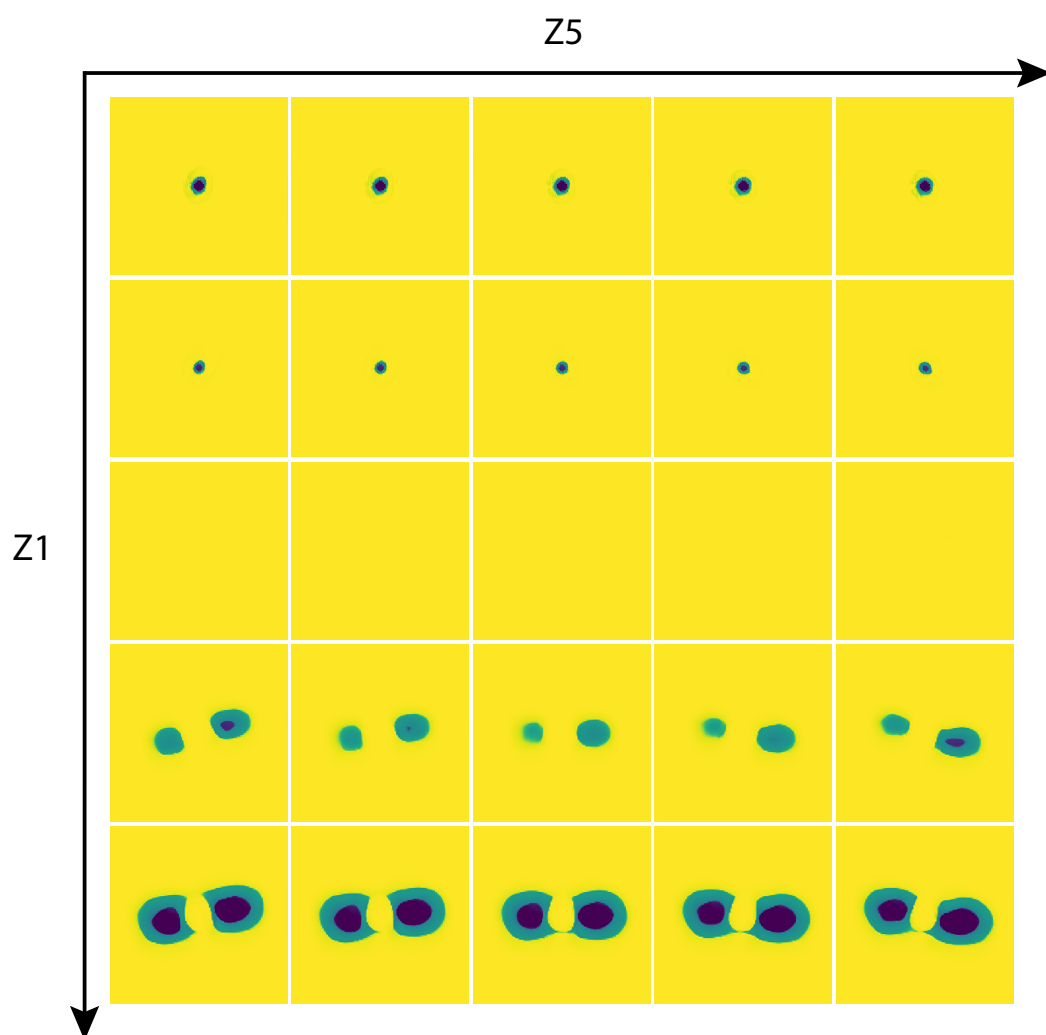


Рис. 5.10: Изображения группы солнечных пятен для различных значений скрытых характеристик Z_1 и Z_5 . Здесь параметр Z_1 варьируется от -20 до 20 с шагом 10 и Z_5 от -5 до 5 с шагом 2.5 . Рисунок из работы [114].

Широтно-временная диаграмма На рисунке 5.11 приведено сравнение широтно-временных диаграмм для параметра Z_5 и для тилт-угла, полученного стандартным способом – вписыванием линейной регрессии в группу пятен. Можно видеть, что параметр Z_5 имеет преимущественный знаки в северном и южном полушарии и эти знаки противоположны, что характерно для картины, которую дает тилт-угол. Корреляция параметра Z_5 и тилт-угла показана на рисунке 5.12.

На рисунке 5.13 показано, как выглядит закон Джоя (увеличение тилт-угла с широтой, [87]) и его аналог, построенный на основе параметра Z_5 . Оба графика хорошо согласуются между собой, и это служит примером выявления физических зависимостей непосредственно из данных.

Интерпретация последующих параметров Z_6 , Z_7 , ... становится более сложной. Например, Z_9 характеризует соотношение между размерами пятен.

С помощью вспомогательной модели можно уточнить связь между скрытыми параметрами и физическими свойствами группы и определить наиболее значимые параметры для каждого свойства. Для этого рассмотрим набор первых n главных компонент, т.е. Z_1 , Z_2 , ... и для каждого n от 1 до 285 обучим простую полносвязную нейронную сеть предсказанию какого-либо стандартного физического параметра группы (для определенности – площадь, тилт-угол, протяженность по долготе или тип группы). Составим модель из 3 скрытых слоев с 128, 64 и 32 нейронами с функцией активации ELU. Выходной слой имеет один нейрон с линейной активацией. Для задач регрессии (оценки площади, вытянутости, наклона) будем использовать среднеквадратичную функцию потерь, а для задачи классификации (однопятенная или многопятенная группа) – бинарную кросс-энтропию. Для оценки точности обученных моделей будем использовать тестовый набор групп солнечных пятен из 30% от общего объема набора данных. Для задач регрессии метрикой точности будет коэффициент детерминации R^2 , а для классификации – долю правильно классифицированных объектов (ассигасу). Обратим внимание, что наилучшая возможная оценка равна 1.0 как для R^2 , так и для оценки точности бинарной классификации. Результаты обучения моделей на различном числе скрытых параметров по-

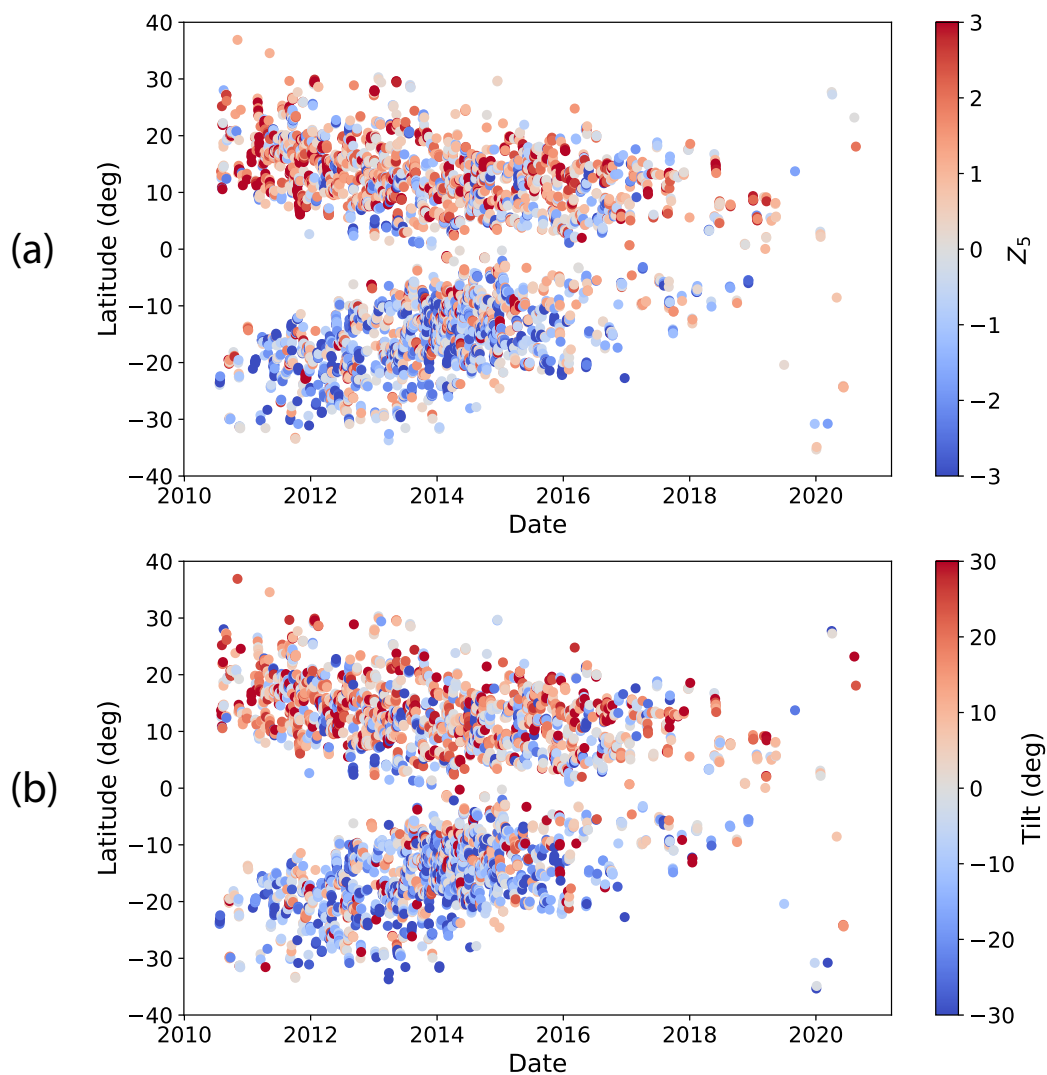


Рис. 5.11: *Верхняя панель (a):* распределение по времени-широте скрытого параметра Z_5 . *Нижняя панель (b):* распределение по широте во времени угла наклона, измеренного вписыванием линейной регрессии в группу солнечных пятен. Рисунок из работы [114].

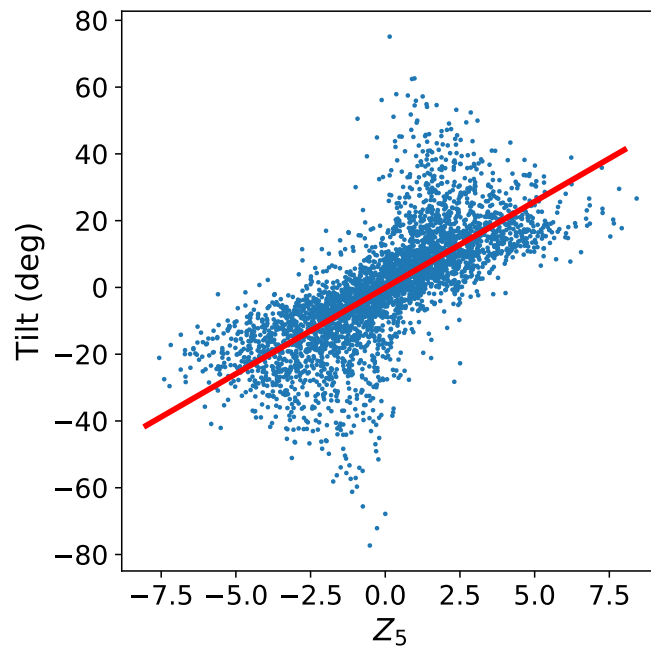


Рис. 5.12: Корреляция скрытого параметра Z_5 и угла наклона, измеренная вписыванием линейной регрессии в группу солнечных пятен. Наклон линии регрессии составляет 5.2. Рисунок из работы [114].

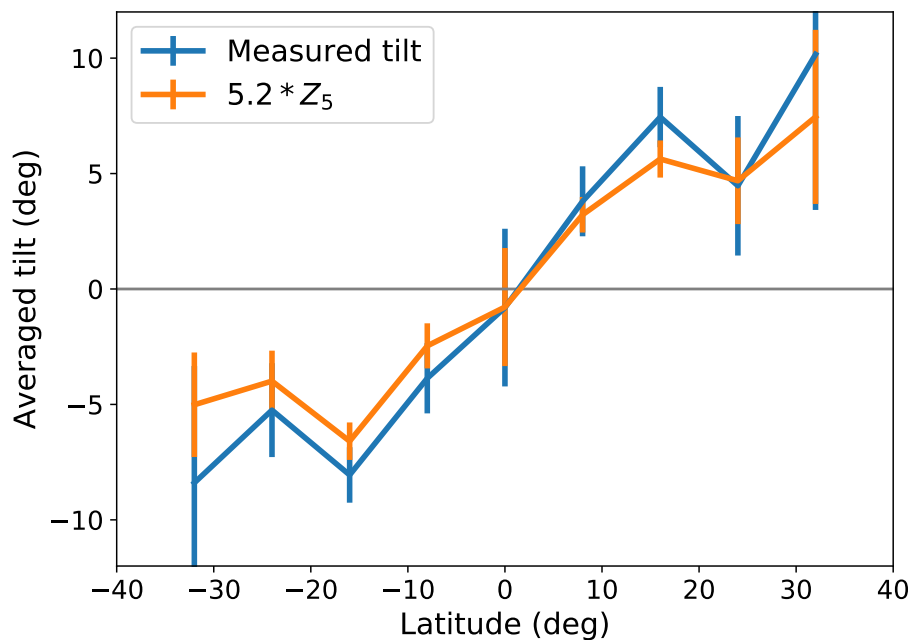


Рис. 5.13: Усредненный угол наклона в зависимости от широты. Синяя линия соответствует углам наклона, измеренным с помощью линии регрессии. Оранжевая линия показывает углы наклона, аппроксимированные скрытым параметром Z_5 . Рисунок из работы [114].

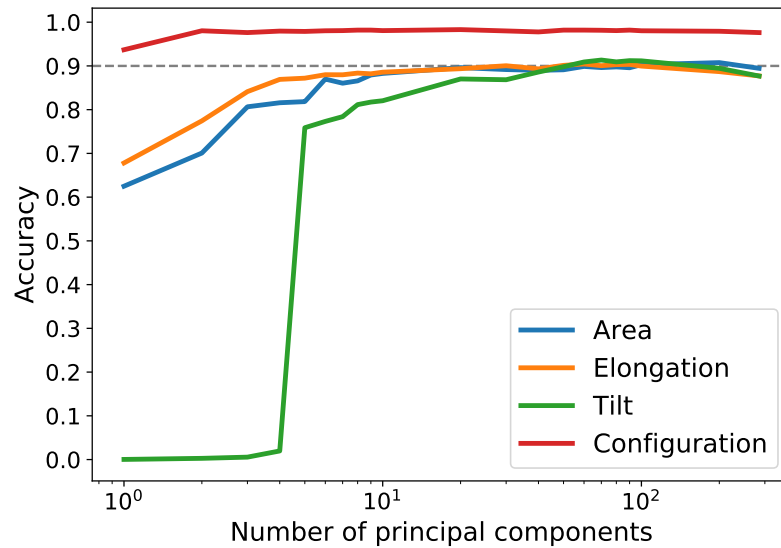


Рис. 5.14: Точность реконструкции свойств группы солнечных пятен в зависимости от количества используемых латентных параметров. Для задач регрессии (оценка площади, вытянутости и наклона) точность определяется как показатель R^2 (коэффициент детерминации). Для задачи классификации (однопятенная и многопятенная группа) оценивается доля правильно классифицированных объектов. Рисунок из работы [114].

казаны на рисунке 5.14. Можно сделать вывод, что первые 10 латентных компонент обеспечивают определение ключевых свойств группы солнечных пятен с точностью не ниже 0.8, а первые 40 латентных компонент – обеспечивают точность выше 0.9.

Таким образом, латентный вектор Z можно рассматривать как расширенное описание группы солнечных пятен, в которое встроены стандартные физические параметры групп. Возможность восстановления исходного образа группы по латентному вектору показывает полноту (с точки зрения сохранения информации о детальном строении группы) этого представления.

5.5. Оценка сложности активных областей

Рассмотрим применение модели параметризации для оценки сложности группы солнечных пятен. Очевидно, что более сложные структуры должны требовать больше компонент латентного вектора Z для точной рекон-

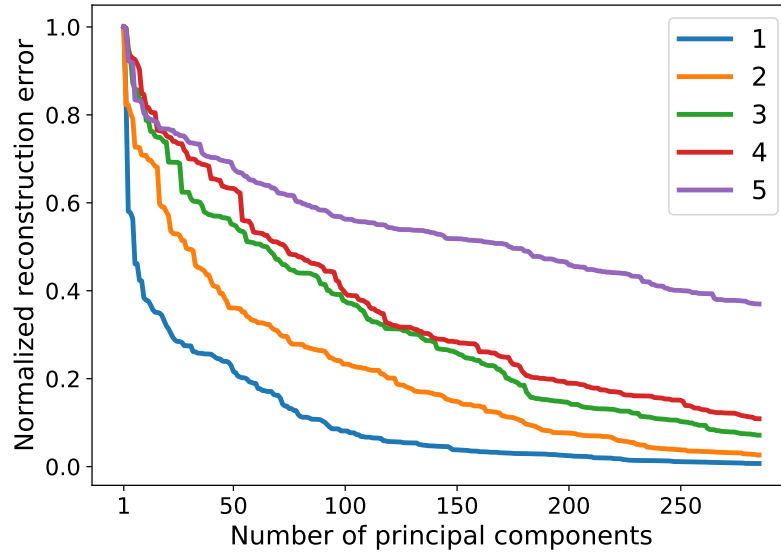


Рис. 5.15: Нормированная ошибка реконструкции для различного числа главных компонент и для изображений групп солнечных пятен, показанных в первом ряду рисунка 5.4. Цифры в цветовой легенде соответствуют положению изображения группы солнечных пятен в первом ряду рисунка 5.4. Рисунок из работы [114].

струкции. Отсюда количество компонент, при которых ошибка реконструкции становится меньше некоторого заданного уровня, можно считать оценкой сложности группы. Можно было бы измерять ошибку реконструкции, непосредственно сравнивая исходное и декодированное изображение. Однако можно и не привлекать декодировщик и оценить ошибку реконструкции через расстояние между латентным вектором μ и его проекцией на различное число главных компонент.

На рисунке 5.15 показано, как с увеличением числа используемых компонент уменьшается ошибка реконструкции для различных изображений групп пятен, показанных в первой строке рисунка 5.4. Можно заметить, что чем правее расположена группа в первом ряду рисунка 5.4, тем сложнее она выглядит и тем медленнее для нее убывает ошибка реконструкции, т.е. для сохранения деталей изображения требуется больше компонент латентного вектора. Таким образом, скорость убывания ошибки реконструкции коррелирует с визуальной оценкой сложности группы.

Количественно будем оценивать сложность группы как число компонент вектора Z , при котором ошибка реконструкции составляет половину

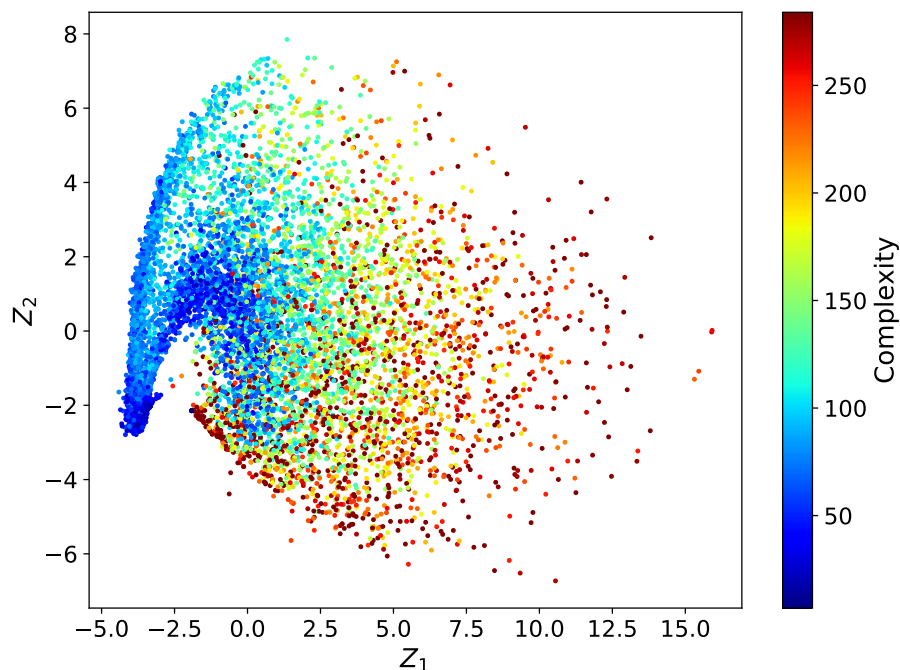


Рис. 5.16: Распределение параметра сложности группы по всем группам солнечных пятен в пространстве скрытых параметров Z_1 и Z_2 . Рисунок из работы [114].

от ошибки, получаемой при использовании одной компоненты латентного вектора. На рисунке 5.16 показано распределение измеренной сложности групп в пространстве скрытых параметров Z_1 и Z_2 . Из сравнения с рисунком 5.9 следует, что группы простой структуры (одинокое пятна и поры) имеют преимущественно низкую сложность, а чем больше площадь группы, тем выше ее сложность. Это хорошо согласуется с тем, как должен изменяться параметр сложности группы.

5.6. Модель классификации групп пятен

Латентные параметры можно использовать для классификации солнечных пятен. Для исследования этой возможности требуется база данных групп солнечных пятен, содержащая классы, например, в соответствии с системами классификации Цюриха или Макинтоша. Набор данных Кисловодской горной астрономической станции классов не содержит.

С другой стороны, классы групп солнечных пятен содержатся, напри-

Таблица 5.1: Алгоритм классификации групп пятен. Данные классы используются как референсные для обучения модели классификации на основе латентных векторов.

Класс	Кол-во пятен	Кол-во ядер	Кол-во пятен с ядрами	Размер
A	1	0	0	любой
B	≥ 2	0	0	любой
C	≥ 2	≥ 1	1	любой
D	≥ 2	≥ 2	≥ 2	$< 10^\circ$
E	≥ 2	≥ 2	≥ 2	$< 15^\circ$
F	≥ 2	≥ 2	≥ 2	$\geq 15^\circ$
H	1	≥ 1	1	любой

мер, в каталоге NOAA/USAF¹ и в каталоге обсерватории Локарно², однако для установления соответствия между ними и каталогом Кисловодской горной астрономической станции требуется отдельное исследование. Трудность состоит в том, что наблюдения в разных каталогах проводятся в разное время, за которое группа может преобразиться (особенно на ранних стадиях развития). Кроме того, различное разрешение телескопов может влиять на оценку числа пятен. Вместо этого, выполним автоматическую классификацию по правилам, заданным в таблице 5.1 по аналогии с классами в модифицированной Цюрихской системе. На рисунке 5.17 показано распределение присвоенных классов в пространстве параметров Z_1 и Z_2 .

Затем обучим простую полносвязную нейросетевую модель (подобную той, которая ранее использовалась для оценки свойств группы солнечных пятен) для предсказания классов только на основе латентных векторов. Для оценки точности модели классификации будем использовать 30% групп. Полученные метрики классификации представлены в таблице 5.2. Напомним, что точностью называется доля правильно классифицированных объектов всех классов, чувствительностью – доля правильно классифицированных объектов данного класса, а F1-score представляет собой среднее гармоническое между чувствительностью и долей правильно классифицированных объектов данного класса среди всех объектов, отнесенных к данному классу.

¹solarcyclescience.com/activeregions.html

²sunspots.irsol.usi.ch/db/

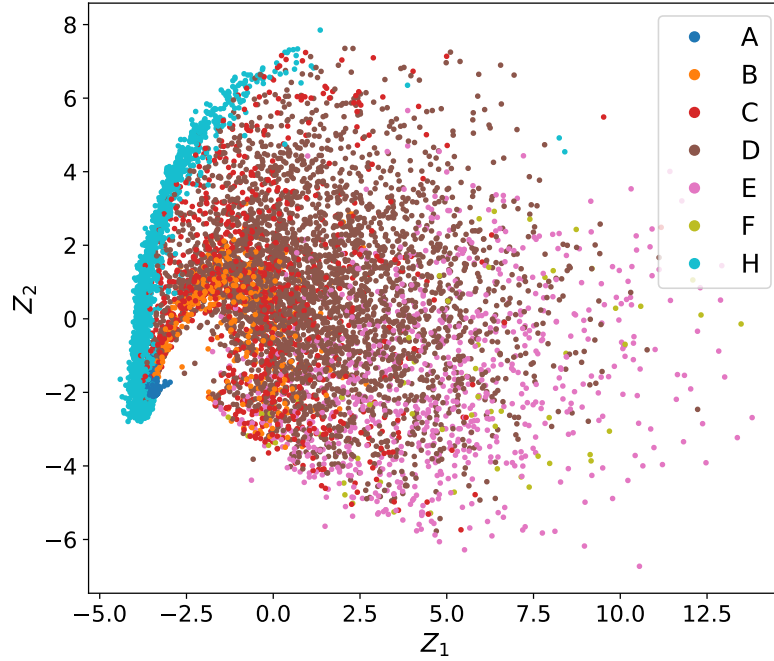


Рис. 5.17: Распределение групп солнечных пятен, присвоенных согласно таблице 5.1 в пространстве латентных параметров Z_1 и Z_2 . Рисунок из работы [114].

Средняя точность классификации составляет 0.75, однако она неравномерна по классам. Из-за существенного дисбаланса классов, у редких классов точность оказывается низкой. Кроме того, модель часто путает близкие классы (например, D и E или E и F, см. рисунок 5.18).

Отметим, что в Цюрихская классификация отражает последовательные этапы развития группы, поэтому для уточнения модели классификации необходимо учитывать предыдущие состояния группы и латентные векторы могут быть для этого полезным инструментом.

5.7. Другие приложения моделей понижения размерности

В качестве дополнительных иллюстраций приложения моделей понижения размерности рассмотрим две задачи: описание профилей спектральных линий и прогноз протонных событий.

Вначале рассмотрим задачу компактного описания профилей спек-

Таблица 5.2: Метрики точности модели классификации. Средняя точность – 0.75.

Класс	Точность	Чувствительность	F1-score	Число групп
A	0.96	0.99	0.98	199
B	0.60	0.75	0.67	167
C	0.39	0.47	0.43	315
D	0.83	0.66	0.74	961
E	0.57	0.70	0.63	252
F	0.11	0.20	0.14	15
H	0.93	0.97	0.95	641

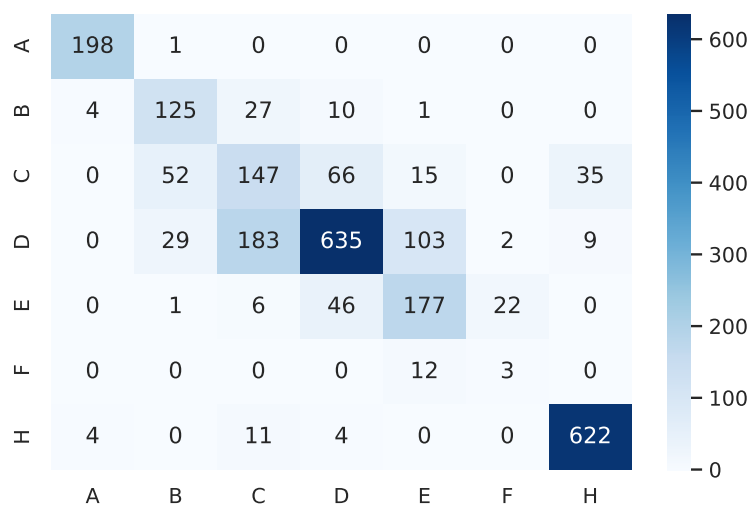


Рис. 5.18: Матрица ошибок на тестовом наборе данных. Истинные классы соответствую строкам, предсказанные – столбцам. Рисунок из работы [114].

тральных линий, получаемых с отдельных участков поверхности Солнца. Профили линий отражают распределение и динамику физических параметров (плотность, температура, скорости и т.д.) в солнечной атмосфере. Соответственно, анализ и интерпретация спектральных линий Солнца помогают в изучении физических процессов в солнечной атмосфере.

В работе [190] изучались наблюдения в линии магния Mg II k & h (2796 и 2803 Å) с орбитального спектрографа NASA Interface Region Imaging Spectrograph (IRIS, [62]). Ранее было показано, что линии магния могут служить диагностическими инструментами для исследования параметров в верхней хромосфере (см., например, [143] и [191]). Для анализа были отобраны наблюдения спокойного Солнца, выполненные спектрографом IRIS 20 апреля 2020 г. в период с 08:32 UT до 08:56 UT в центре солнечного диска. За этот промежуток времени IRIS получил более 300 000 индивидуальных профилей, некоторые примеры которых представлены на рисунке 5.19.

Спектральная линия Mg II k имеет сложную форму и в областях спокойного Солнца обычно имеет двухпиковую структуру. Расположение пиков является характеристикой состояния солнечной атмосферы [143].

После некоторой предобработки данных (подробнее см. [190]), было получено 290 940 профилей, которые затем были нормированы на одно и то же число – максимальную интенсивность пика, наблюдаемую по всем профилям линий. Первые 200 000 нормализованных профилей были отнесены к обучающему набору данных, оставшиеся 90 940 профилей – к тестовому.

Для сжатия профилей была использована нейронная сеть типа автоэнкодер. Автоэнкодер представлен полносвязной нейронной сетью с числом нейронов в слоях $110 - 64 - 32 - 16 - n_{emb} - 16 - 32 - 64 - 110$, где n_{emb} – размерность сжатого представления и она варьировалась от 1 до 15. Для всех нейронов использовалась функция активации Rectified Linear Unit (ReLU), а в качестве функции потерь использовалась среднеквадратичная ошибка (MSE). Для обучения сети использовался алгоритм оптимизации Adam [129]. Процесс обучения завершался, если среднеквадратичная ошибка на тестовой выборке не улучшалась более чем на 0,5% в течение двух последовательных эпох обучения. Весь процесс обучения повторялся пять раз для каждого n_{emb} , чтобы проверить, как начальная инициализация модели

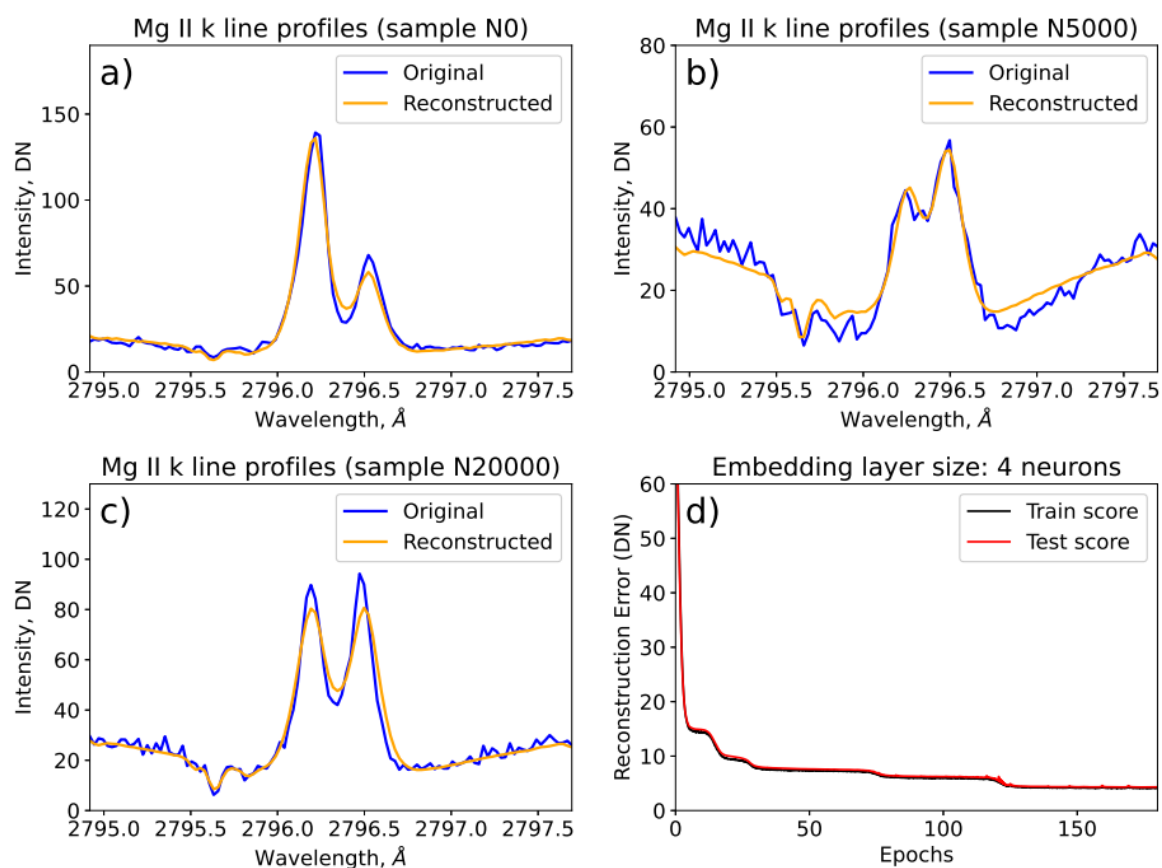


Рис. 5.19: Примеры исходных (синяя линия) и реконструированных (оранжевая линия) профилей линии Mg II k. Правая нижняя панель иллюстрирует график убывания среднеквадратичной ошибки реконструкции профилей в процессе обучения модели автоэнкодера. Рисунок из работы [190].

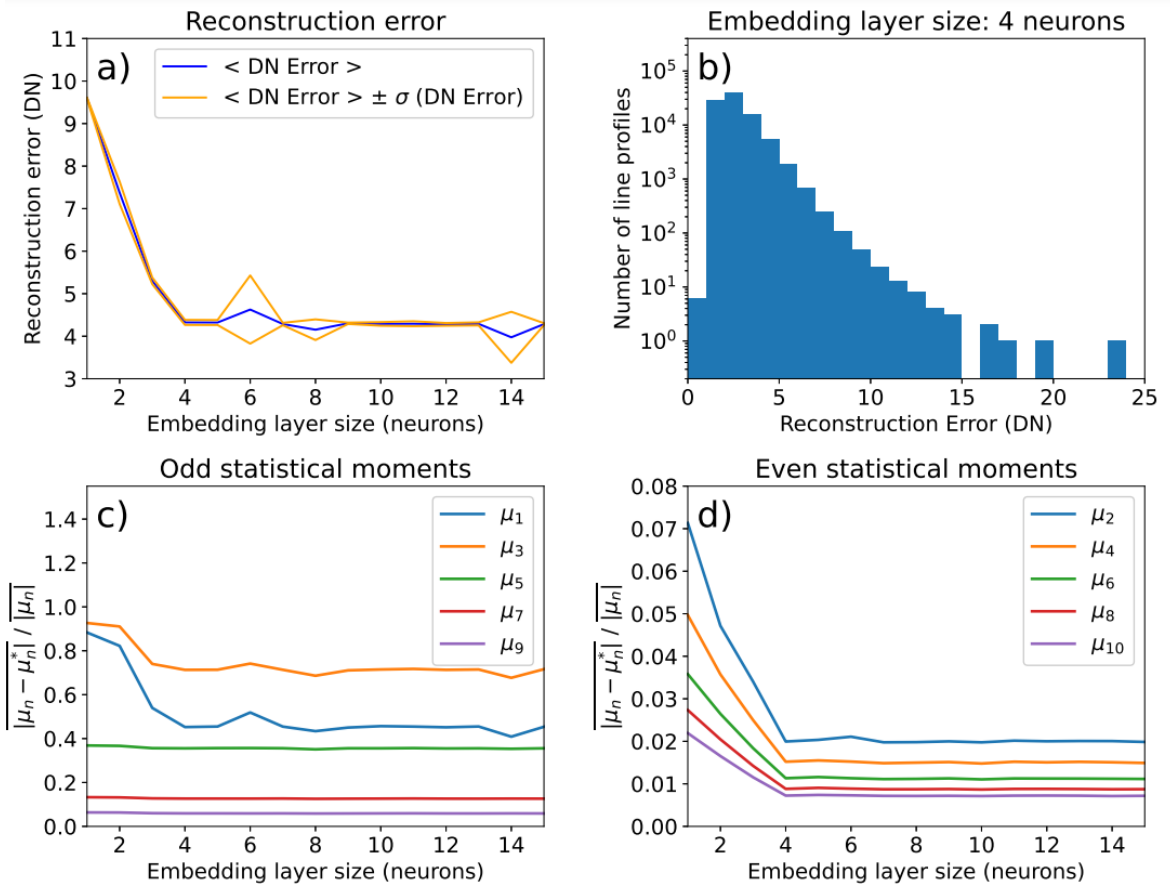


Рис. 5.20: Средняя ошибка реконструкции профиля линии в зависимости от размерности внутреннего слоя автоэнкодера n_{emb} . На левой верхней панели показана среднеквадратичная ошибка (MSE) при восстановлении профиля, на правой верхней панели показана гистограмма распределения ошибок при $n_{emb} = 4$. На левой нижней панели приведены средние ошибки реконструкции нечетных статистических моментов, на нижней правой – четных моментов. Рисунок из работы [190].

влияет на результат обучения .

На рисунке 5.19 показаны примеры восстановленных профилей линий Mg II k для $n_{emb} = 4$. Можно видеть, что модель достаточно хорошо сохраняет основные особенности профиля .

На рисунке 5.20а значения среднеквадратичной ошибки в зависимости от n_{emb} . Ошибка резко уменьшается при $n_{emb} \leq 4$ и практически перестает уменьшаться при $n_{emb} > 4$. Этим обосновывается итоговый выбор $n_{emb} = 4$ для числа латентных компонент .

Одним из основных результатов является то, что ошибка реконструкции (в терминах MSE или четных статистических моментов) не уменьшается

при $n_{emb} > 4$ (рисунок 5.20). С физической точки зрения это может соответствовать тому, что процесс формирования линии может быть описан четырьмя свободными параметрами (например, температура, плотность, макроскопическая и турбулентная скорости в случае однородной среды).

Чтобы лучше понять смысл латентных параметров для случая $n_{emb} = 4$, было проведено следующее исследование. Для начала были подсчитаны средние значения и стандартные отклонения для каждого латентного параметра на тестовом наборе данных. Далее поочередно варьируется один из параметров в пределах двух стандартных отклонений от его среднего значения, при этом остальные три параметра остаются фиксированными и равными их средним значениям, и строится ансамбль реконструированных профилей. Результат эксперимента представлен на рисунке 5.21. Как видно, в большинстве случаев обнаруживается достаточно явная интерпретация. Например, второй параметр влияет на ширину профиля линии, третий – на асимметрию профиля, четвертый – на глубину провала между двумя пиками распределения, Значение первого параметра менее очевидно, возможно, он отвечает за более тонкие детали профиля.

Отметим, что относительно хорошая реконструкция профиля линии Mg II k при $n_{emb} = 4$ может иметь ряд практических значений. Например, сжатие данных актуально в ситуациях, когда пропускные возможности канала передачи данных ограничены, например, при передаче данных со спутника на Землю. Также с помощью построенного компактного представления профилей можно осуществлять эффективный поиск схожих профилей.

В качестве второго приложения рассмотрим модель прогноза протонных событий, кратко описанную в работе [228] и более подробно – в работе [189]. События, связанные с солнечными энергичными частицами относятся к наиболее опасным явлениям солнечной активности. Предложенная модель предназначена для ежедневного прогнозирования солнечных протонных событий (СПС или solar proton events, SPE) на основе характеристик магнитных полей в активных областях Солнца, предшествующих потоков протонов и мягкого рентгеновского излучения, а также статистики радиовсплесков на Солнце.

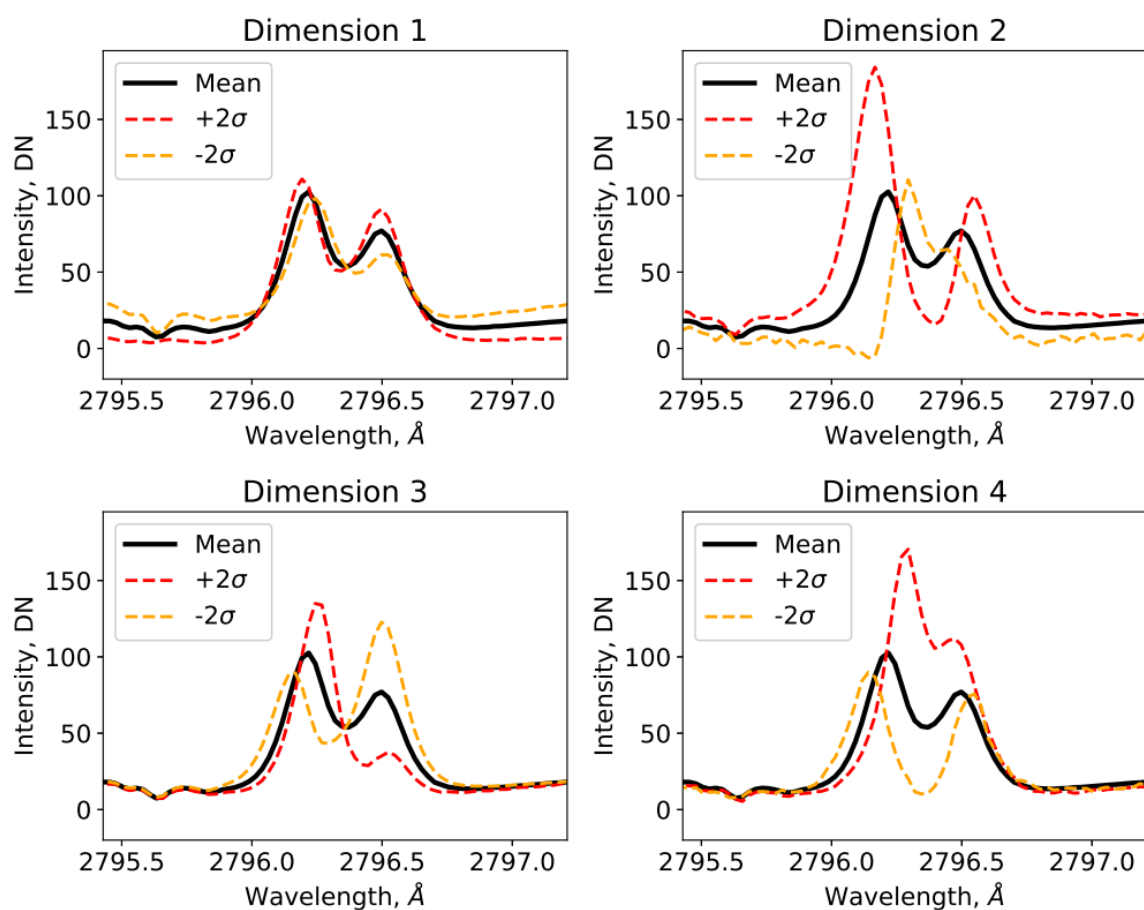


Рис. 5.21: Вариации декодированных профилей линий в результате вариации параметров скрытого представления. Черные кривые соответствуют профилям линий, восстановленным по усредненным скрытым параметрам. Красная и оранжевая кривые соответствуют ситуации, когда один из параметров на одно стандартное отклонение больше или меньше среднего значения. Рисунок из работы [190].

Согласно стандартному определению, протонными событиями называют потоки протонов с энергией $E \geq 10$ МэВ выше уровня $1 \text{ см}^{-2}\text{с}^{-1}\text{ср}^{-1}$. Прогнозирование таких явлений представляет собой сложную проблему по ряду причин. В течение 24-го солнечного цикла одно или несколько таких усилений наблюдались в среднем реже, чем 1 день из 30. Более высокие потоки или и превышение более высоких энергетических порогов наблюдаются, соответственно, еще реже. Тем самым при построении моделей прогноза возникает проблемы дисбаланса данных (см. обсуждение в работе [3]). Кроме того, СПС могут существенно запаздывать (до десятков часов) по отношению ко времени начала предшествующей солнечной вспышки. Поэтому возникает еще одна проблема – подбор горизонта прогноза для модели. В ряде случаев источник СПС на поверхности Солнца невозможно определить, особенно если активная область находится очень близко к лимбу Солнца или за ним. В этой ситуации параметры активной области не могут быть определены и, соответственно, неясно с какими характеристиками связывать протонное событие.

В качестве входных данных в модель прогноза протонных событий использовались параметры активных областей, взятые из каталога Space Weather HMI Active Region Patches (SHAPR, [29]). В этом каталоге представлены параметры активных областей, вычисляемые с периодичностью 12 минут. Из всех доступных параметров было отобрано 30, которые далее усреднялись за день для каждой области. Дополнительно, в модели прогноза использовались данные о предшествующей активности в виде суточных характеристик потоков мягкого рентгеновского излучения и потоков протонов > 10 МэВ, наблюдаемых аппаратами GOES. Поскольку число активных областей меняется день ото дня, изучались только 10 областей с самым большим беззнаковым магнитным потоком. Если число областей в конкретный день было меньше 10, то количество дополнялось до 10 областями с нулевыми параметрами.

В результате, входными данными в модель является вектор из 319 параметров для каждого дня, составленный из 300 характеристик, соответствующих активным областям (на каждую из 10 включенных областей приходится 30 значений), 10 характеристик потоков мягкого рентгеновского

излучения, 6 характеристик потока протонов >10 МэВ, а также счетчики радиовсплесков II, III и IV типа. Каждая характеристика нормируется в диапазон от нуля до единицы. Каждому вектору присваивается метка 1 или 0 в зависимости от того, было ли зарегистрировано СПС в течение следующего дня или нет. За период с июня 2010 по декабрь 2019 года 101 день был помечен как день с СПС и 3400 дней как день без СПС. Таким образом, дисбаланс классов составляет примерно 1 к 34.

В качестве модели прогноза была использована нейронная сеть, архитектура которой представлена на рисунке 5.22. Характеристики каждой активной области обрабатываются с помощью полносвязной нейронной сети (AR block), которая сводят 30 характеристик каждой активной области к двум, которые можно интерпретировать как латентное представление активной области. Тем самым, задачей сети AR block является поиск репрезентативного представления параметров активной области в двумерном пространстве. Количество нейронов в полносвязных слоях задается равным $30 - 15 - 8 - 4 - 2$.

Все активные области пропускаются через одну и ту же последовательность слоев сети AR block с общими весами, а выходы суммируются и дополняются другими суточными характеристиками – оставшимися 19 величинами из исходного вектора параметров. В результате получаем вектор размера 21 ($2+19$), который также пропускается через полносвязную нейронную сеть, с числом нейронов $21 - 15 - 10 - 5 - 2$. Выход сети состоит из двух чисел. В зависимости от того, какое число окажется больше, формируется прогноз – наступление протонного события на следующий день или его отсутствие.

Для обучения модели используется стандартная для задач бинарной классификации функция потерь – бинарная кросс-энтропия

$$loss = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i \log p_i + (1 - y_i) \log(1 - p_i),$$

где y_i – метка 0 или 1 для i -го объекта в выборке объема N , p_i – предсказанная вероятность принадлежности i -го объекта классу 1.

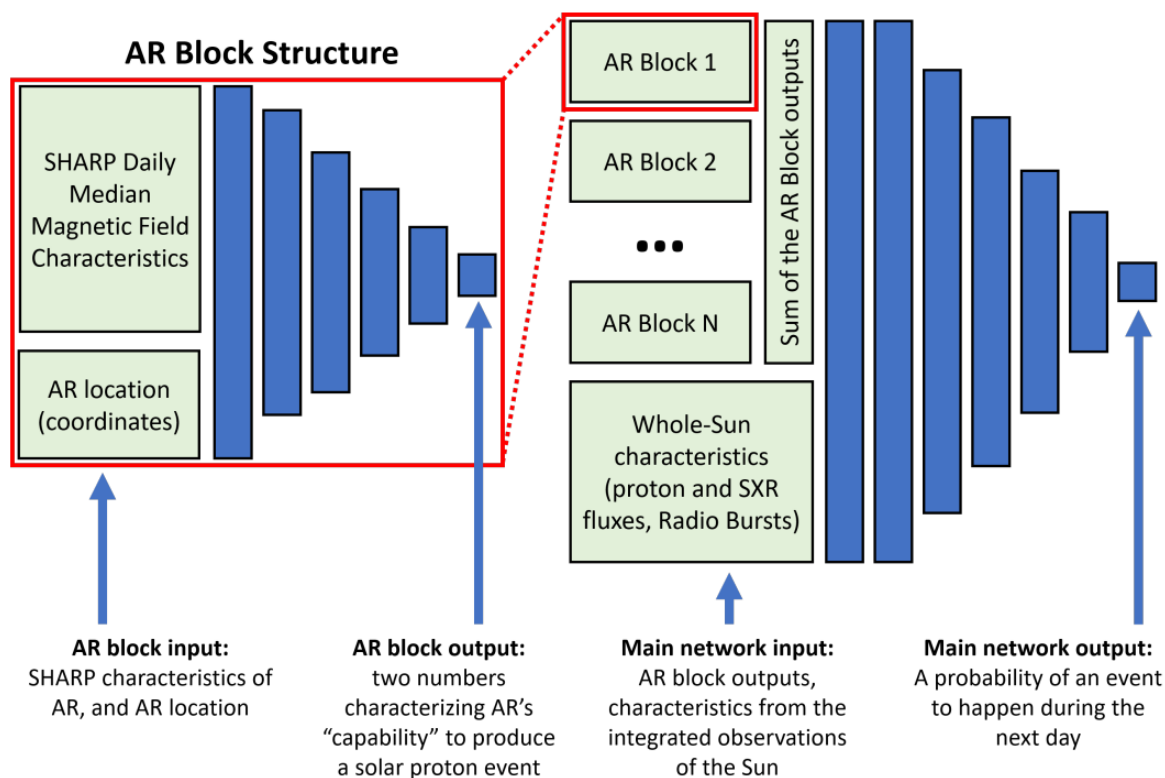


Рис. 5.22: Схема нейронной сети, предложенной для прогноза протонных событий. Рисунок из работы [228].

Для оценки качества модели бинарной классификации используется ряд метрик, на которых остановимся подробнее. Метрики строятся на основе матрицы ошибок, элементы которой удобно обозначить следующим образом:

- 1) TP (true positive) – количество правильно классифицированных объектов класса 1;
- 2) FN (false negative) – количество объектов класса 1, которым модель присваивает класс 0;
- 3) TN (true negative) – количество правильно классифицированных объектов класса 0;
- 4) FP (false positive) – количество объектов класса 0, которым модель присваивает класс 1.

Также обозначим P – количество объектов класса 1 в выборке, N – коли-

чество объектов класса 0. На основе матрицы ошибок определяется ряд стандартных метрик классификации:

- 1) чувствительность (или true positive rate, TPR) – TP/P , т.е. доля правильно классифицированных объектов класса 1 по отношению к общему количеству объектов класса 1 в выборке;
- 2) специфичность (или true negative rate, TNR) – TN/N , т.е. доля правильно классифицированных объектов класса 0 по отношению к общему количеству объектов класса 0 в выборке.

На практике важен вопрос о том, насколько хорошо сбалансированы чувствительность и специфичность модели. Для оценки этого используется ряд составных метрик (см., например, [28]). Одна из них – True Skill Statistics (TSS), которая определяется как

$$TSS = TPR + TNR - 1,$$

и по сути представляет собой сумму чувствительности и специфичности. Вычитание единицы введено для удобства, чтобы максимальное значение метрики равнялось единице. Другой пример составной метрики – Heidke Skill Score (HSS), которая вводится двумя разными способами ([28]). Первый вариант, HSS1, определяется как

$$HSS1 = \frac{TP + TN - N}{P} = TPR \times \left(2 - \frac{1}{PPV}\right),$$

где PPV (precision, positive predictive value) определяется стандартным образом

$$PPV = \frac{TP}{TP + FP}.$$

Другой вариант, используемый в частности, Space Weather Prediction Center (SPWC), основан на том, чтобы отнести точность исследуемой модели к точности модели, дающей случайные предсказания с той же частотой предсказанных 1 и 0, что и исследуемая модель. Метрика строится следующим образом. Вначале рассматривается стандартная метрика – точность

модели (ассурасу):

$$ACC = \frac{TP + TN}{P + N},$$

которая показывает общую долю правильно классифицированных объектов (или вероятность получить правильный прогноз). Далее, пусть x – истинная метка объекта, $\hat{x}$ – прогноз исследуемой модели. Тогда вероятность получить правильный прогноз случайной моделью выражается следующим образом:

$$E = P(x = 1)P(\hat{x} = 1) + P(x = 0)P(\hat{x} = 0).$$

В терминах матрицы ошибок получаем:

$$E = \frac{P}{T} \times \frac{TP + FP}{T} + \frac{N}{T} \times \frac{TN + FN}{T},$$

где $T = P + N$ – размер выборки. Значение HSS2 определяется как

$$HSS2 = \frac{ACC - E}{1 - E}.$$

Роль 1 в знаменателе формулы – максимальное значение величины ACC .

Отметим, что для бинаризации выхода нейросетевой модели используется пороговое значение. Обычно его берут равным 0.5, однако варьируя этот порог, можно влиять на метрики модели не изменяя саму модель. Для оценки влияния порога рассматривается кривая Receiver Operating Characteristic (ROC). ROC-кривая показывает, как изменяется TPR и TNR при изменении порогового значения от 0 до 1. Площадь под графиком ROC-кривой является еще одной важной характеристикой модели и обозначается ROC-AUC (area under curve).

В работе [189] рассматривается еще одна дополнительная метрика – Weighted True Skill Statistics (WTSS). (WTSS), которая определяется как:

$$WTSS(\alpha) = 1 - \frac{2}{\alpha + 1} \left(\alpha \frac{FN}{P} + \frac{FP}{N} \right).$$

Идея построения этой величины – ввести дополнительный штраф за пропуск событий с меткой 1, что в аспекте рассматриваемой задачи означает

Метрика	ML модель	SWPC NOAA	Базовая модель
HSS1	0.377 ± 0.028	0.571	0.314
HSS2	0.635 ± 0.008	0.748	0.647
ROC-AUC	0.959 ± 0.001	0.919	-
Cross-entropy loss	0.273 ± 0.006	0.461	-
TSS	0.820 ± 0.006	0.786	0.647
WTSS(2)	0.803 ± 0.005	0.758	0.536
WTSS(5)	0.857 ± 0.004	0.765	0.425
WTSS(10)	0.920 ± 0.004	0.817	0.375

Таблица 5.3: Метрики точности ML модели в сравнении с прогнозом SWPC NOAA и прогнозом базовой модели. Значения из работы [189].

пропуск протонного события. Отметим, что $WTSS(1) = TSS$.

Предложенная в работе [189] модель машинного обучения сравнивается с ежедневными оперативными прогнозами SWPC NOAA и прогнозом базовой модели, для которой прогноз на следующий день совпадает с наблюдением в текущий день. Полученные метрики моделей приведены в таблице 5.3. По этим результатам можно сделать вывод, что выбор лучшей модели (прогноз, получивший наибольшую оценку) зависит от выбранных метрик. Например, прогноз SWPC NOAA превосходит прогноз на основе ML по метрикам HSS1 и HSS2. Однако практически по всем остальным метрикам (включая оценку TSS) ситуация обратная – прогноз на основе ML оказывается лучше прогноза SWPC. Базовая модель показывает худшие результаты практически во всех случаях.

На рисунке 5.23 представлено качество построенного классификатора (модели прогноза протонных событий) в сравнении в моделью прогноза SWPC NOAA. Видно, что основное различие между двумя ROC-кривыми наблюдается в области высоких значений TPR. Здесь прогноз на основе ML превосходит прогноз SWPC NOAA.

Другим способом сравнения прогнозов является рассмотрение вероятностей во времени для конкретных событий. На рисунке 5.24 показана сравнение прогноза SWPC NOAA и прогноза на основе ML во время протонных событий в сентябре 2017 года. На графике зелеными прямоугольниками отмечены два крупных протонных события за этот месяц. Видно, что про-

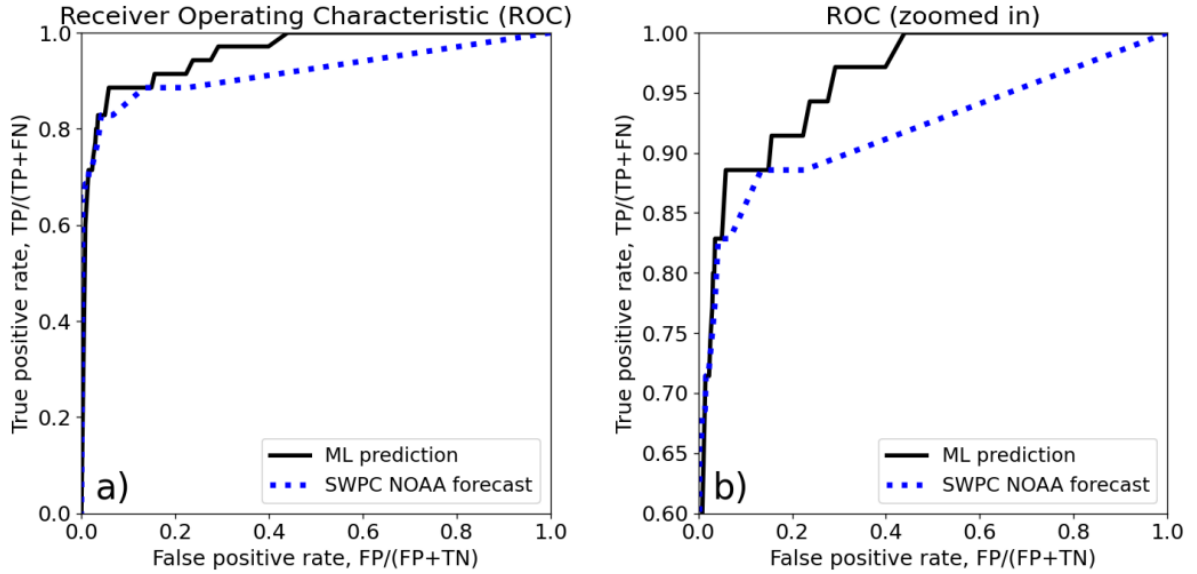


Рис. 5.23: (а) ROC-кривые для прогноза на основе машинного обучения (черная сплошная линия) и для прогноза SWPC NOAA (синяя пунктирная линия). На панели (b) представлена увеличенная версия тех же ROC-кривых кривых. Рисунок из работы [189].

гноз SWPC NOAA реагирует на оба события с задержкой в один день, в то время как прогноз ML хорошо отражает начало первого события, и соответствующая вероятность не сильно падает в начале второго события.

Более детальный анализ проблемы прогноза событий, связанных с потоками энергичных частиц, был сделан в работах [154] и [4]. Так, в работе [154] изучалась статистическая связь между параметрами активной области и потоком солнечных энергетических частиц (Solar Energetic Particle, SEP) и было показано, что наибольшая связь обнаруживается между потоком и сложностью конфигурации магнитного поля, долготой, площадью и типом полутени максимального пятна в активной области. В работе [4] были изучены различные подходы на основе машинного обучения для прогноза протонных событий на расширенном периоде времени, охватывающем 22–24 солнечных циклы. Вопросы прогнозирования солнечных вспышек и фоновых потоков рентгеновского излучения с помощью методов машинного обучения изучались в работе [252].

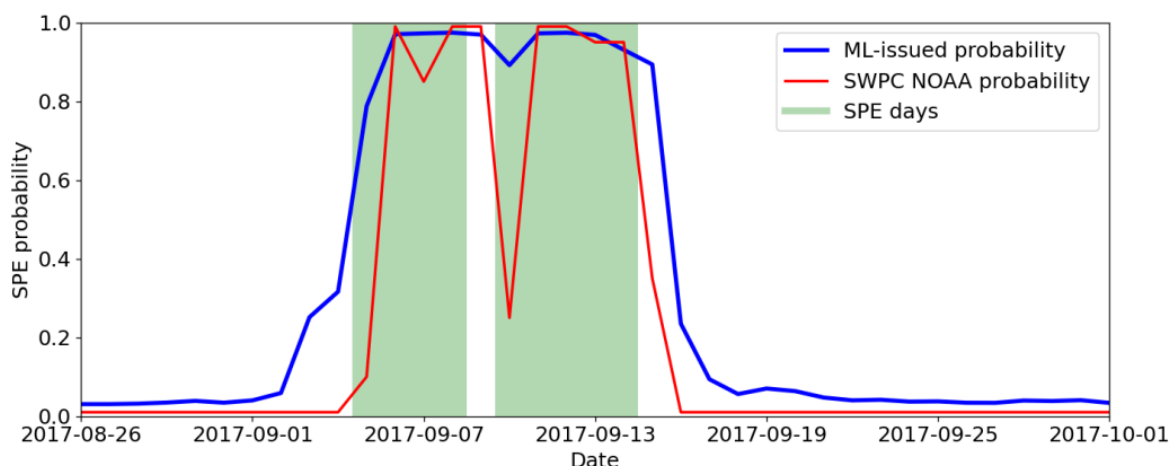


Рис. 5.24: Прогноз вероятности SPE по времени для временного периода 26 августа – 1 октября 2017 г. Красная линия соответствует вероятности SPE, полученной SWPC NOAA, синяя линия соответствует вероятности, полученной моделью машинного обучения. Зеленые прямоугольники отмечают фактические времена наступления SPE. Рисунок из работы [189].

5.8. Выводы

В работе изучался вопрос расширения набора базовых параметров, описывающих строение группы солнечных пятен, до более полного, передающего тонкие детали и позволяющего реконструировать исходных образ группы. Этот вопрос был сформулирован как задача поиска низкоразмерного представления данных – изображений групп солнечных пятен, наблюдаемых в белом свете. Для решения была предложена комбинация модели машинного обучения на основе сверточного вариационного автоэнкодера (VAE) и метода главных компонент (PCA). В качестве данных использовался каталог групп солнечных пятен Кисловодской горной астрономической станции.

В работе было показано, что для восстановления структуры группы любой сложности достаточно 285 параметров, которые отбираются методом главных компонент из скрытого слоя автоэнкодера (выхода кодировщика). Анализ полученных параметров показал, что некоторые из них допускают простую физическую интерпретацию. Так, первый по значимости параметр определяет конфигурацию группы: однопятенную или многопятенную. Отдельные последующие параметры отвечают за размер и вращение группы.

Таким образом, полученный набор является расширением набора стандартных параметров группы солнечных пятен.

Полученная модель может быть применена к группам солнечных пятен, наблюдаемых с помощью различных инструментов, поскольку входными данными являются контуры тени и полутени солнечных пятен. В дальнейшем представляет интерес обработка исторических наблюдений и применение методики к спутниковым данным высокого разрешения, полученным с телескопа SDO [196].

Обсудим связь между моделями VAE и PCA и то, почему их совместное применение оказывается полезным.

При применении одной только линейной модели PCA к изображениям требуется около тысячи компонент для получения реконструкции, сопоставимой по точности с той, которая получается при совместном использовании нелинейной модели VAE и линейного преобразования PCA. В последнем случае оказывается достаточно использовать только 285 компонент.

Кроме того, как и ожидается из теории, применение PCA к данным высокой размерности (напрямую ко входным изображениям) приводит к неустойчивым латентным признакам. В частности, небольшие вариации компонент латентного вектора приводят к появлению шума при реконструкции. При последовательном использовании нелинейной и линейной модели параметры оказываются более устойчивы и, как следствие, лучше интерпретируемы.

Интересно отметить, что нелинейную модель автоэнкодера можно рассматривать как обобщение линейной модели PCA. Действительно, заменяя все нелинейные активации в нейросетевой модели автоэнкодера на линейные, модель сводится к линейной. В работе [19] было показано, что линейная нейросетевая модель формирует такое же латентное пространство, как и модель PCA. Более того, в работе [21] было показано, что с помощью соответствующей регуляризации может быть восстановлен базис главных компонент в латентном пространстве. Можно предположить, что используя подход, предложенный в работе [21], можно исключить явную модель PCA из модели параметризации и встроить ее в единую нейросетевую модель.

Применение в работе более сложной модификации обычной модели автоэнкодера (АЕ), а именно, модели вариационного автоэнкодера, также позволило сократить число компонент латентного вектора и получить более компактное представление. Дополнительные эксперименты показали, что для объяснения 95% общей дисперсии данных с помощью комбинации моделей АЕ и РСА требуется около 750 латентных компонент, в то время как с использованием архитектуры VAE+РСА для достижения того же показателя достаточно 285 компонент.

Наконец отметим, что вводя дополнительные связи между кодирующей и декодирующей частями нейросетевой модели автоэнкодера (так называемые *skip-connections*), возникает другая распространенная архитектура, называемая U-net. Эта модель широко используется для сегментации изображений и, например, была применена для обнаружения корональных дыр на изображениях солнечного диска и синоптических картах в работах [116] и [113].

В работе было показано, что более просто устроенные группы пятен, например, состоящие из одного пятна, требуют для реконструкции меньше компонент, чем многопятенные группы. На основе этого наблюдения был предложен метод количественной оценки сложности группы. Темой дальнейшего исследования может стать изучение связи между сложностью группы, динамикой ее изменения и, например, солнечными вспышками.

Наконец, на основе полученного параметрического описания была предложена модель классификации групп солнечных пятен по модифицированной Цюрихской системе и показана достаточно высокая точность. В дальнейшем представляет интерес сопоставить стандартную систему классификации и результат кластеризации групп пятен на основе латентных признаков. Это позволит прояснить вопрос о том, насколько стандартные системы классификации обусловлены распределениями данных. Дополнение входных данных информацией о распределении магнитного поля позволит разработать модель магнитно-морфологической классификации групп солнечных пятен.

Предложенный подход выглядит достаточно универсальным и может быть перенесен на исследование других объектов солнечной активности.

Исходный код для обучения модели, а также набор данных групп солнечных пятен и полученные латентные векторы доступны в открытом репозитории GitHub github.com/observethesun/sunspot_groups.

В работе было рассмотрено несколько дополнительных приложений идеи понижения размерности признакового пространства исходных объектов. В качестве первого примера была рассмотрена модель параметризации профилей спектральных линий областей спокойного Солнца в линии MgII k, полученных с аппарата IRIS. К основным выводам работы [190] следует отнести:

- данные о спектральном профиле можно сжать данные более чем в 27 раз без существенной потери информации;
- среднеквадратичная ошибка реконструкции резко уменьшается при сжатии в латентное пространство размерности 4 и почти не уменьшается при выборе большей размерности;
- признаки, полученные для размерности 4, имеют вполне понятную физическую интерпретацию. Было показано, что три из четырех выделенных признаков определяют ширину линии, асимметрию и глубину минимума между двумя максимумами профиля.

В качестве второго примера была рассмотрена модель прогноза протонных событий, в которой модель сжатия использовалась для низкоразмерного описания активных областей. Прогноз строился с помощью нейронной сети на основе характеристик магнитных полей в активных областях на диске Солнца, протонного потока, потоков мягкого рентгеновского излучения, а также количества радиовсплесков различных типов. Основные результаты исследования [189] заключаются в следующем:

- для бинарного прогноза качество прогноза определяется рядом метрик и при построении модели приходится идти на компромисс, уделяя больше внимание одним метрикам, и меньше внимание другим;
- наиболее значимыми для прогноза протонных событий оказались характеристики предшествующего потока протонов, характеристики

потока мягкого рентгеновского излучения, а наименее значимым – количество радиовсплесков;

- исключение информации об активных областях и радиовсплесках дает возможность строить оперативный прогноз только на основе наблюдений GOES, причем без существенного снижения точности;
- предложенная модель прогноза оказывается более эффективной, чем модель прогноза SWPC NOAA в ситуациях, когда пропуск события менее желателен, чем ложноположительный результат.

Общим выводом из рассмотренных приложений является то, что методы понижения размерности позволяют получать компактный набор параметров, который сохраняет физическую интерпретацию и при этом позволяет повысить точность последующих моделей, использующих этот набор в качестве описания объекта.

Глава 6.

Восстановление параметров солнечной активности по архивным данным

Несмотря на целый ряд неоднозначностей, возникающих при обработке и интерпретации исторических данных, они являются единственным прямым свидетельством о характере солнечной активности в долгосрочном периоде. В диссертационной работе будет рассмотрено два примечательных периода солнечной активности – минимум Дальтона в начале 19 века и менее выраженный минимум, приходящийся на начало 20 века. За основу будет взято два источника данных, ранее систематически не изучавшихся по причине того, что данные не были приведены в цифровой вид, пригодный для анализа. В обоих случаях данные до сих пор хранились в виде отсканированных многостраничных рукописных каталогов. Ручная оцифровка представляется крайне трудоемкой и во-многом субъективной, поэтому встает вопрос о разработке методов автоматической оцифровки.

Для оцифровки каталогов Цюрихской обсерватории, содержащих наблюдения за начало 20 века, будет построена и обучена нейросетевая модель для расшифровки символов рукописного текста. Во-многом этому будем способствовать устойчивая структура каталогов. В отношении данных за более ранний период – начало 19 века – проблема восстановления ока-

зывается существенно более деликатной и поэтому обсуждается отдельно.

Одна из трудностей, которая проявится в задаче автоматической оцифровки методами машинного обучения, станет проблема создания обучающего набора данных достаточного объема. Эта трудность, конечно, является характерной широкого круга задач и моделей, однако степень ее проявления различна. В данной работе, как выяснится, стандартный подход по созданию обучающего набора данных оказывается недостаточным. В дополнение к нему будет предложен новый подход по обучению модели на искусственных вспомогательных задачах, которые не требуют участия экспертов в создании обучающей выборки. При этом решение этих вспомогательных задач приводит к решению основной задачи. В контексте современного машинного обучения этот подход можно сопоставить с подходом по созданию так называемых фундаментальных моделей машинного обучения (см. обзор [30]).

6.1. Оцифровка каталогов Цюрихской обсерватории

Каталоги Цюрихской обсерватории, составленные под руководством Альфреда Вольфера, покрывают период с 1883 по 1936 год. В программу наблюдений входило составление подробных зарисовок солнечного диска с изображением солнечных пятен, факелов и протуберанцев и одновременного измерения по этим зарисовкам их координат. Результаты собирались в табличные каталоги, которые сегодня доступны в виде отсканированных страниц на сайте <https://www.e-manuscripta.ch>. Ссылки на каталоги приведены в таблице 6.1.

Целью данного раздела будет построение и обучение нейросетевой модели для распознавания рукописного текста, оцифровка каталогов Цюрихской обсерватории и создание базы данных восстановленных координат пятен, факелов и протуберанцев. Полученная база данных свяжет ранние наблюдения Шпёрера с более поздними рядами данных 20-го века и дополнит каталоги групп солнечных пятен Гринвичской обсерватории. Изложе-

Таблица 6.1: Ссылки на каталоги Цюрихской обсерватории с табличными данными измеренных координат пятен, факелов и протуберанцев. Курсивом отмечены те каталоги, которые не обрабатывались в данной работе.

Годы	Ссылка
<i>1883–1884</i>	<i>https://doi.org/10.7891/e-manuscripta-48582</i>
1887–1892	https://doi.org/10.7891/e-manuscripta-48586
1893–1898	https://doi.org/10.7891/e-manuscripta-48585
1899–1902	https://doi.org/10.7891/e-manuscripta-48587
1903–1905	https://doi.org/10.7891/e-manuscripta-48583
1906–1910	https://doi.org/10.7891/e-manuscripta-48850
1911–1915	https://doi.org/10.7891/e-manuscripta-48849
1916–1920	https://doi.org/10.7891/e-manuscripta-48848
<i>1921–1925</i>	<i>https://doi.org/10.7891/e-manuscripta-48851</i>
<i>1926–1930</i>	<i>https://doi.org/10.7891/e-manuscripta-49040</i>
<i>1931–1935</i>	<i>https://doi.org/10.7891/e-manuscripta-49038</i>
<i>1937–1938</i>	<i>https://doi.org/10.7891/e-manuscripta-49039</i>

ние будет следовать работе [111].

Отметим, что за период 1885–1886 годов в электронной библиотеке *e-manuscripta* каталоги наблюдений отсутствуют. Также отсутствуют и отдельные рисунков за эти годы. Альфред Вольфер в книге [231] объясняет этот перерыв необходимостью работ по улучшению телескопа.

Первая книга 1883–1884 годов содержит информацию только о пятнах, вторая книга 1887–1892 годов уже содержит положения и пятен, и факелов. Первая запись о протуберанцах встречается 17 июля 1888 года. С этого же времени наблюдения разных типов объектов начинают записываться разными цветами чернил. Положения солнечных пятен даются черными чернилами, положения факелов – синими, а протуберанцев – красными. В дальнейшем вернемся к цветам чернил и обсудим модель определения цвета. В 1891 году наблюдения, по-видимому, были прерваны на короткое время с 31 июля по 19 сентября, поскольку в оцифрованной версии каталога отсутствуют страницы за этот период.

В каталоги заносились измерения отдельных солнечных пятен, однако для скоплений двух или более мелких пятен обычно указывалась одна координата (вероятно, центра такого скопления). В таблицах можно встре-

тить некоторые типичные сокращения, например, "kl" от слова "klein" (с немецкого – маленький), "Gr kl Fl" от слов "Gruppe kleiner Flecken" (группа из маленьких пятен), "Hoff" от слова "Hoffleck" (пятно с полутенью), "kl Hoff" от слов "kleiner Hoffleck" (маленькое пятно с полутенью), "Kernff" от слова "Kernfleck" (полутень с несколькими ядрами). Иногда появляются пометки типа "ohne Hof" (без полутени).

Методика наблюдений была описана Альфредом Вольфером в работе [232]. Телескоп представлял собой 16-см рефрактор с фокусным расстоянием 2,63 м. Солнечное изображение проецировалось на белый экран за окуляром и имело диаметр около 50 см. Перекрестие в окуляре также проецировалось и использовалось для определения экранных расстояний.

Для перевода координат использовалась процедура, предложенная в работе [205]. Сначала определяются полярные координаты на солнечном диске, затем гелиоцентрические эклиптические координаты, которые затем преобразуются в гелиографические координаты. Поскольку в то время это требовало больших вычислительных затрат, были созданы вспомогательные таблицы для различных этапов вычислений, и наблюдатели использовали эти таблицы для интерполяции "на глаз".

На рисунке 6.1 показан пример страницы из каталога наблюдений. Ключевыми элементами страницы являются дата и время наблюдений и шесть столбцов с координатами, обозначенными как β , λ' , $\lambda + k$, b , l , и L . Столбцы b и L обозначают гелиографическую широту и долготу. Остальные столбцы представляют собой координаты во вспомогательных системах координат.

Следует отметить, что гелиографическая долгота L измерялась на основе фиксированной угловой скорости, принятой 14.2665 градусов/день [232], что соответствует периоду вращения 25.2339 суток. Это значение немного меньше, чем современное значение, используемое, например, сервисом JPL Horizons <https://ssd.jpl.nasa.gov/horizons/>, которое составляет 25.38 суток.

Между столбцами таблицы существуют определенные взаимосвязи. Так, для каждой конкретной даты и времени наблюдения сумма столбцов λ' и $\lambda + k$ постоянна по модулю числа 360, также как и разность столбцов L и l постоянна по модулю 360. Также $\sin b = \sin \beta \sin(\omega + i) / \sin \omega$, где

6851

Latitude Longitude

Date and time

1916	Objekt	$\frac{p}{R}$	ρ'	ρ	$\rho + \eta$	β	λ'	$\lambda + k$	b	l	L	B	H
				84.2	71.4	-1.4	+87.2	32.0	+4.5	32.0	200.1	1.5	-
				80.4	47.6	+2.4	87.2	32.0	8.2	32.3	200.4	0.2	-
				67.3	76.5	13.5	87.2	32.0	17.4	33.1	201.2	4.0	-
I 7.957	108 a Promell					-11.8	-40.0	163.6	-18.2	162.0	317.2		
	a ue					-11.0	-37.2	161.8	-17.6	161.1	316.8		
	b ue					-12.5	-31.9	154.5	-18.2	153.2	307.4		
	d ue					-12.6	-30.2	152.8	-17.2	151.8	307.5		
	3 a Promell					-12.0	+13.0	109.6	-14.3	108.1	262.8		
	e ue					-7.6	14.2	108.4	-11.2	107.1	262.8		
	7 ue					+38.1	12.2	110.4	+25.4	115.2	270.7		
	4 a Promell					11.0	24.8	87.8	11.2	87.2	244.9		
	e ue					12.5	37.6	85.0	13.4	86.5	242.2		
	6 ue					14.6	45.2	77.4	16.1	79.2	234.9		
	A 1					+18.0	-43.0	205.6	+11.2	204.8	0.5		
	2					21.2	-80.0	202.6	14.2	201.2	357.4		
	3					23.9	-77.0	201.6	13.4	200.2	356.4		
	4					15.0	-78.6	201.2	8.5	200.2	356.4		
	5					18.0	-75.0	202.6	11.8	201.8	2.5		
	6					23.0	-76.0	198.6	16.4	197.2	352.4		
	7					22.0	-74.2	177.8	15.4	176.4	352.3		
	8					28.0	-76.0	196.6	21.4	195.8	351.5		
	9					28.8	-45.8	172.4	22.0	171.8	347.5		
	10					27.0	-65.2	182.8	22.1	182.4	343.1		
	11					26.8	-66.0	188.6	17.7	188.1	342.8		

Sunspots Prominences

Faculae

Рис. 6.1: Основные элементы структуры страницы каталога (показана только верхняя половина страницы). Зеленые рамки показывают дату и время наблюдения и две колонки с гелиографической широтой и долготой. Красная рамка содержит координаты протуберанцев, черная рамка – координаты солнечных пятен, синяя рамка – факелов. Рисунок из работы [111].

$\tan \omega = \tan \beta / \cos(\lambda + k)$ и $i \approx 6.96^\circ$ – наклон солнечной эклиптики. Вывод этих соотношений можно найти в работе [205]. Приведенные выше соотношения между столбцами будут играть принципиальную роль для тонкой настройки модели распознавания чисел.

На рисунке 6.1 можно заметить, что все числа приведены с точностью до одной десятой. Это справедливо для всех каталогов, кроме части самых ранних, где координаты солнечных пятен давались с точностью до одной сотой, и позволяет не включать символ точки в модель распознавания.

Перейдем к описанию модели распознавания символов и восстановления координат.

6.1.1. Процедура автоматического распознавания рукописных каталогов Цюрихской обсерватории

Общая процедура выглядит следующим образом:

- Определение разметки страницы (вертикальные и горизонтальные линии, образующие таблицу);
- Первоначальное распознавание чисел в ячейках таблицы с помощью предварительно обученной нейросетевой модели;
- Определение цвета шрифта;
- Вывод линейных отношений между столбцами λ' , $\lambda + k$, l и L ;
- Постраничное автоматическое дообучение нейросетевой модели для повышения точности распознавания;
- Оценка уверенности модели в распознанных символах;
- Постобработка результатов для получения наиболее вероятной интерпретации.

Далее опишем каждый этап более подробно.

6.1.2. Настройка базовой модели распознавания рукописного текста

Первым делом необходимо обнаружить все вертикальные и горизонтальные линии и различить толстые и тонкие линии, разделяющие серии наблюдений и отдельные наблюдения. Обратим внимание, что положение и интервалы между линиями не одинаковы от страницы к странице, поэтому каждая страница должна обрабатываться индивидуально.

Сначала переведем страницу в градации серого, затем применим фильтр Канни [39] для выделения контрастных границ. Для устранения мелких артефактов применяется сглаживание с помощью фильтра Гаусса. Для обнаружения горизонтальных линий применяется свертка изображение с горизонтальным ядром, а затем проводится суммирование значений интенсивности пикселей по строкам. В полученном массиве горизонтальные линии выглядят как ярко выраженные пики, которые можно легко идентифицировать. Конечно, для получения надежной процедуры необходимо аккуратно подобрать настройки фильтров, размеры ядра и порог пика. К счастью, удастся подобрать такой набор параметров, который стабильно работает для большинства страниц. Отдельные сложные случаи корректируются вручную. На рисунке 6.2 показан пример разметки вертикальных линий.

После того как разметка страницы определена, можно выделить отдельные ячейки таблицы, и далее эти ячейки будут использоваться в качестве входных данных для модели распознавания текста. Для удобства приведем масштаб всех ячеек к стандартному размеру 64×32 пикселей.

Следующий шаг состоит в построении модели сверточно-рекуррентной нейронной сети (CRNN, [198]). Входом в модель является изображение размером 64×32 пикселей. Выходным значением будет массив размером 64×12 , который будет называться тепловой картой. В ней будет содержаться оценки вероятностей для 12 классов, которые модель может распознать в тексте: '0', '1', ..., '9', знак минус '—' и специальный символ '*', который предназначен для разделения основных символов.

Архитектура модели составлена из трех последовательных блоков (см.

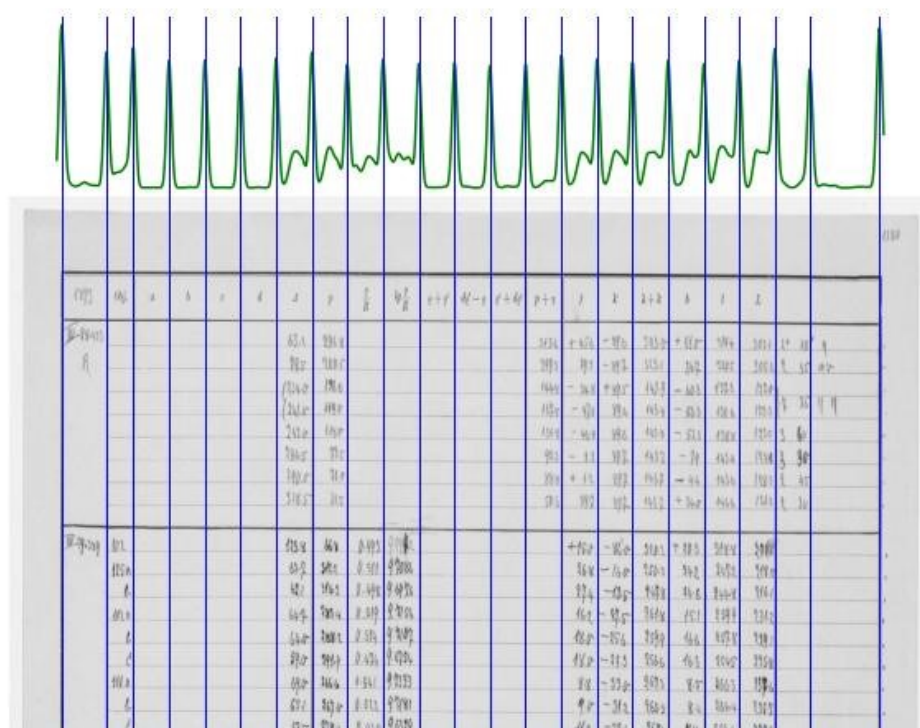


Рис. 6.2: Пример детекции вертикальных линий на странице каталога с помощью свертки с вертикальным ядром.

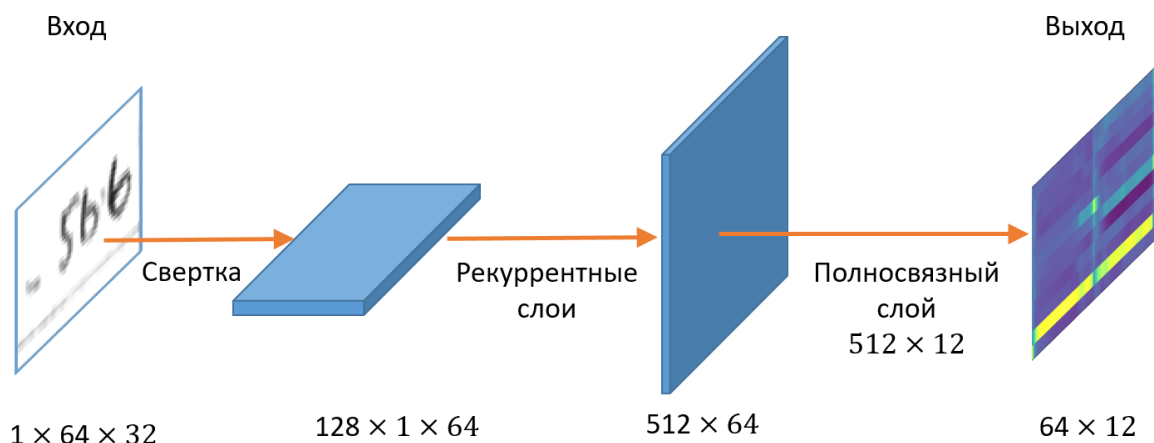


Рис. 6.3: Последовательность слоев в модели CRNN. Сверточные слои формируют набор признаков по каждому столбцу входного изображения, рекуррентные слои преобразуют этот набор с учетом порядка, положения и окружения столбцов, полносвязный слой переводит набор признаков в вероятности классов.

рисунок 6.3). Первый блок состоит из последовательности сверточных слоев и слоев понижения размера, которая преобразуют входной тензор (многомерный массив) размера (1, 32, 64), где первое число – количество каналов в изображении, в тензор размера (128, 1, 64). Выходной тензор интерпретируется как набор из 128 признаков для каждого столбца входного изображения.

Второй блок состоит из двух рекуррентных слоев, которые увеличивают число признаков для каждого столбца с 128 до 512, вкладывая в них информацию о порядке и положении столбцов и их окружении.

Наконец, третий блок представлен полносвязным слоем, который преобразует 512 параметров в 12, которые интерпретируются как оценки вероятности классов. Объединение последовательностей размером 12 образует тепловую карту размером 64 × 12.

Обратим внимание, что знак точки и знак плюса не включаются в набор классов. Знак плюса возникают, когда первоначально был написан знак минус и затем исправлен на плюс. Это событие довольно редкое, поэтому получить высокую точность при обучении будет трудно. Знак точки является довольно шумным и может путаться с многочисленными артефактами, например, случайными пятнами чернил. Более того, иногда знак точки

просто отсутствует или почти невидим. С другой стороны, ее положение известно априори и для большинства каталогов она стоит перед последней цифрой, и лишь в отдельных каталогах – перед второй цифрой с конца.

Тепловая карта затем используется для декодирования последовательности символов. Одним из способов декодирования является чтение столбцов слева направо и извлечении символов, соответствующих наибольшему значению вероятности. После этого последовательность символов (напомним, что символами являются цифры, знак минус и специальный разделитель) преобразуется в число по определенным правилам. Для примера рассмотрим последовательность: ‘** — — 1111*776**888***’. Чтобы преобразовать ее в число, заменим последовательные повторяющиеся символы одним, чтобы получить ‘* — 1 * 76 * 8*’, и удалим пустые символы, что дает число —1768. Для большинства каталогов это будет десятичное число с одним десятичным знаком, что дает в итоге —176.8.

Отметим, что тепловая карта в рамках модели CRNN не является классификацией входного изображения по столбцам. Более того, ширина тепловой карты является свободным параметром, и она лишь для удобства задается равной ширине входного изображения. На самом деле, для декодирования важен только порядок столбцов на тепловой карте.

Для обучения нейросетевой модели был собран набор изображений и для каждого изображения вручную определялось написанное на нем число. Набор размеченных данных содержит 8 000 изображений, случайно выбранных из каталогов. Тем самым при обучении модель получает различные примеры почерка, цвета чернил и фона. Для обучения используется функция потерь, известная как connectionist temporal classification (СТС, [86]), Изложим идею построения этой функции, следуя [86].

Вначале формализуем задачу. Входное изображение – картинку с числом – будем рассматривать как последовательность столбцов одинаковой высоты. Будем обозначать эту последовательность как $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k)$, причем длина последовательности заранее не фиксирована и может быть разной для разных изображений. Картинке сопоставляется последовательность изображенных на ней символов, которую будем обозначать как $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$. Длина этой последовательности также заранее не фик-

сирована, требуется лишь выполнение условия $n \leq k$, т.е. число символов не должно превосходить ширины изображения в пикселях. Множество всех последовательностей $\mathbf{x}$ обозначим X , а множество всех последовательностей $\mathbf{y}$ обозначим Y . Модель оцифровки текста на изображении – это функция $h : X \mapsto Y$.

Нейронная сеть CRNN принимает на вход последовательность $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ и возвращает последовательность $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_k)$ той же длины. Размерность вектора z_i равна длине алфавита с учетом пустого символа (в рассматриваемой задаче эта длина равна 12, т.е. все цифры 0, 1, ..., 9, знак "минус" и пустой символ "*"). Вектор z_i будем интерпретировать как распределение вероятностей над алфавитом в момент времени i . Символом z_i^j будем обозначать j -ый элемент вектора z_i . Любую последовательность вида $(z_1^{j_1}, z_2^{j_2}, \dots, z_k^{j_k})$ будем называть путем и обозначать буквой π .

Для перевода пути в последовательность символов сначала заменим все подряд идущие повторяющиеся символы в один, после чего выбросим все пустые символы. Оставшаяся последовательность рассматривается как результат раскодирования. Обозначим эту операцию буквой d , а ее результат как $d(\pi) = q$. Например, $d(* * 111 * 4 * 233) = 1423$. Правдоподобие последовательности q определим как сумму правдоподобий по всем путям, дающим при раскодировании q , т.е.:

$$p(q|\mathbf{x}) = \sum_{\pi: d(\pi)=q} p(\pi|\mathbf{x}),$$

где

$$p(\pi|\mathbf{x}) = \prod_{l=1}^k z_l^{j_l}.$$

Задачей модели оцифровки h является поиск последовательности символов q , для которой максимизируется функция правдоподобия, т.е.

$$h(\mathbf{x}) = \arg \max_q p(q|\mathbf{x}).$$

Явное вычисление этого выражение требует перебора по всем q и всем пу-

тям, дающим при раскодировании q , что делает это вычисление слишком трудоемким. На практике прибегают к упрощениям. Одно из них состоит в том, что рассматривается только один путь, составленный из максимальных элементов векторов z_i для каждого момента времени i , и пренебрегают вероятностями всех остальных путей. В этом случае обозначим

$$\pi^* = (\max z_1, \max z_2, \dots, \max z_k)$$

и положим

$$h(\mathbf{x}) = d(\pi^*).$$

Отметим, что этот подход может давать результат q , не обладающий максимальным правдоподобием. Более того, он неприменим для обучения нейросетевой модели, поскольку не является дифференцируемым.

Обучение модели строится по методу максимального правдоподобия. Для его реализации, во-первых, для заданного q необходимо уметь вычислять правдоподобие $p(q|\mathbf{x})$. Вместо явного перебора всех путей, дающих при раскодировании q , используются идеи динамического программирования – алгоритм Витерби [226].

Будем обозначать квадратными скобками $[i : j]$ операцию взятия подпоследовательности от индекса i до j . Рассмотрим правдоподобие последовательности $q[1 : s]$ в момент времени t (т.е. относительно первых t элементов входной последовательности):

$$\alpha_t(s) = \sum_{\pi: d(\pi[1:t])=q[1:s]} p(\pi[1:t]|\mathbf{x}).$$

Назовем это выражение – прямым уравнением. Далее показывается, что величины $\alpha_t(s)$ вычисляются рекурсивно.

По аналогии вводится обратное уравнение:

$$\beta_t(s) = \sum_{\pi: d(\pi[t:|\pi|])=q[s:q]} p(\pi[t:|\pi|]|\mathbf{x}).$$

Показывается, что величины $\beta_t(s)$ также вычисляются рекурсивно.

Далее показывается, что выражение

$$\frac{\alpha_t(s)\beta_t(s)}{z_t^{q_s}} = \sum_{\pi: \pi_t=q_s} p(\pi|\mathbf{x})$$

представляет собой сумму правдоподобий всех путей π , дающий при раскодировании q и проходящих в момент времени t через символ q_s . Просуммировав это выражение по всем $s = 1, \dots, |q|$ получаем полную величину правдоподобия:

$$p(q|\mathbf{x}) = \sum_{s=1}^{|q|} \frac{\alpha_t(s)\beta_t(s)}{z_t^{q_s}}.$$

Теперь получаем возможность вычислять производную функции правдоподобия по параметру z_t^j :

$$\frac{\partial p(q|\mathbf{x})}{\partial z_t^j} = \frac{1}{z_t^{j^2}} \sum_{s=1}^{|q|} \frac{\alpha_t(s)\beta_t(s)}{z_t^{q_s}},$$

причем в последней сумме нам достаточно рассматривать только те индексы s , для которых $q_s = z_t^j$.

Выше был показан способ вычисления производной функции правдоподобия по выходным значениям модели. Далее производные по внутренним параметрам нейросетевой модели вычисляются стандартным методом обратного распространения ошибки (см. например, [85]).

Чтобы добиться лучшей обобщающей способности модели, будем применять различные процедуры расширения (обогащения) датасета, например, за счет случайных изменение контраста, искажений и поворотов изображений.

Весь датасет разобьем на обучающую и тестовую выборку (тестовая часть составляет 20%). После обучения модели, точность на тестовой выборке (процент правильно распознанных чисел) составила 97 %. Хотя эта точность и выглядит достаточно высокой, однако, как будет показано далее, модель все еще нуждается в улучшении для проведения полноценной оцифровки всех каталогов.

Обратим внимание, что тепловая карта позволяет не только декодиро-

вать число, но и оценить достоверность и дать несколько возможных интерпретаций. Действительно, вместо того чтобы выбирать символ с наибольшей вероятностью, можно рассматривать каждый столбец как распределение вероятностей и выбирать символ из этого распределения случайным образом. Будем моделировать 100 последовательностей для каждой тепловой карты и выбирать пять наиболее часто декодируемых чисел из этих последовательностей. Частота встречаемости каждого числа дает оценку вероятности (уверенности) для этого числа.

На рисунке 6.4 показан пример тепловой карты и ранжированный список ее интерпретаций с оценками вероятности каждой интерпретации.

На рисунке 6.5 показано, как будет меняться точность модели, если ее измерять для тех чисел, оценка вероятности в которых превышает заданный порог. Также на рисунке 6.5 показано, какая доля чисел в тестовой выборке имеет оценку вероятности выше заданного порога.

Хотя модель демонстрирует довольно высокую точность на тестовом наборе, который состоит из 1600 чисел, этот тестовый набор составляет менее 0.05 % от всего набора неразмеченных данных, который составляет около 3.3 миллионов чисел. Таким образом, следует ожидать, что точность модели может быть ниже на страницах со сложными условиями (много шума, измененный фон и т.д.) или на ранее не виденных почерках. Можно предположить, что более глубокие модели (с большим числом обучаемых параметров) могли бы обеспечить лучшее обобщение, однако для этого потребуется значительно больший набор размеченных данных, что весьма трудоемко. Вместо этого, для адаптации модели к новым условиям данных, был предложен метод *постраничной адаптации*, описанный ниже. Однако, прежде чем применить этот метод, необходимо выполнить некоторые вспомогательные действия, о которых далее пойдет речь.

А именно, необходимо отнести цвет каждой строки таблицы к одному из трех основных цветов: синему, красному и черному. Дело осложняется тем, что из-за естественной вариации чернил и бумаги, пороги каждого цвета непостоянны во времени и заранее неясно, каковы должны быть оптимальные значения. Для определения оптимальных пороговых значений для каждого каталога применяется метод кластеризации в цветовом про-

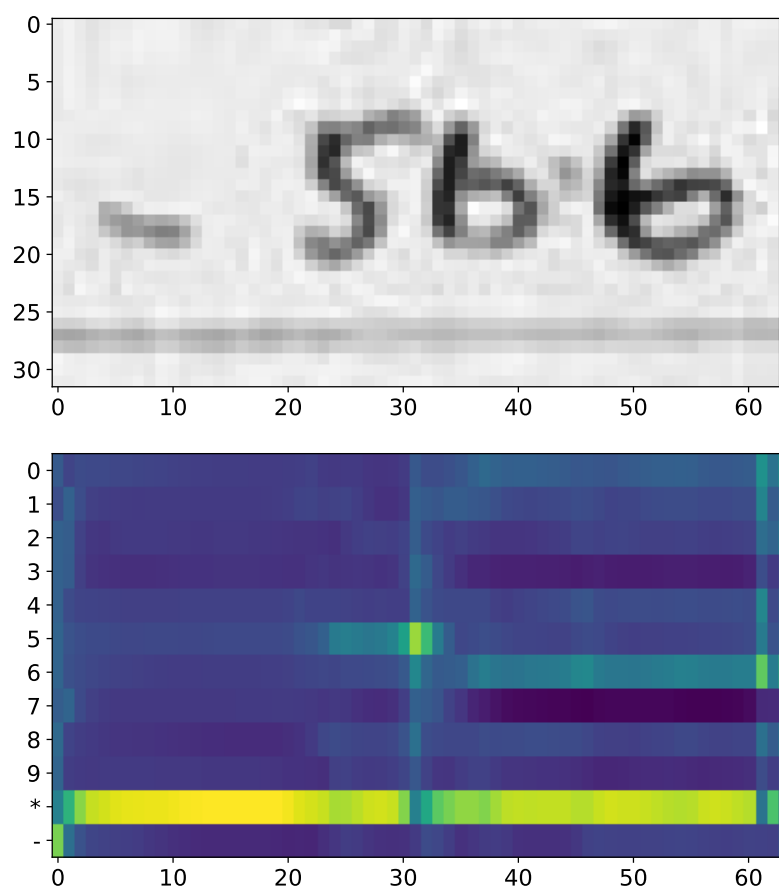


Рис. 6.4: Верхняя панель: пример изображения рукописного числа. Нижняя панель: тепловая карта, полученная обученной моделью. Возможные варианты декодирования этой тепловой карты: ‘-566’, ‘-560’, ‘566’, ‘-562’, ‘-506’ с вероятностями 0.89, 0.08, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01 соответственно. Рисунок из работы [112].

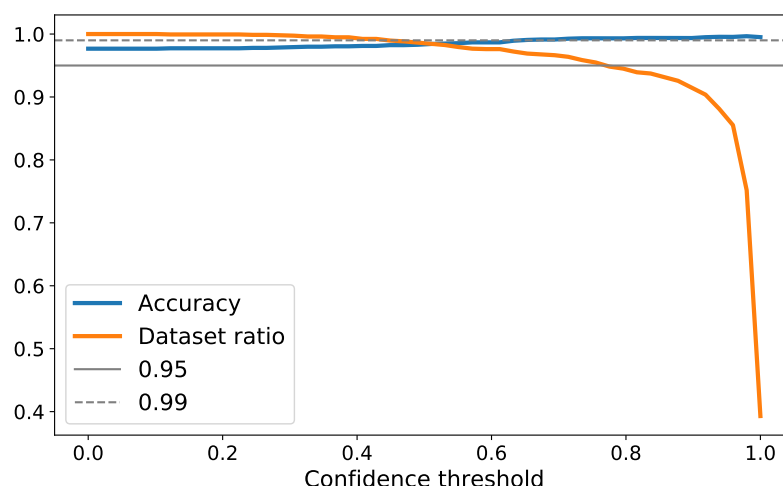


Рис. 6.5: Зависимость точности модели от порога уверенности (*синяя линия*) и доля набора данных с уверенностью выше порога (*оранжевая линия*). Рисунок из работы [111].

пространстве RGB.

Более подробно, сначала по некоторому пороговому уровню яркости пикселей отделяется фон от чернил. Затем цвет чернил усредняется по каждой строке. Таким образом, каждая строка таблицы представлена одной точкой в трехмерном цветовом пространстве RGB. В этом пространстве ожидается найти три кластера, соответствующие черному, синему и красному цветам. Однако из-за наличия оттенков, имеет смысл выделить больше кластеров, а затем вручную отнести каждый из них к одному из трех цветов.

На рисунке 6.6 показаны цветовые кластеры, выделенные с помощью модели гауссовой смеси в каталогах 1911–1916 и 1916–1920. Обратим внимание, что положение кластеров в разных каталогах разное. Приписывая кластеры к одному из трех основных цветов, получаем соотнесение каждой строки в каталоге (как точки в кластере) к одному из трех основных цветов. Визуальная проверка цветов показала, что всего несколько строк из всех каталогов нуждались в корректировке.

Теперь результаты модели первоначального распознавания чисел и определение цвета позволяют разделить таблицы в каталогах на серии наблюдений, относящиеся к одному моменту наблюдений. Далее внутри каждой серии находится наиболее часто встречающаяся сумма столбцов

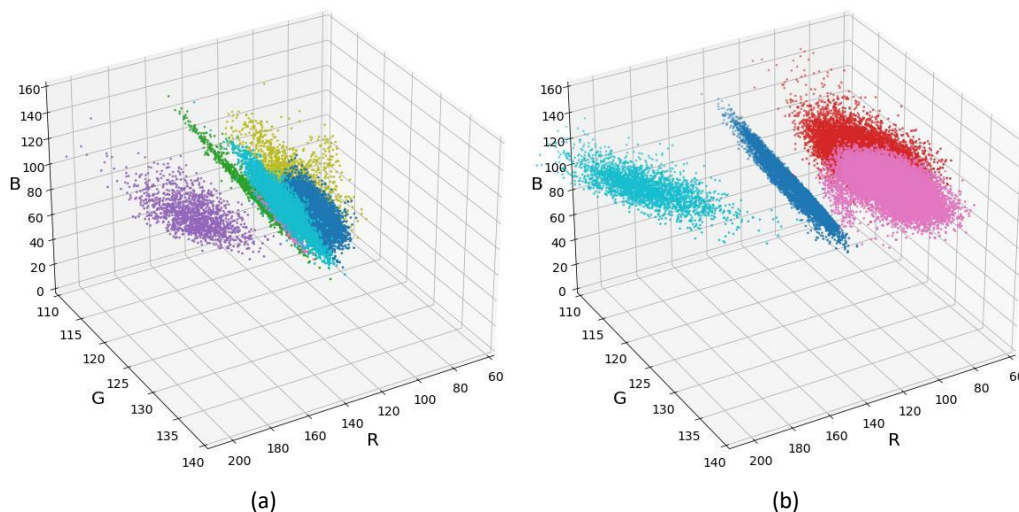


Рис. 6.6: Распределение цветов шрифта в пространстве RGB, полученное для каталога 1911–1915 (слева) и для каталога 1916–1920 (справа). Каждая точка представляет собой строку в исходных каталогах. Цвета различают кластеры, выделенные с помощью модели гауссовой смеси. Рисунок из работы [111].

λ' и $\lambda + k$ (по модулю 360), а также разность столбцов L и l (также по модулю 360). Напомним, что эти значения должны оставаться постоянными для данного момента времени, т.е. внутри одной серии наблюдений. Учитывая, что исходная модель распознавания чисел в среднем работает хорошо, можно ожидать, что для большинства серий будут получены правильные линейные зависимости между столбцами. На следующем этапе будем использовать эти зависимости для построения адаптивной модели и улучшения распознавания каждой страницы.

6.1.3. Адаптивная модель распознавания рукописного текста

На рисунке 6.7 (левая панель) показан пример исходной страницы и чисел, распознанные первоначальной моделью. Точность для этой страницы составляет 94 %, что ниже желаемой. Кроме того, модель дает низкую уверенность для многих правильных результатов, это означает, что при ручной проверке результатов, в которых модель неуверенна, будет затрачено много сил. Задача адаптивной модели состоит в повышении общей точности

и уверенности в правильных ответах.

Будем использовать найденные линейные связи между столбцами таблицы для построения критерия для дообучения модели на данной странице. Для этого возьмем предсказания модели для столбца L и на основе найденной линейной связи между столбцами L и l вычислим значения в столбце l . Теперь можно сделать несколько итераций обучения модели и штрафовать модель, если ее ответы не соответствуют значениям, полученным с помощью линейной связи для столбца l . Для вычисления величины штрафа используется та же функция потерь СТС, как и при обучении первоначальной модели на размеченных данных. Тот же подход работает и в обратном порядке, т.е. для столбцов l и L , а также для пары столбцов λ' и $\lambda + k$. Дообучение модели на данной странице происходит до тех пор, пока результаты модели не перестанут противоречить известной линейной зависимости между столбцами таблицы (ошибка становится ниже некоторого порога). На рисунке 6.7 (правая панель) показаны результаты для модели после адаптации. Теперь точность составляет 99 % и почти все правильные числа имеют уверенность близкую к 1. Данная процедура адаптации повторяется заново для каждой страницы в каталогах.

После дообучения модели на данной странице, для каждой ячейки вычисляется набор из 5 наиболее вероятных вариантов раскодирования, ранжированный по степени уверенности. Выберем из этого набора значение, наиболее согласованное со значениями в других столбцах и удовлетворяющее естественным ограничениям (отметим, что это не обязательно всегда значение с наибольшей уверенностью). Например, зная линейную зависимость между столбцами L и l , будем выбирать те значения, которые соответствуют этой зависимости. Если такая пара нашлась, будем полагать уверенность равной единице. Если не удастся найти подходящую комбинацию для какой-то строки, будем выбирать значение с наибольшей достоверностью и перестраивать оставшееся, следуя линейной связи. Этот же метод применим к столбцам λ' и $\lambda + k$. Немного более сложное правило можно вывести для выбора подходящих значений b и β . Заметим, что это не гарантирует правильный ответ и следует ожидать небольшой, но все же ненулевой вероятности неправильных значений.

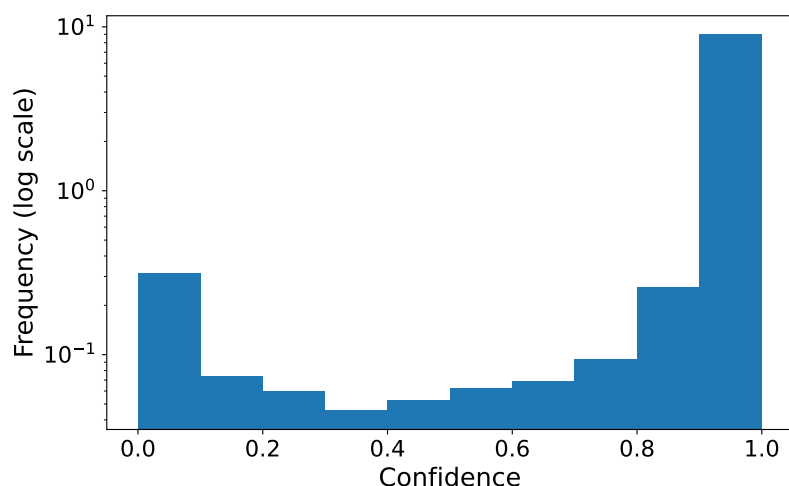


Рис. 6.8: Распределение минимума достоверностей для β , λ' , $\lambda + k$, b , l и L для всех записей в каталогах. Рисунок из работы [111].

Отметим, что с помощью тепловой карты можно также оценить доверие и к каждому символу в числе. Это может быть использовано не только для выделения потенциально неправильно распознанных чисел, но и для указания ошибочных цифр в этих числах. Однако в данной работе ограничимся указанием уверенности только для всего числа целиком.

Для дальнейшего анализа исключим наблюдения (строки таблицы), которые имеют низкую уверенность (т.е. потенциально ошибочные). Уверенность для строки в целом определим как минимальную уверенность среди значений β , λ' , $\lambda + k$, b , l и L в этой строке. Распределение полученной величины показано на рисунке 6.8. Можно видеть два пика в распределении, один вблизи 1 и другой вблизи 0. Значение 0.4 выглядит как оптимальный порог, разделяющий две смеси. Будем исключать наблюдения, для которых уверенность ниже 0.4 (этот критерий отсеивает лишь около 5% данных).

6.1.4. Широтно-временные диаграммы пятен, факелов и протуберанцев

Всего было оцифровано 73 742 наблюдений солнечных пятен за период 1887–1920 гг. Отфильтровав наблюдения с наименьшей достоверностью ниже 0.4, получаем 69 990 наблюдений. На рисунке 6.9 показано широтно-временное распределение координат пятен, а также коли-

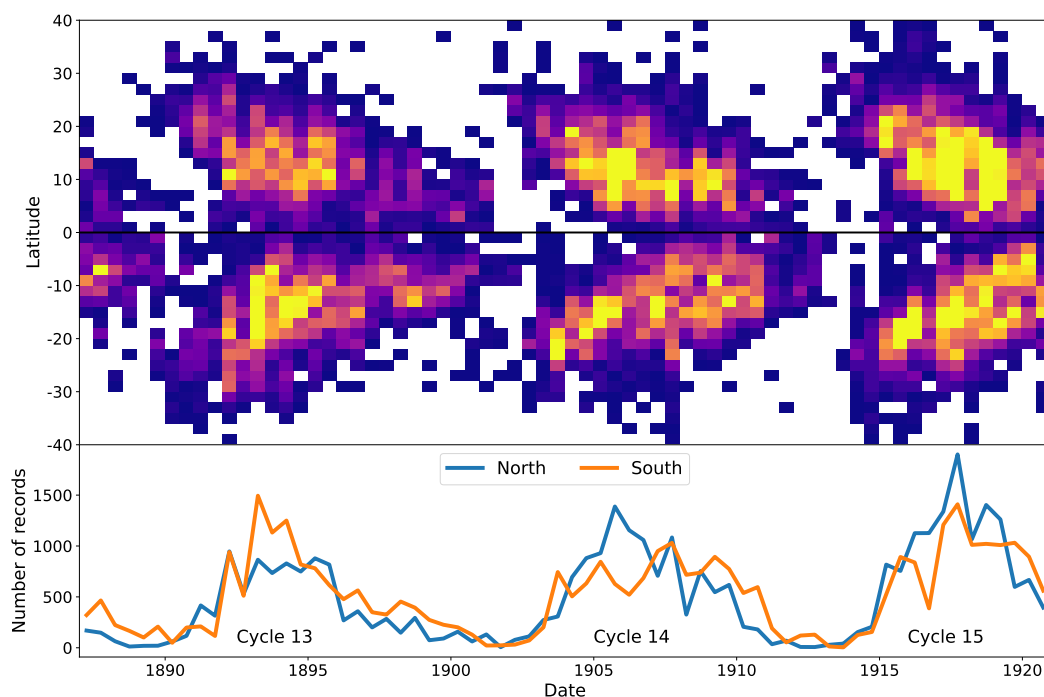


Рис. 6.9: *Верхняя панель*: широтно-временное распределение восстановленных координат солнечных пятен из каталогов Цюрихской обсерватории. Данные группировались в интервалах длины на 6 месяцев по времени и 4° по широте. *Нижняя панель*: общее количество солнечных пятен в северном полушарии (*синяя линия*) и в южном полушарии (*оранжевая линия*). Рисунок из работы [111].

чество солнечных пятен в северном и южном полушариях. Для сравнения на рисунке 6.10 приведено распределение наблюдений групп солнечных пятен согласно каталогу Гринвичской обсерватории (RGO, solarscience.msfc.nasa.gov/greenwch.shtml).

Оба рисунка 6.9 и 6.10 имеют большое сходство в широтно-временном распределении, и можно сделать вывод, что каталоги Цюрихской обсерватории, в которых даны положения отдельных солнечных пятен, могут быть использованы для дополнения каталога RGO положений центров групп солнечных пятен. Конечно, на рисунках 6.9 и 6.10 есть и некоторые различия. Однако для решения вопроса по конкретным случаям требуется ручная проверка, что может являться предметом будущих исследований. Вероятно, часть подобных случаев может быть устранена с помощью более сложных критериями отбора наблюдений и увеличением порога уверенности.

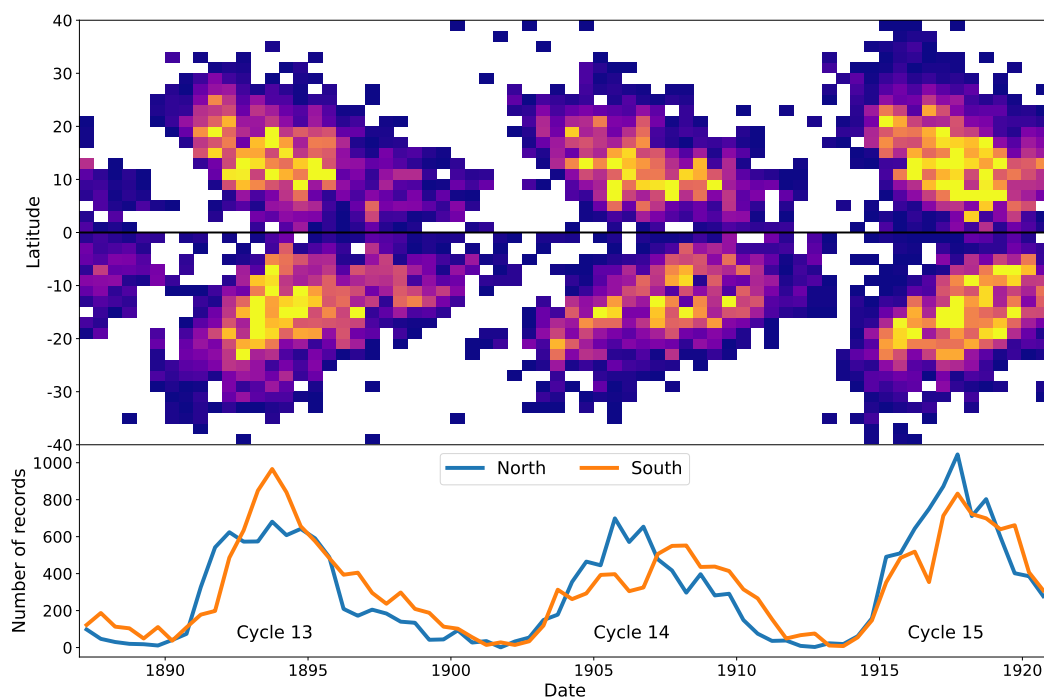


Рис. 6.10: Распределение групп солнечных пятен согласно каталогу RGO. Легенда аналогична рисунку 6.9. Рисунок из работы [111].

При сравнении каталогов Цюриха и RGO следует учитывать, что долготы в этих каталогах не эквивалентны, поскольку для определения координат использовались разные оценки скорости вращения Солнца. Чтобы найти связь между долготами, были выбраны несколько дней в период 1887–1920 гг. и вручную оценен сдвиг между соответствующими наблюдениями. В результате выяснилось, что (i) время отсчета и период вращения не менялись в течение всего периода; (ii) относительная скорость оценивается как 0.0821 градусов/день и Цюрихский каталог имеет более короткий период вращения; (iii) на 1 января 1880 гелиографическая долгота 0° в Цюрихском каталоге соответствует -68.7055° в каталоге RGO. На основе этих параметров координаты Цюрихского каталога были приведены в соответствие с координатами в каталоге RGO.

На рисунке 6.11 показано соответствие каталогов Цюриха и RGO для двух кэррингтоновских оборотов с номерами 540 (9 февраля–8 марта 1894 года) и 850 (5 апреля–3 мая 1917 года), которые находятся вблизи максимумов солнечных циклов 13 и 15.

Отметим различие в полноте наблюдений в каталогах RGO и Цюриха.

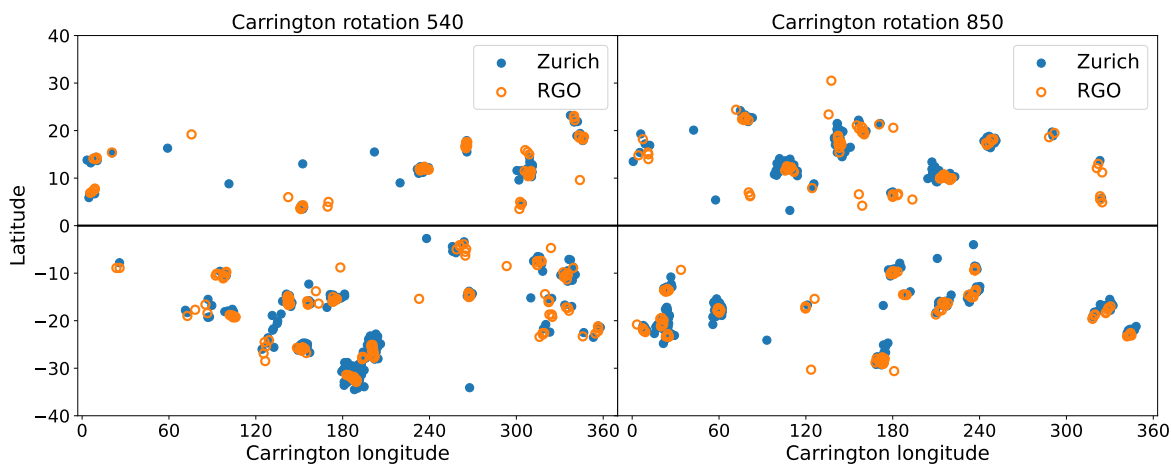


Рис. 6.11: Примеры синоптических карт с положением солнечных пятен (синие точки – по каталогу Цюриха) и положением групп солнечных пятен (оранжевые кружки – по каталогу RGO). Рисунок из работы [111].

Из 12 392 дней за период 1887–1920 гг. данные RGO охватывают 9 736 дней, а данные Цюриха – только 6 710 дней. Основная причина заключается в том, что RGO имеет несколько точек наблюдения по всему миру и поэтому меньше подвержена влиянию, например, погодных условий.

На рисунке 6.12 показано распределение расстояний (в градусах на поверхности сферы) между наблюдениями в каталогах Цюриха и ближайшей к ним группе из каталога RGO и наоборот. (рассматриваются только те дни, которые присутствуют в двух каталогах одновременно). Можно видеть, что для 93 % солнечных пятен из каталога Цюриха в радиусе 10° существует по крайней мере одна группа из каталога RGO (этот радиус составляет примерно половину продольного размера самых больших групп, см., например, [114]). Соответственно, для 87 % групп из каталога RGO в радиусе 10° обнаруживается по крайней мере одно солнечное пятно в каталогах Цюриха. Заметим, что распределение Zurich-RGO на рисунке 6.12 смещено в сторону больших расстояний по сравнению с распределением RGO-Zurich, поскольку расстояние от пятна до ближайшего центра группы не меньше, чем расстояние от центра группы до ближайшего пятна.

Переходя к другим активным областям, всего было оцифровано 413 098 координат факелов и 67 448 протуберанцев за период 1887–1920 гг. Отфильтровав наблюдения с достоверностью ниже 0.4, было получено 394 775 фа-

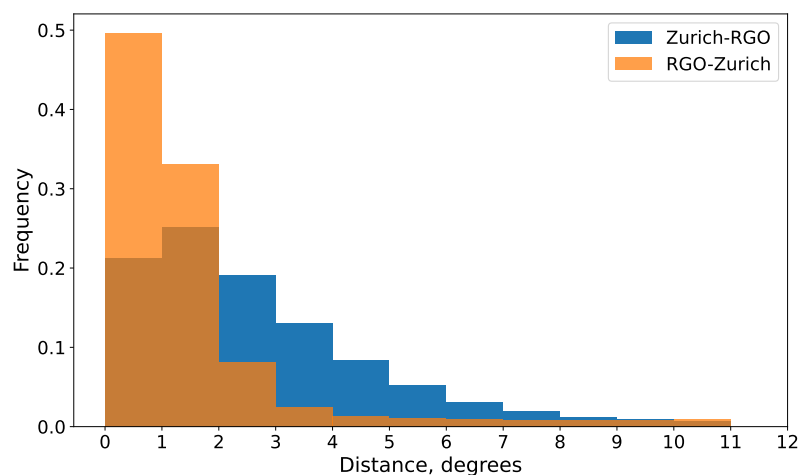


Рис. 6.12: Распределение расстояний от солнечных пятен базы Цюриха до ближайшей группы солнечных пятен в каталоге RGO (синие столбики) и распределение расстояний от групп солнечных пятен в каталоге RGO до ближайшего солнечного пятна в каталоге Цюриха (оранжевые столбики). Рисунок из работы [111].

келов и 62 203 протуберанца. На рисунках 6.13 и 6.14 показаны соответствующие широтно-временные распределения. Общее число факелов и протуберанцев сравнивается с числом солнечных пятен. Число факелов в высоких широтах варьируется по годичным периодом, что обусловлено изменением видимости солнечных полюсов.

Отметим, что недавно в работе [214] были представлены широтно-временные диаграммы протуберанцев, оцифрованные с синоптических карт Вольфера за период 1887–1898 гг. и с наблюдений солнечного диска в линии CaII-K обсерваторией Кодайканал за период 1910–1954 гг. Полученная база данных дополняет эти результаты для периода 1899–1909 гг. Как и в работе [214], наблюдаются заметные полярные дрейфы в высоких широтах и корреляция количества протуберанцев и количества солнечных пятен. Относительное число протуберанцев и солнечных пятен в цикле 15 оказывается значительно ниже, чем в циклах 13 и 14, для которых наблюдается почти равное соотношение. Пример сводной синоптической карты показан на рисунке 6.15 для кэррингтоновского оборота с номером 700 (22 января–18 февраля 1906 года, что находится вблизи максимума цикла 14).

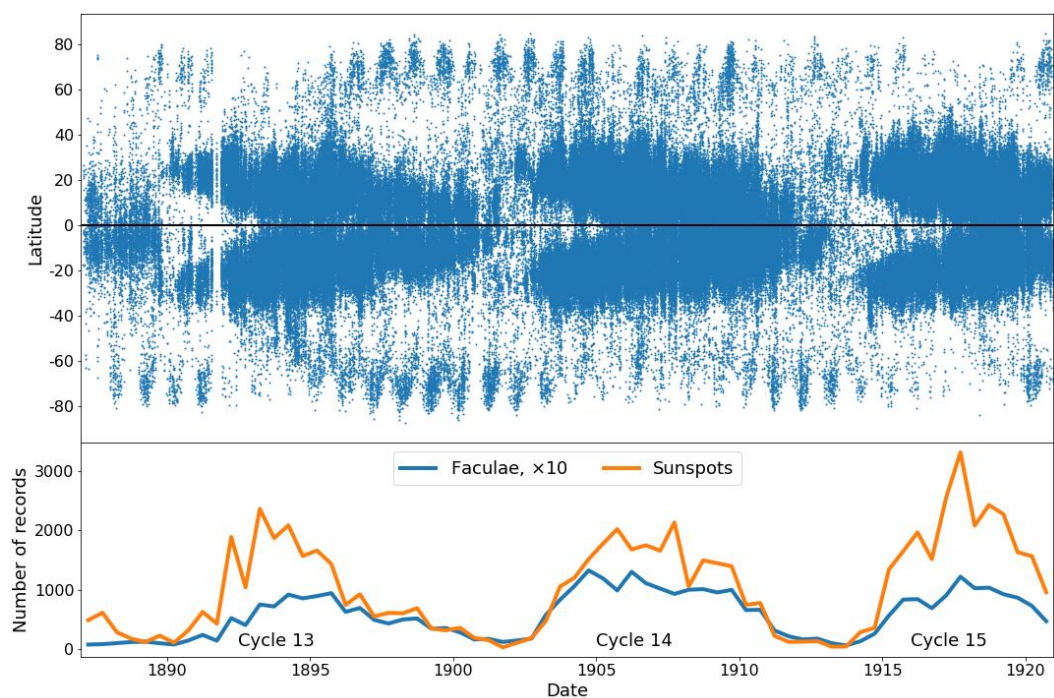


Рис. 6.13: *Верхняя панель:* широтно-временное распределение факелов. *Нижняя панель:* общее количество факелов (синяя линия) в сравнении с общим количеством солнечных пятен (оранжевая линия). Рисунок из работы [111].

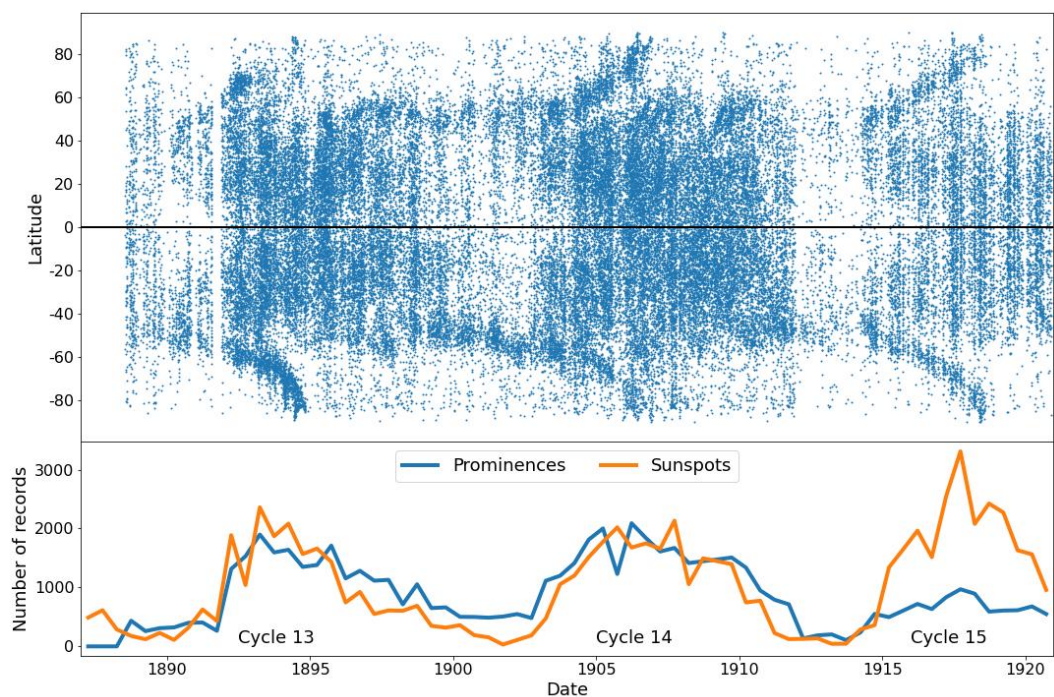


Рис. 6.14: Аналогично рисунку 6.13, только для протуберанцев. Рисунок из работы [111].

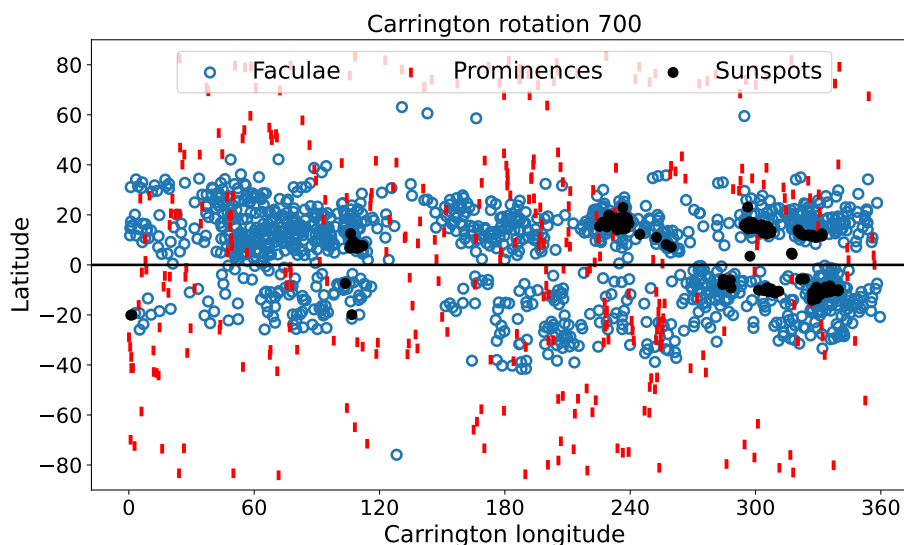


Рис. 6.15: Синоптическая карта с одновременно наложенными солнечными пятнами (черные точки), протуберанцами (красные полоски) и факелам (синие кружки). Рисунок из работы [111].

6.1.5. Выводы

Подведем промежуточные итоги. В работе предложена модель на основе машинного обучения для распознавания координат солнечных пятен, протуберанцев и факелов в рукописных каталогах Цюрихской обсерватории за период 1887–1920 гг. Из-за большого разнообразия почерков, цветов чернил, фона страниц и различных артефактов, задача потребовала разработки уникального подхода. Стандартный подход к задаче машинного обучения состоит в том, что собирается большой размеченный набор данных, проводится обучение модели и затем модель в неизменном виде применяется к новым данным. На тестовом наборе данных этот подход дает точность 97 %. Однако при обобщении на все каталоги обнаруживается, модель зачастую дает низкую уверенность для правильных ответов и в ряде случаев делает много ошибок. Это вполне ожидаемо из-за ограниченного размера обучающей выборки. Хотя при обучении модели применялись дополнительные процедуры аугментации данных для расширения обучающей выборки, однако они не могут полностью покрыть вариативность данных в каталогах.

Для повышения точности модели и уверенности в правильных ответах

был разработан подход по автоматическому дообучению модели на каждой новой странице. Подход был основан на том, что числа в столбцах не независимы, а между некоторыми столбцами существует точная линейная связь, которая сохраняется в пределах серии наблюдений, относящихся к одному и тому же моменту времени. Хотя параметры этой связи заранее не известны, однако точность базовой модели позволяла ее реконструировать. После этого предсказания в одной колонке использовались для вычисления значений во второй колонке. Различие между прямым предсказанием для второй колонки и результатом вычисления этой величины на основе первой колонки было основой для дообучения модели. После нескольких итераций обучения, предсказания модели становились более согласованными и повышалась уверенность в правильных ответах. Таким образом была получена адаптивная модель, которая автоматически подстраивалась под новые особенности страницы, текста и почерка.

Отметим, что предложенный метод адаптации созвучен современным идеям self-supervised обучения моделей. Чтобы пояснить эту связь, напомним идею self-supervised обучения. В основе стандартного supervised обучения (обучения с учителем) лежит аннотированная выборка, т.е. набор пар (X, y) , где X – набор признаков объекта, y – целевое значение для этого объекта (например, класс, непрерывная величина или какой-то другой объект). Во многих задачах y получается как результат некоторого экспертного мнения, соответственно, если выборка очень большая, то ее аннотирование становится затруднительным. Более того, даже тех случаях, когда аннотирование всего набора данных все-таки удастся провести, результат может оказаться неудовлетворительным. Проблема в том, что экспертное мнение на практике оказывается субъективным и разные эксперты по-разному делают вывод об одном и том же объекте. Кроме того, в аннотации могут присутствовать естественные ошибки.

Идея self-supervised состоит в том, на основе набор признаков X некоторым искусственным образом создаются целевые переменные и формулируется оптимизационная задача. В качестве примера можно привести текст, из которого убирается одно слово, и задача модели состоит в том, чтобы на основе контекста восстановить исходное слово (иногда рассматривается

обратная задача: по слову восстановить контекст). При работе с изображениями аналогией является закрашивание части изображения, а при работе с серией изображений – предсказание текущего на основе соседних. Предполагается, что при решении этих искусственных задач во внутренних слоях модели формируется информативное признаковое описание объекта. Затем на базе этого признакового описания обучаются более узкоспециализированные модели, решающие, например, конкретную задачу классификации или регрессии. Отметим, что современные языковые модели на некоторых этапах обучения используют идеи self-supervised подхода.

Реализованный подход по адаптации модели может быть сопоставлен с self-supervised обучением, поскольку в нем используются внутренние взаимосвязи в данных, а не предварительно размеченная выборка.

Для лучшей интерпретируемости результатов распознавания символов, был разработан метод оценки уверенности и формирования набора вероятных ответов. Это позволило выделить случаи, в которых потенциально наличие ошибки, и автоматически уточнить их на основе значений из других столбцов. Те наблюдения, для которых уверенность оценивалась ниже, чем 0.4, исключались из последующего анализа физических свойств.

Для оценки результатов оцифровки координат были построены широтно-временные диаграммы для солнечных пятен, протуберанцев и факелов. Результаты воспроизводят распределение групп солнечных пятен из каталогов Гринвичской обсерватории. Для более детального изучения связей с каталогом RGO было выполнено соотнесение долгот в каталоге RGO с долготами в каталогах Цюрихской обсерватории, и получено распределение расстояний между пятнами и группами в двух каталогах. Наблюдаемое сходство между обоими каталогами говорит как о стабильности предложенного метода оцифровки, так и о совпадении критериев наблюдателей обеих обсерваторий при определении солнечных пятен. Последнее подтверждает идею о том, что цюрихские каталоги могут дополнять данные RGO.

Новая база данных, созданная на основе каталогов Цюрихской обсерватории, служит дополнением к пока еще фрагментарным знаниям о солнечной активности в конце 19 и начале 20 веков. База данных представлена в открытом репозитории github.com/observethesun/zurich_catalogs. Репозиторий

109.39	24.57	247.88
305.2	109.04	106.12
151.05	-3.78	161.67

Рис. 6.16: Примеры изображений рукописных чисел из датасета https://github.com/observethesun/handwritten_numbers.

зиторий открыт для всех желающих вносить исправления и сообщать об ошибках. Для визуальной оценки точности оцифровки были опубликованы каталоги с постраничным сравнением исходных изображений и числовыми таблицами (актуальную ссылку см. в репозитории GitHub).

В дополнение к данной работе был опубликован датасет, состоящий из 100 тысяч примеров изображений рукописных чисел и соответствующих значений чисел на картинках. Датасет доступен по ссылке https://github.com/observethesun/handwritten_numbers. Изображения имеют размер 64×32 пикселей по ширине и высоте, цвет пикселей записан градацией серого. На рисунке 6.16 представлены примеры изображений рукописных чисел из данного датасета.

Для формирования этого аннотированного набора данных были использованы результаты распознавания чисел, полученных моделью CRNN. Чтобы минимизировать возможность появления ошибок в аннотации к данным, в датасет включались только те изображения, для которых уверенность модели в своем результате была единичной. Для создания выборки использовались все доступные каталоги, а примеры выбирались случайным образом. Тем самым повышается вариативность данных: датасет содержит примеры различных почерков, контраста текста и фона. Эта выборка будет полезна в будущем для тестирования моделей машинного обучения.

Разработанный подход к оцифровке текстовой информации на изображениях оказывается достаточно универсален и переносим на другие подобные задачи. Так, в работе [117] с помощью CRNN модель была решена задача оцифровки даты и времени снимка в каталогах наблюдений

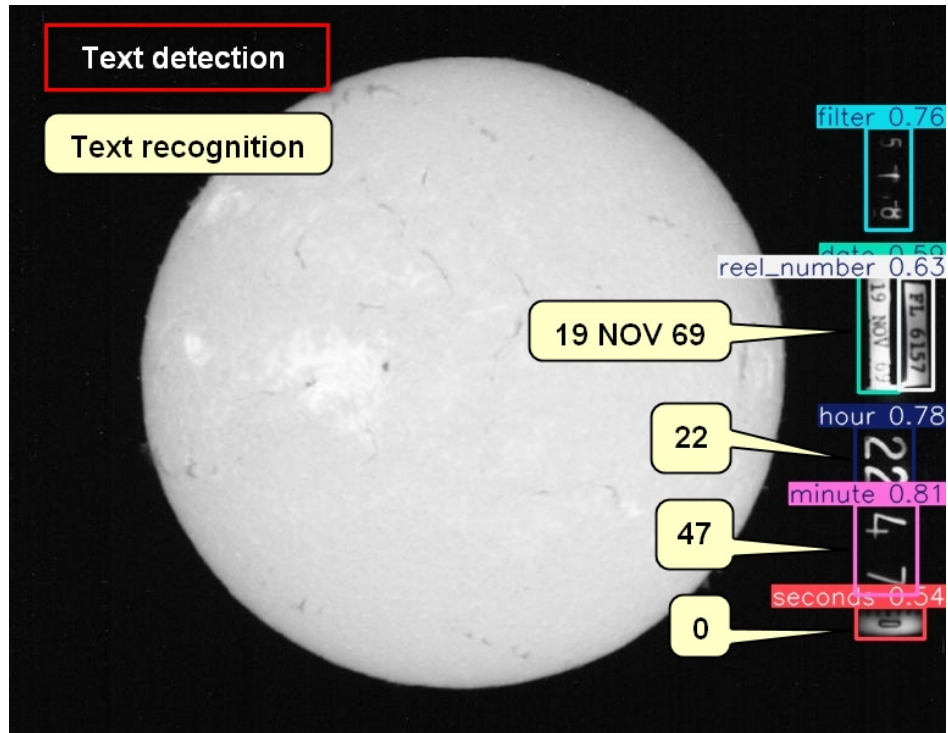


Рис. 6.17: Примеры изображения диска Солнца в линии H-alpha из архива обсерватории Сакраменто-Пик и результаты оцифровки полей даты и времени. На основе работы [117].

солнечного диска обсерваторией Сактаменто-Пик (США) за период 1966–2002. Исходный архив изображений (в линии H-alpha) доступен на сайте https://nispdata.nso.edu/ftp/flare_patrol_h_alpha_sp/. Дополнительным усложнением было то, что расположение полей даты и времени не фиксировано, поэтому в работе применялось две модели. Одна модель решала задачу детекции – определения координат рамки, внутри которой находится текстовое поле. Причем одновременно решалась и задача классификации – определения того, какое именно текстовое поле находится в рамке (дата, часы, минуты или секунды).

Вторая модель на основе архитектуры CRNN решала задачу оцифровки текста внутри выделенной рамки. На рисунке 6.17 показан пример совместной работы моделей.

Для обучения моделей использовалась выборка, аннотированная вручную (около 3 000 изображений). На изображении вручную отмечались границы каждого текстового поля и оцифровывался текст.

Всего было обработано порядка 4.8 миллионов изображений. На рисун-

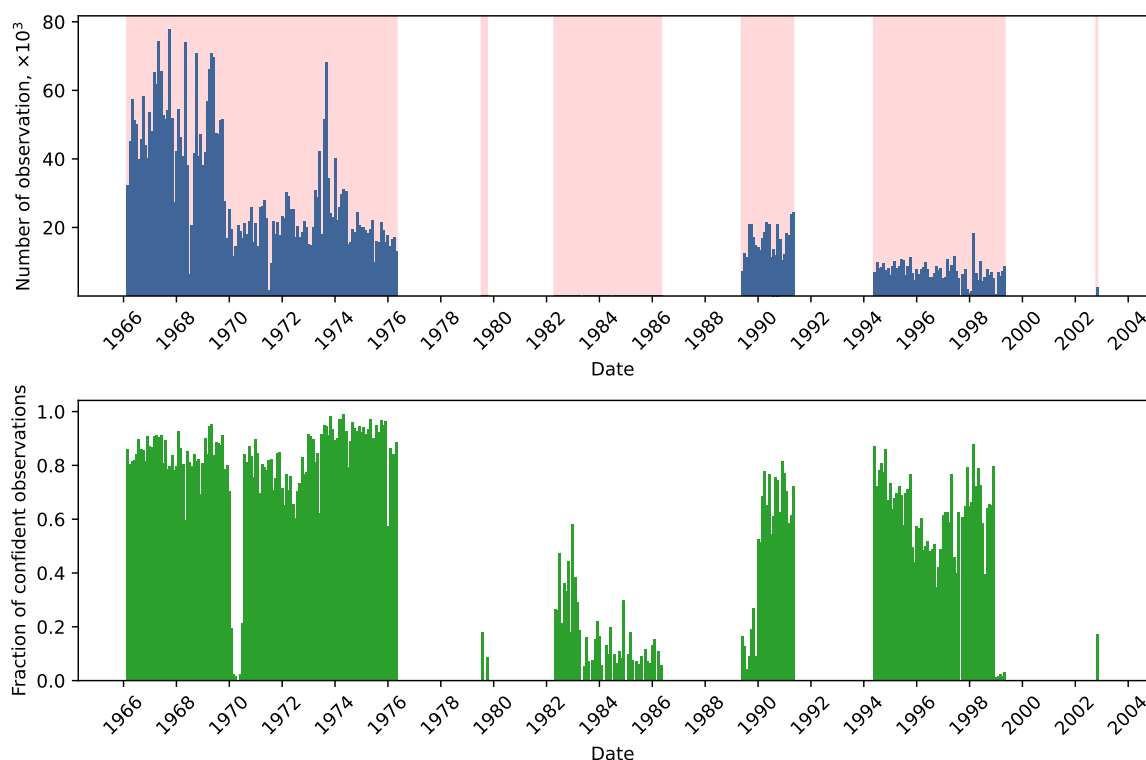


Рис. 6.18: Верхняя панель: количество наблюдений по месяцам (синие полосы) и месяцы, в которых было хотя бы одно наблюдение (розовые области). Нижняя панель: доля наблюдений с достоверностью по дате не ниже 0.95. Рисунок из работы [117].

ке 6.18 показана статистика полученного ряда изображений. Результаты оцифровки доступны в архиве <https://doi.org/10.5281/zenodo.18392561>, а исходный код моделей – в репозитории <https://github.com/observethesun/halpa>.

Отметим, что для повышения точности оцифровки был разработан дополнительный метод, основанный на оценке уверенности в положении рамки, уверенности в распознавании числа и на хронологической последовательности изображений. Суть метода состояла в том, что среди наиболее уверенных предсказаний выделялась максимальная по длине неубывающая последовательность дат и времен, и все промежуточные отметки времени, заполнялись на ее основе.

Таким образом показано, что предложенный подход к оцифровке исторических архивов может быть успешно перенесен на других схожие задачи.

6.2. Восстановление гелиографических координат солнечных пятен в период минимума Дальтона

Французский астроном Оноре Фложерг проводил астрономические наблюдения в период 1782–1830 годов, записи которых хранятся в Парижской обсерватории в виде отсканированных страниц рукописей. Эти рукописи были изучены и переведены в цифровой вид записи, содержащие измерения солнечных пятен. Часть измерений позволяет восстановить гелиографические координаты пятен. Фложерг использовал различные методики наблюдения. В первом случае Солнце и солнечные пятна пересекают вертикальные и горизонтальные линии координатной сетки телескопа, во втором случае координатная сетка имеет состоит из вертикальной и двух наклонных линий, а в третьем случае сетка имеет форму ромба. Кроме того, координаты некоторых пятен удастся восстановить по наблюдениям солнечных затмений. Восстановленные координаты далее используются для построения широтно-временной диаграммы, которая охватывает период минимума Дальтона. Результаты сопоставляются с наблюдениями Дерффлингера и Прантнера. Изложение этого раздела будет следовать работе [112].

6.2.1. Структура каталогов и методики наблюдений О. Фложерга

В работе изучаются отсканированные страницы каталогов астрономических наблюдений Оноре Фложерга, находящихся в библиотеке Парижской обсерватории. В таблице 6.2 приведены ссылки на каталоги. Данные охватывают период с 1782 по 1830 год, причем первые наблюдения солнечных пятен относятся к 1788 году и идут параллельно с наблюдениями Дерффлингера [91] и Прантнера [92]. Данные, записанные в последние годы, пересекаются с наблюдениями Швабе [9].

Отсканированные страницы были просмотрены и выписаны в таблицы все записи, относящиеся к измерениям времени наблюдений солнечных

Таблица 6.2: Ссылки на оцифрованные каталоги Оноре Фложерга.

Годы	Ссылка
1782–1798	https://bibnum.obspm.fr/ark:/11287/WDC9B
1798–1808	https://bibnum.obspm.fr/ark:/11287/1hnHF
1808–1816	https://bibnum.obspm.fr/ark:/11287/d6gPS
1816–1828	https://bibnum.obspm.fr/ark:/11287/13HDQ
1828–1830	https://bibnum.obspm.fr/ark:/11287/2KV00

пятен. При этом также учитывались текстовые замечания по процедуре наблюдения (например, ориентация телескопа). Числовые записи представлены в табличном виде в GitHub репозитории <https://github.com/observethesun/Flaugergues/>. В репозитории содержится 6 таблиц отдельно для каждого типа наблюдений (детальнее про типы наблюдений будет говориться далее):

- records_ec.csv – наблюдения во время затмений
- records_hv.csv – наблюдения с перекрестной сеткой
- records_ob.csv – наблюдения с косой сеткой
- records_rh.csv – наблюдения с ромбической сеткой
- records_st.csv – одиночные транзиты
- records_w3.csv – тройные транзиты

В таблице 6.3 приведено описание колонок таблиц с оцифрованными записями.

Таблица 6.3: Описание колонок таблиц в разделе <https://github.com/observethesun/Flaugergues/tree/main/records>.

Название колонок	Описание
obs_id	Уникальный идентификатор записи (запись может содержать несколько пятен)

Продолжение на следующей странице

Таблица 6.3 – *Продолжение с предыдущей страницы*

Название колонки	Описание
recorded_time	исходное время
modified_time	Измененное время для исправления возможных ошибок в реконструкции координат
object	Тип объекта: S – солнечный диск, t – солнечное пятно (от фр. tache – пятно)
event	Название линии контакта. Символ "?" означает, что линия не была указан в записях.
rising	True, если предполагается, что запись сделана до полудня
sidereal	True, если записанное время является боковым
pole	Указание на солнечный полюс (в соответствии с оригинальными обозначениями). "N" - северный полюс, S – южный полюс, SP – верхний край (предполагается, что это то же самое, что и N), IN – нижний край (предполагается, что это то же самое, что и S). Пустые ячейки означают, что полюс не был указан в записях, и его не удастся однозначно определить по записям до или после этого дня.

Для удобства дальнейших расчетов местное время наблюдений переводится в систему времени UTC. Для этого необходимо знать местоположение наблюдателя. Предположительно, Фложерг проводил наблюдения вблизи города Вивье, Франция – $44^{\circ}29' \text{ N}$ и $4^{\circ}41' \text{ E}$. В книге 1782–1798 годов Фложерг определял координаты обсерватории как $44^{\circ}29'04'' \text{ N}$ и $4^{\circ}40'56'' \text{ E}$.

Следует также отметить, что в некоторые периоды Фложерг использовал звездное время вместо солнечного времени. В частности, звездное время использовалось с 1809 декабря 23 по 1816 сентября 4, с 1820 июня 1 по 1823 февраля 6 и с 1825 февраля 21 по 1825 сентября 3. Этот момент учитывается при переводе наблюдений в UTC.

Таблица 6.4: Наблюдение 7 июля 1796 времен прохождения солнечного диска и пятна через систему на вертикальных и горизонтальных осями координатной сетки телескопа.

Объект	Ось сетки	Время
Лимб Солнца	v	09:01:09
Лимб Солнца	h	09:02:00
Пятно	v	09:03:21.5
Пятно	h	09:04:02.5
Лимб Солнца	v	09:04:30
Лимб Солнца	h	09:05:11

6.2.2. Восстановление координат в прямоугольной сетке

Фложерг использовали классическую перекрестную сетку в периоды 1796–1799 гг. и 1824–1830 гг. Он назвал направляющие этой сетки горизонтальным и вертикальным, поскольку в действительности они должны представлять азимутальную систему координат. В таблице 6.4 приведен пример серии наблюдений прохода солнечного диска и солнечного пятна, наблюдавшегося в 7 июля 1796. Рисунок 6.19 визуализирует эти события. Обратим внимание, что на рисунке показан прямой ход движения Солнца, тогда как на самом деле Фложерг мог наблюдать его в перевернутом или зеркальном виде.

Чтобы вывести гелиографические координаты солнечного пятна, сначала вычислим разницу во времени для контактов солнечного диска:

$$\begin{aligned}\Delta_v &= t(\odot \text{ at } v \text{ second time}) - t(\odot \text{ at } v \text{ first time}) \\ \Delta_h &= t(\odot \text{ at } h \text{ second time}) - t(\odot \text{ at } h \text{ first time})\end{aligned}\quad (6.1)$$

Из уравнения (6.1) получаем угол наклона (обозначаемый как i) между горизонтальной осью и линией движения Солнца:

$$|i| = \arctan(\Delta_v/\Delta_h) \quad (6.2)$$

Обратим внимание, что что угол i полагается отрицательным для восходя-

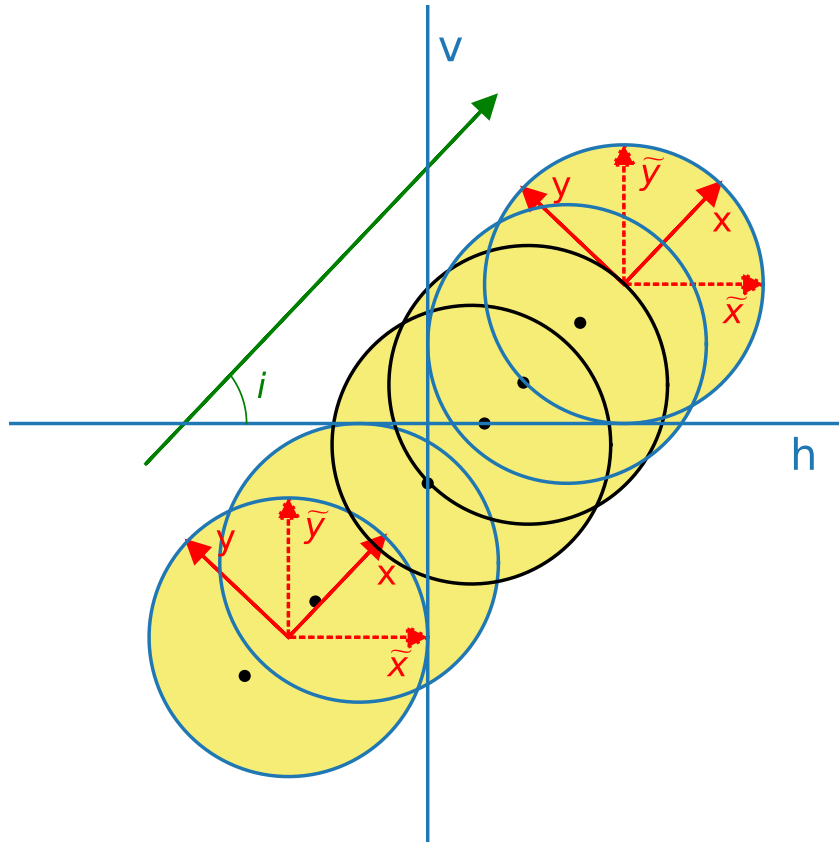


Рис. 6.19: Последовательность проходов солнечного диска и солнечного пятна (черная точка) через горизонтальные (h) и вертикальные (v) оси в соответствии с таблицей 6.4. Синие круги показывают контакты солнечного диска с осями. Черные круги относятся к контактам солнечного пятна с направляющими. Зеленая стрелка параллельна линии движения Солнца и указывает его направление. Наклон этой линии к горизонтальной линии обозначается как i . Красные стрелки показывают систему координат x, y , движущуюся вместе с солнечным диском. Обратим внимание, что Солнце восходит ($i < 0$). Рисунок из работы [112].

щего Солнца и положительным для нисходящего.

В частности, уравнения (6.1) и (6.2) позволяют оценить солнечный ”радиус”, измеряемый в единицах времени, по формуле

$$2\rho_{\odot} = \Delta_h \sin |i| = \Delta_v \cos |i| \quad (6.3)$$

Обратим внимание, что радиус измеряется в единицах времени.

Затем вычислим разницу во времени между контактами солнечных пятен и солнечного диска:

$$\begin{aligned} \delta_v &= t(\text{Sunspot at } v) - t(\odot \text{ at } v \text{ first time}) \\ \delta_h &= t(\text{Sunspot at } h) - t(\odot \text{ at } h \text{ first time}) \end{aligned} \quad (6.4)$$

Из уравнений (6.1) и (6.4) получаем $\tilde{x}$ - и $\tilde{y}$ -координаты солнечного пятна, где $\tilde{x}$ -ось параллельна горизонтальной направляющей, $\tilde{y}$ -ось параллельна вертикальной направляющей, а радиус Солнца равен единице:

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= 1 - 2\delta_v/\Delta_v \\ \tilde{y} &= 1 - 2\delta_h/\Delta_h \end{aligned} \quad (6.5)$$

Обратим внимание, что приведенные выше выражения справедливы только при восходящем Солнце. Следующим шагом делается поворот координат $(\tilde{x}, \tilde{y})$ на угол i , чтобы получить координаты (x, y) , где ось x параллельна движению Солнца, ось y указывает на северное полушарие, а радиус Солнца равен единице. Последняя система координат будет также использоваться для других типов измерений. В частности, для контактов, приведенных в таблице 6.4, получаем $\rho_{\odot} = 69.23$ с, $i = -46.46^\circ$, $x = -0.42$, и $y = 0.04$.

Последний шаг – применение параметров B_0 , L_0 и P ориентации диска Солнца, вычисленных для времени наблюдения, для получения широты b и кэррингтовской долготы L . В частности, для солнечного пятна из таблицы 6.4 получаем $b = 5.9^\circ$, $L = 285.6^\circ$.

Теперь обсудим модификации формул для заходящего Солнца. В таб-

Таблица 6.5: Наблюдения 7 июля 1796.

Объект	Ось	Время
Лимб Солнца	h	06:48:43
Лимб Солнца	v	06:49:48
Пятно	h	06:50:44
Пятно	v	06:51:48
Лимб Солнца	h	06:51:57
Лимб Солнца	v	06:53:06

лице 6.5 приведен пример наблюдения солнечного пятна, взятого после полудня (обратите внимание, что это тот же день, что и в таблице 6.4). На рисунке 6.20 показаны контакты солнечного диска и солнечного пятна.

Для наблюдений, сделанных после полудня, угол наклона i становится положительным, и в уравнении (6.5), $\tilde{y}$ -координата становится меняет знак:

$$\tilde{y} = 2\delta_h/\Delta_h - 1 \quad (6.6)$$

В частности, для контактов, показанных в таблице 6.5, получаем $\rho_\odot = 69.28$ с, $i = 45.58^\circ$, $x = -0.33$ и $y = 0.02$, что соответствует гелиографической широте $b = 5.2^\circ$ и долготе $L = 285.9^\circ$. Сравнивая этот результат с гелиографическими координатами, полученными из таблицы 6.4, приходим к выводу, что эти два набора измерений описывают одно и то же солнечное пятно, наблюдавшееся до и после полудня в один и тот же день. Этот результат также подтверждает правильность интерпретации схемы наблюдений.

В отличие от таблицы 6.4 и таблицы 6.5, которые позволяют однозначно восстановить координаты солнечного пятна, существуют неполные наблюдения, в которых отсутствует одно или несколько событий (например, из-за облаков). Если Δ_h или Δ_v не могут быть вычислены из наблюдений, будем вычислять теоретический угол наклона i , основанный на времени и месте наблюдения, и использовать уравнение (6.2) для восстановления недостающего значения. На рисунке 6.21 показано, что для полных наблюдений существует хорошая корреляция между теоретически ожидаемыми углами наклона и углами, полученными из наблюдений.

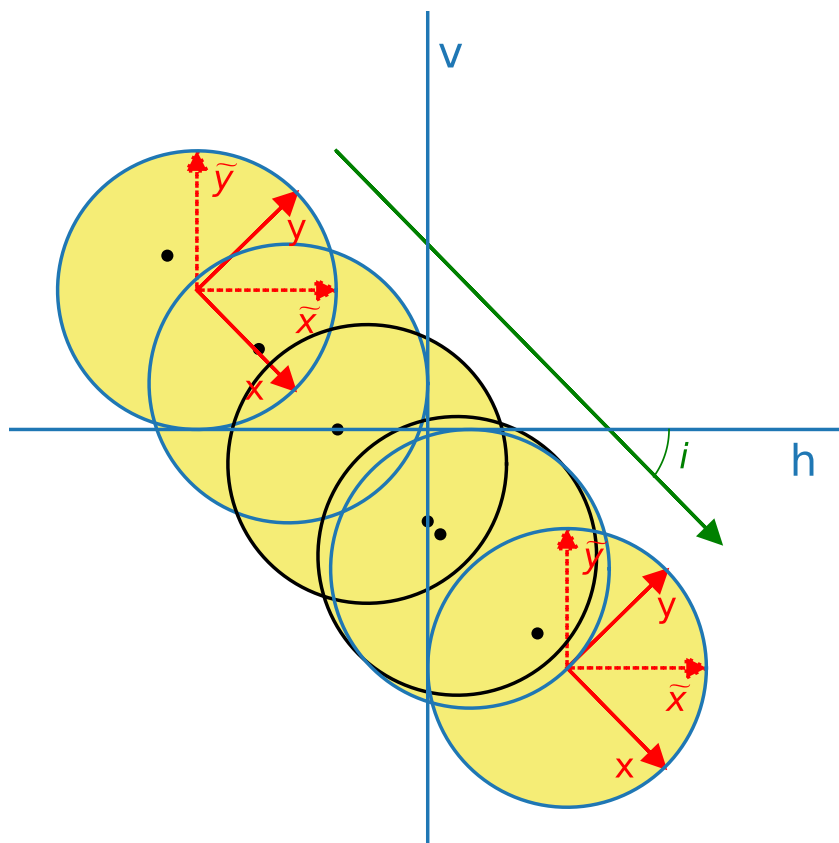


Рис. 6.20: Последовательность контактов солнечного диска и солнечного пятна, соответствующая таблице 6.5. Обозначения те же, что и на рисунке 6.19. Обратим внимание, что Солнце заходит ($i > 0$). Рисунок из работы [112].

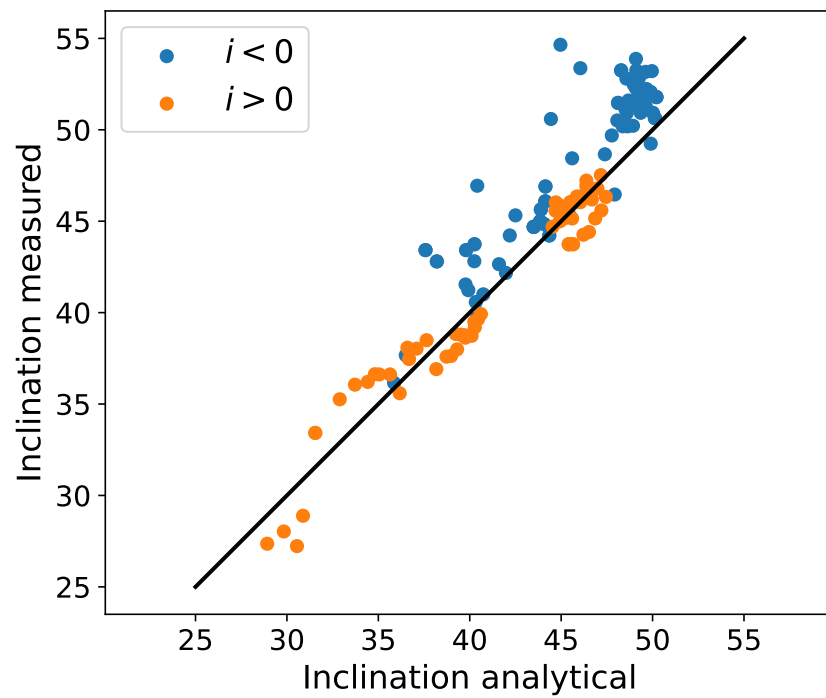


Рис. 6.21: Сравнение углов наклона линии движения Солнца, вычисленных для данного времени (аналитических) и полученных из наблюдений (измеренных, i). Величины углов приведены без знака, а синий и оранжевый цвета обозначают отрицательный (до полудня) и положительный (после полудня) знаки. Рисунок из работы [112].

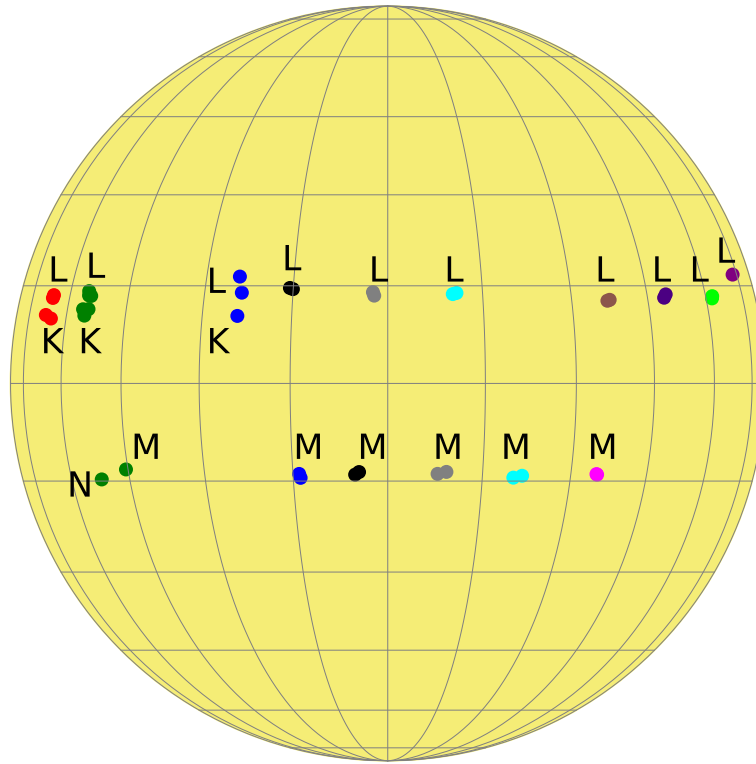


Рис. 6.22: Наблюдения солнечных пятен за период 1 по 12 сентября 1796 в гелиографических координатах. Разные цвета соответствуют разным дням. Рисунок из работы [112].

На рисунке 6.22 показаны восстановленные гелиографические координаты пятен за период с 1 по 12 сентября 1796.

Обратим внимание, что в процедуре реконструкции (6.1)–(6.5), движение диска Солнца аппроксимируется линейным образом, как прямая линия. Для того чтобы оценить возможную ошибку, вызванную этой аппроксимацией, вычислим абсолютную разницу между углом наклона i в во время первого контакта и во время последнего контакта для каждой серии наблюдения. Обнаруживается, что средняя разница составляет около 0.5° , а максимальное значение составляет 1° . Можно сделать вывод, что этот эффект кривизны траектории не должен преобладать над другими неточностями в измерениях.

6.2.3. Восстановление координат в косой сетке

В 1795–1800 и в 1806 годах Фложерг использовал сетку, в которой одна из осей (называемая часовой) была перпендикулярна линии видимого движения Солнца и дополнялась двумя симметричными наклонными осями. Симметрия следует из того факта, что для всех записей, интервал времени между контактами пятна с первой наклонной осью и часовой осью приблизительно равен интервалу времени между контактами пятна с часовой осью и второй наклонной осью. Фактическое расхождение может быть вызвано ошибками в позиционировании телескопа, которые будут оценены ниже, и, в меньшей степени, кривизной видимого движения Солнца.

В таблице 6.6 приведен пример времен контактов, полученных с помощью описанной системы осей. Рисунок 6.23 иллюстрирует эту схему. Вновь отметим, что события изображены в предположении прямого движения Солнца, в то время как Фложерг мог наблюдать их в перевернутом или зеркальном виде. Однако Фложерг обычно указывал, какой лимб Солнца (северный или южный) движется вдоль параллельной линии. Это позволяет решить, какую часть координатной сетки (верхнюю или нижнюю) следует рассматривать. Если лимб не указан, будем использовать информацию из предыдущего или последующего дня.

Угол между часовой осью и косыми осями является, вообще говоря, свободным параметром. Дальнейшие оценки показывают, что он близок к 45° . Пока же отметим, что в [76], стр. 321–322, можно найти подтверждение этой оценки (перевод с французского):

Не похоже, чтобы астрономы до сих пор использовали ромбовидную сетку для наблюдения пятен Солнца и Луны. Все известные мне наблюдения такого рода, для которых использовались сетки, проводились посредством прохождения пятен и краев Солнца и Луны ..., через горизонтальные и вертикальные оси или через часовую ось и косые оси в 45° .

Как описано выше, если разница во времени между контактами солнечного пятна с первой наклонной осью и часовой осью не равна разнице

Таблица 6.6: Наблюдения 6 марта 1795.

Объект	Ось	Время
Пятно	ob	12:49:39
Лимб Солнца	hr	12:50:12
Пятно	hr	12:50:54
Пятно	ob	12:52:13
Лимб Солнца	hr	12:52:22

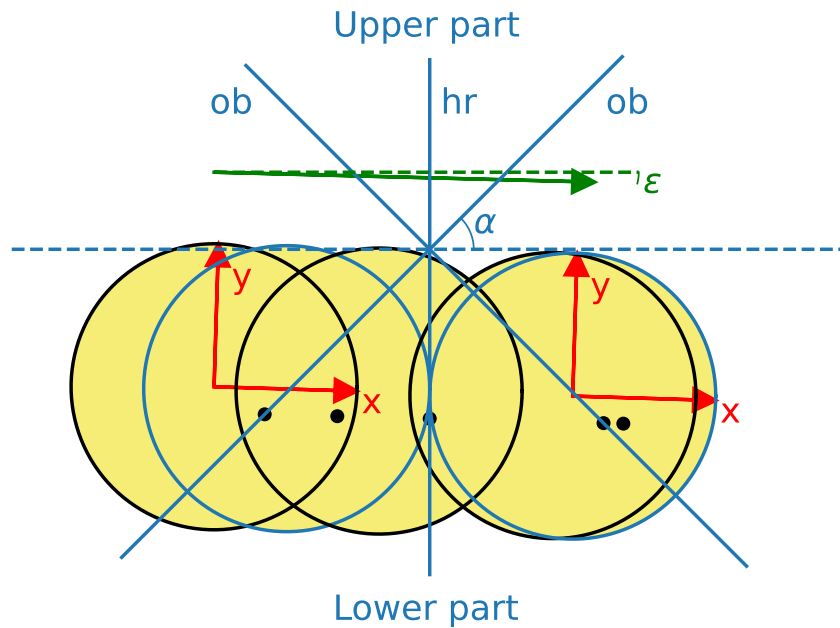


Рис. 6.23: Последовательность контактов солнечного диска и солнечного пятна с набором косых (ob) осей и часовой (hr) оси, соответствующих таблице 6.6. Синие круги показывают контакты солнечного диска с осями. Черные кружки показывают контакты солнечного пятна с проводами. Пунктирная синяя линия ортогональна часовой оси. Зеленая стрелка параллельна линии движения Солнца и показывает направление движения. Рисунок из работы [112].

во времени между контактами солнечного пятна с часовой осью и со второй наклонной осью, нам необходимо оценить ошибку позиционирования телескопа.

Пусть ε – наклон видимой траектории движения Солнца к прямой, перпендикулярной часовой оси. Будем полагать, что ε положителен по часовой стрелке, если Солнце движется в нижней части координатной сетки, и положителен против часовой стрелки, если Солнце находится в верхней части.

Обозначим

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= t(\text{Sunspot at hr}) - t(\text{Sunspot at ob first time}) \\ \Delta_2 &= t(\text{Sunspot at ob second time}) - t(\text{Sunspot at hr})\end{aligned}\tag{6.7}$$

Пусть α – угол между наклонной осью и прямой, перпендикулярной часовой оси. Далее будет показано, что он равен $\alpha = 45^\circ$. Можно показать, что

$$\varepsilon = \arctan \left(\frac{\Delta_2 - \Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \tan \alpha \right) .\tag{6.8}$$

Обозначив

$$\Delta = t(\odot \text{ at hr second time}) - t(\odot \text{ at hr first time}) ,\tag{6.9}$$

получаем

$$\rho_{\odot} = \frac{\Delta}{2} \cos \varepsilon .\tag{6.10}$$

Далее находим разности моментов контакта для солнечного пятна:

$$\begin{aligned}\delta_1 &= t(\text{Sunspot at hr}) - t(\odot \text{ at hr first time}) \\ \delta_2 &= t(\text{Sunspot at ob first time}) - t(\odot \text{ at hr first time})\end{aligned}\tag{6.11}$$

Отметим, что $\delta_2 = \delta_1 - \Delta_1$ может принимать отрицательные значения, как, например, на рисунке [6.23](#).

Теперь удобно перейти в систему координат, движущейся вместе с солнечным диском. В этой системе координат будем наблюдать за осями, проходящими через диск. Положение солнечного пятна определяется пересече-

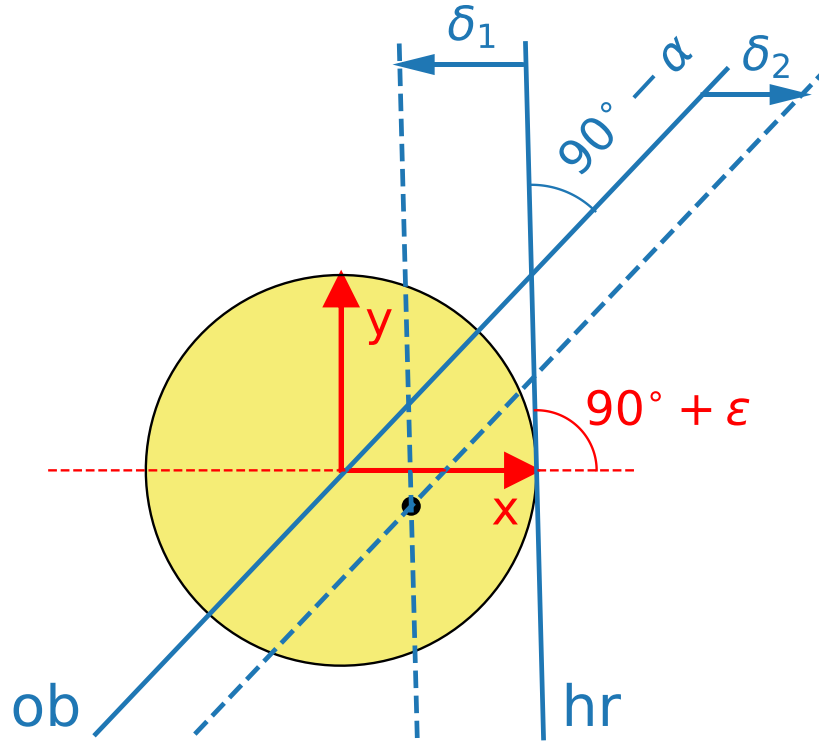


Рис. 6.24: К определению положения солнечного пятна в нижней части сетки. Красными стрелками показана система координат, центрированная и нормированная по солнечному диску, осью x параллельно небесному экватору. Сплошные синие линии показывают положение часовой оси и первой наклонной оси в момент первого контакта диска с часовой осью. Пунктирные синие линии показывают положение сплошных синих линий в два разных момента времени, соответственно сдвинутых на δ_1 и δ_2 . Пересечение пунктирных линий определяет положение солнечного пятна. Рисунок из работы [112].

нием осей, которые двигались δ_1 и δ_2 секунд от первого контакта солнечного диска с часовой осью (см. иллюстрацию на рисунке 6.24).

Учитывая, что $-1 \leq x \leq 1$ и $-1 \leq y \leq 1$, получаем систему линейных уравнений, которая определяет положение солнечного пятна:

$$\begin{aligned} (y + c)\rho_{\odot} &= c \tan(90^\circ + \varepsilon) \left(x\rho_{\odot} - \frac{\rho_{\odot}}{\tan((90^\circ + \varepsilon)/2)} + \delta_1 \right) \\ (y + c)\rho_{\odot} &= -c \tan(\alpha + \varepsilon) \left(x\rho_{\odot} - \frac{\rho_{\odot}}{\tan((90^\circ + \varepsilon)/2)} + \delta_2 \right), \end{aligned} \quad (6.12)$$

где $c = 1$, если Солнце находится в верхней части сетки, и -1 в противном случае.

Решение имеет вид

$$x = \frac{1}{\tan((90^\circ + \varepsilon)/2)} - \frac{1}{\rho_\odot} \frac{\delta_1 \tan(90^\circ + \varepsilon) + \delta_2 \tan(\alpha + \varepsilon)}{\tan(90^\circ + \varepsilon) + \tan(\alpha + \varepsilon)}, \quad (6.13)$$

и координата y определяется из первого или второго уравнения в системе (6.12).

При $\varepsilon = 0$ решение упрощается

$$\begin{aligned} x &= 1 - \frac{\delta_1}{\rho_\odot} \\ y &= -c + c \frac{\delta_1 - \delta_2}{\rho_\odot} \tan \alpha, \end{aligned} \quad (6.14)$$

Наконец, используя параметры B_0 , L_0 и P для времени наблюдения, переводим x и y в гелиографические координаты.

Для контактов, показанных в таблице 6.6, в частности, получаем $\varepsilon = 1.49$, $\rho_\odot = 64.98$ с, $x = 0.36$, и $y = -0.18$. Они соответствуют гелиографической широте $b = -8.1^\circ$ и долготе $L = 295.4^\circ$.

В ряде наблюдений отсутствует либо первый, либо второй контакт солнечного пятна с наклонными осями. В этом случае предполагаем, что $\varepsilon = 0$ и $\Delta_1 = \Delta_2$. Далее находим δ_2 как $\delta_2 = \delta_1 - \Delta_1$ или $\delta_2 = \delta_1 - \Delta_2$.

В том случае, когда одно и то же пятно было наблюдалось как в верхней, так и в нижней части координатной сетки, можно оценить значение угла α . Рассмотрим два наблюдения одного и того же пятна, сделанные 4 марта 1795 года в разных частях координатной сетки (см. таблицу 6.7). Для простоты будем пренебрегать ошибкой позиционирования (т.е. предполагаем $\varepsilon = 0$) и используем второе уравнение в системе (6.14) для оценки α .

Для первой записи в таблице 6.7 получаем $\delta_1 = 83$ с, $\delta_2 = 26$ с и $\rho_\odot = 65.5$ с, а для второй записи $\delta_1 = 82$ с, $\delta_2 = 8$ с и $\rho_\odot = 65$ с. Подставляя эти значения в уравнение (6.14) и учитывая, что y -координата в обоих случаях одинакова, получаем $\tan \alpha = 1.004$ и делаем вывод, что $\alpha = 45^\circ$.

На рисунке 6.25 показаны реконструированные положения солнечных пятен за периода 3–6 марта 1795. Поскольку положение пятна сместилось почти на 30° между двумя последними днями, очень вероятно, что последняя дата на самом деле была 7 марта 1795.

Таблица 6.7: Два наблюдения одного и того же солнечного пятна 4 марта 1795 г. Первый набор измерений делался в нижней части координатной сетки, второй – в верхней. Солнечное пятно обозначено как *grande* (большое) в оригинальных записях.

Объект	Ось	Время	Время
		нижняя часть	верхняя часть
Лимб Солнца	hr	12:55:34	01:01:58.5
Пятно	ob	12:56:00	01:02:07
Пятно	hr	12:56:57	01:03:21
Лимб Солнца	hr	12:57:45	01:04:09
Пятно	ob	12:57:55	01:04:30

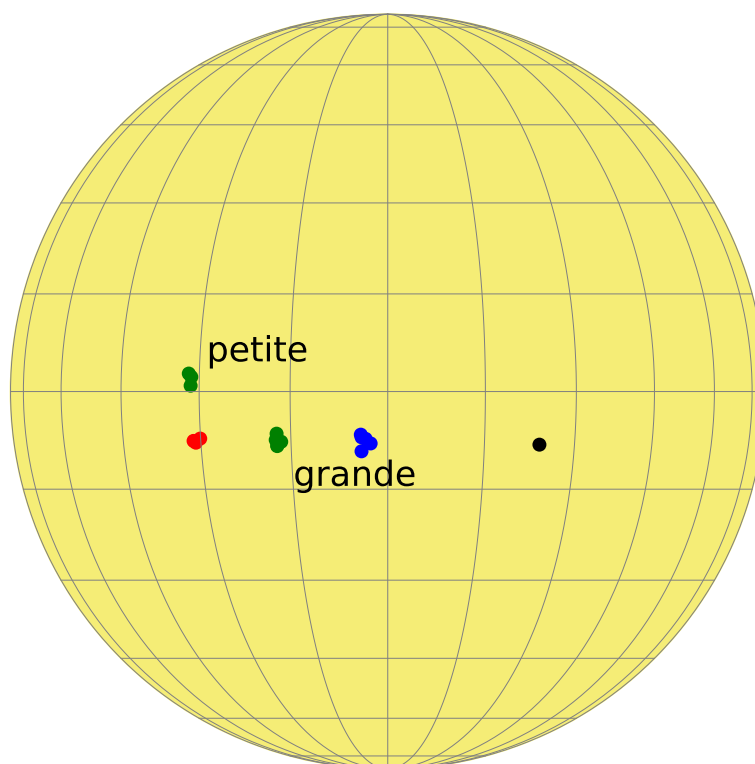


Рис. 6.25: Положение солнечных пятен с 3 по 6 (скорее всего, 7-е) марта 1795 в гелиографических координатах. Разные цвета соответствуют разным дням в порядке красного, зеленого, синего и черного. Два солнечных пятна, наблюдавшиеся в 1795 году 4 марта, обозначены как *grande* (большое) и *petite* (малое). Рисунок из работы [112].

В записях нашелся один день (14 октября 1796), когда Флержер проводил наблюдения как с наклонной сеткой, так и с перекрестной сеткой для одного и того же солнечного пятна. Это позволяет проверить методы реконструкции координат. Два измерения с перекрестной сеткой дают $b = 3.6^\circ$, $L = 23.5^\circ$ и $b = 3.3^\circ$, $L = 23.8^\circ$. Два измерения с наклонной сеткой дают $b = 4.1^\circ$, $L = 25.4^\circ$ и $b = 3.3^\circ$, $L = 24.8^\circ$. Поскольку оба метода дают одинаковые координаты, можно сделать вывод, что наблюдалось одно и то же солнечное пятно и записи правильным образом интерпретируются.

6.2.4. Восстановление координат в ромбической сетке

В этой схеме наблюдений, использовавшейся в 1813–1830 годах, координатная сетка образует ромб, а Солнце движется через верхнюю или нижнюю часть ромба (см. рисунок 6.26). Сначала ведущая часть солнечного диска касается восточной стороны ромба снаружи (контакт 1), затем ведущая часть солнечного диска касается западной стороны ромба изнутри (контакт 2), затем ведомая часть солнечного диска касается восточной стороны ромба изнутри (контакт 3), и, наконец, ведомая часть солнечного диска касается западной стороны ромба снаружи (контакт 4). Между первым и последним контактами солнечное пятно касается восточной и западной сторон ромба. В таблице 6.8 приведен пример времени контактов, которое соответствует рисунку 6.26.

Обратим внимание, что на рисунке 6.26 показано прямое движение Солнца, в то время как Флержер наблюдал перевернутое изображение (текстовое замечание Флержера от 5 октября 1816 подтверждает это предположение). Это следует учитывать при интерпретации зарисовок в его рукописи, которые указывают, в какой части ромба наблюдалось Солнце.

Угол α в основании ромба является свободным параметром. В работе [76] Флержер сравнивает различные типы ромбов относительно их точности, а также практичности. Флержер сравнивает ромб Брэдли¹ с $\alpha = \arctan 2 \approx 63.4^\circ$ и ромб, состоящий из равносторонних треугольников с $\alpha = 60^\circ$. Ромб Брэдли получается из ромба, длинная диагональ ко-

¹ Джеймс Брэдли (1692–1762), английский астроном в Гринвиче [233]

Таблица 6.8: Наблюдения 2 июля 1830 г.

Объект	Ось	Время
Лимб Солнца	contact 1	02:41:24
Пятно	in	02:41:59.5
Лимб Солнца	contact 2	02:42:39
Пятно	out	02:43:23
Лимб Солнца	contact 3	02:44:03
Лимб Солнца	contact 4	02:45:10

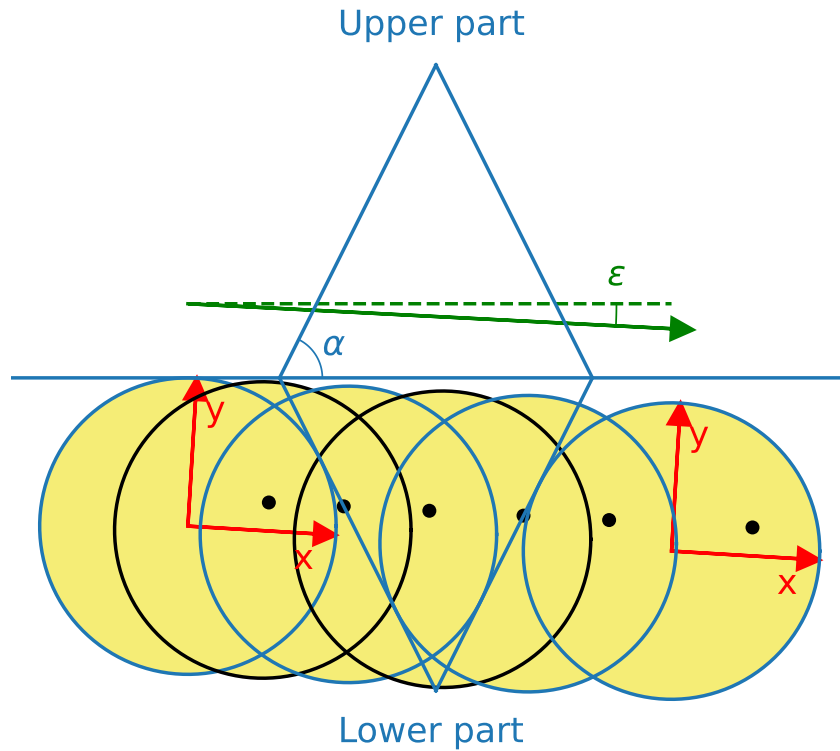


Рис. 6.26: Последовательность контактов солнечного диска и солнечного пятна с ромбической сеткой, соответствующий таблице 6.8. Синими кружками показаны контакты солнечного диска со сторонами ромба. Черные круги показывают контакты солнечного пятна со сторонами ромба. Зеленая стрелка показывает направление движения Солнца. Угол между короткой диагональю ромба и линией движения Солнца обозначается ε (обратим внимание, что $\varepsilon > 0$ на этом рисунке). Красные стрелки показывают систему координат, привязанную к солнечному диску, причем ось x параллельна видимому движению Солнца. Рисунок из работы [112].

торого в два раза длиннее короткой диагонали. Фложерг не говорит, какой из них он использовал на самом деле, но он завершает свои рассуждения словами

Вычисление разности склонений немного упрощается при использовании ромба Брэдли, но это небольшое преимущество не компенсирует трудности построения именно такого ромба. Я предлагаю астрономам заменить ромб, выбранный Брэдли, ромбом, состоящим из двух противоположных равносторонних треугольников с общим основанием, которое становится малой диагональю этого ромба. Описание равностороннего треугольника, о котором идет речь в первом предложении элементов Евклида, является самой простой и легкой из всех геометрических операций. Таким образом, можно будет с наибольшей точностью построить систему, который я предлагаю...

Хотя $\arctan 2 \approx 63.4^\circ$ близок к 60° , попытаемся оценить α из записей, минимизируя широтный дрейф солнечных пятен между соседними днями.

Обычно Фложерг выравнивал ромб так, чтобы Солнце двигалось параллельно основанию нижней или верхней части ромба. В этом идеальном случае разница во времени между контактом 1 и контактом 3 равна разнице во времени между контактом 2 и контактом 4. Однако из-за ошибок в позиционировании прибора эти две разницы во времени становятся неравными (предполагаем при этом, что линия движения Солнца является прямой линией). Например, в таблице 6.8 они составляют 159 и 151 секунду соответственно. Первая цель – определить наклон линии движения солнечного диска относительно основания нижней или верхней части ромба.

Предположим, что Солнце пересекает нижнюю часть ромба, как показано на рисунке 6.26 и пусть ε будет углом между основанием нижней части ромба и линией движения Солнца. Будем считать, что угол ε положителен по часовой стрелке в нижней части и положителен против часовой стрелки в верхней части. Пусть

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= t(\odot \text{ contact } 3) - t(\odot \text{ contact } 1) \\ \Delta_2 &= t(\odot \text{ contact } 4) - t(\odot \text{ contact } 2).\end{aligned}\tag{6.15}$$

Тогда для нижней части ромба получаем

$$\begin{aligned} 2\rho_{\odot} &= \Delta_1 \sin(\alpha - \varepsilon) \\ 2\rho_{\odot} &= \Delta_2 \sin(\alpha + \varepsilon), \end{aligned} \quad (6.16)$$

где α – угол наклона сторон ромба к основанию нижней и верхней части ромба.

Из уравнения (6.16) получаем

$$\varepsilon = \arctan \left(\frac{\Delta_1 - \Delta_2}{\Delta_1 + \Delta_2} \tan \alpha \right). \quad (6.17)$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} \delta_1 &= t(\text{sunspot in}) - t(\odot \text{ contact 1}) \\ \delta_2 &= t(\odot \text{ contact 4}) - t(\text{sunspot out}). \end{aligned} \quad (6.18)$$

Теперь перейдем в систему координат, движущуюся вместе с солнечным диском (см. рисунок 6.27).

Учитывая, что $-1 \leq x \leq 1$ и $-1 \leq y \leq 1$, получаем систему линейных уравнений, которая определяет положение солнечного пятна как пересечение двух прямых:

$$\begin{aligned} (y + c)\rho_{\odot} &= c \tan(\alpha - \varepsilon) \left(x\rho_{\odot} - \rho_{\odot} \tan \frac{\alpha - \varepsilon}{2} + \delta_1 \right) \\ (y + c)\rho_{\odot} &= -c \tan(\alpha + \varepsilon) \left(x\rho_{\odot} + \rho_{\odot} \tan \frac{\alpha + \varepsilon}{2} - \delta_2 \right), \end{aligned} \quad (6.19)$$

причем $c = 1$ в нижней части ромба $c = -1$ в верхней.

Решение имеет вид

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\tan(\alpha - \varepsilon) + \tan(\alpha + \varepsilon)} \times \\ &\quad \left[\tan(\alpha - \varepsilon) \left(\tan \frac{\alpha - \varepsilon}{2} - \frac{\delta_1}{\rho_{\odot}} \right) - \right. \end{aligned}$$

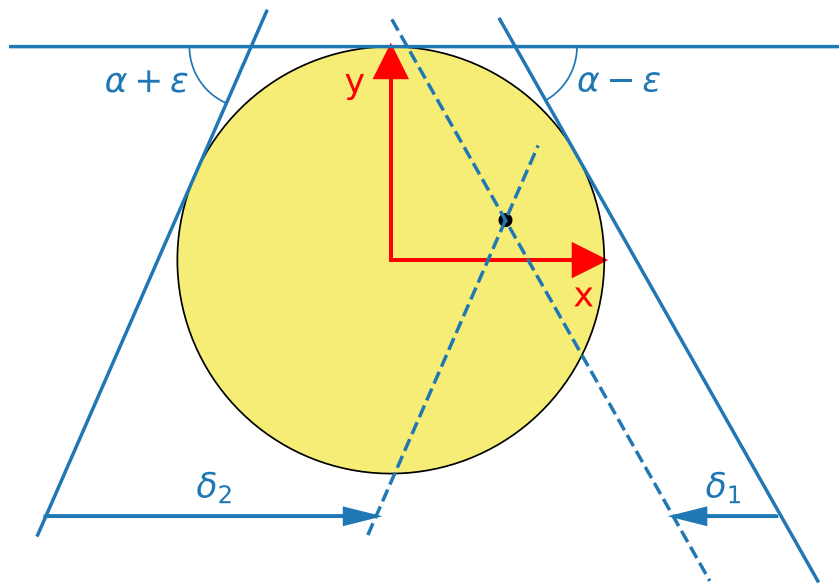


Рис. 6.27: К определению координат солнечных пятен в нижней части ромба. Красные стрелки показывают систему координат, привязанную к солнечному диску, ось x параллельна линии видимого движения Солнца. Наклонные синие линии показывают две стороны ромба в момент первого и второго внешнего контакта с солнечным диском. Пунктирные линии показывают эти же стороны ромба, сдвинутые по времени на δ_1 и δ_2 . Пересечение пунктирных линий определяет положение солнечного пятна. Рисунок из работы [112].

$$\tan(\alpha + \varepsilon) \left(\tan \frac{\alpha + \varepsilon}{2} - \frac{\delta_2}{\rho_{\odot}} \right) \Bigg] \quad (6.20)$$

а координата y находится из уравнения (6.19).

В некоторых наблюдениях Фложерг пропускал внутренние контакты 2 и 3 и отмечал только внешние контакты 1 и 4. В таких случаях не удастся оценить ε и будем предполагать $\varepsilon = 0$. Без внутренних контактов также не удастся получить $\rho_{\odot}$ и придется принять постоянное значение $\rho_{\odot} = 65$ с. Заметим, что для $\varepsilon = 0$ решение упрощается до

$$x = \frac{\delta_2 - \delta_1}{2\rho_{\odot}} \quad (6.21)$$

$$y = -c + c \tan \alpha \left(\frac{\delta_1 + \delta_2}{2\rho_{\odot}} - \tan \frac{\alpha}{2} \right) \dots \quad (6.22)$$

Для того чтобы оценить α , выберем ряд наблюдений солнечных пятен продолжительностью пять дней и более. Затем будем изменять α от 55° до 70° и вычисляем сумму дисперсий широт каждого пятна. На рисунке 6.28 показано, что минимальная дисперсия находится около $\arctan 2$ и дальше от 60° , что соответствовало бы ромбу из равносторонних треугольников. На этом основании для восстановления координат будем использовать $\alpha = \arctan 2$.

На рисунке 6.29 показаны восстановленные гелиографические координаты для периода 4–12 апреля 1813 г. Это одна из самых длинных серий последовательных наблюдений одной и той же группы пятен.

Отметим, что оценка ошибок позиционирования с помощью уравнения (6.17) дает в большинстве случаев $|\varepsilon| < 3^\circ$.

6.2.5. Восстановление координат пятен на основе наблюдений солнечных затмений

Во время двух солнечных затмений – 4 июня 1788 года и 19 ноября 1816 года – Фложерг зафиксировал время контакта диска Луны с солнечными

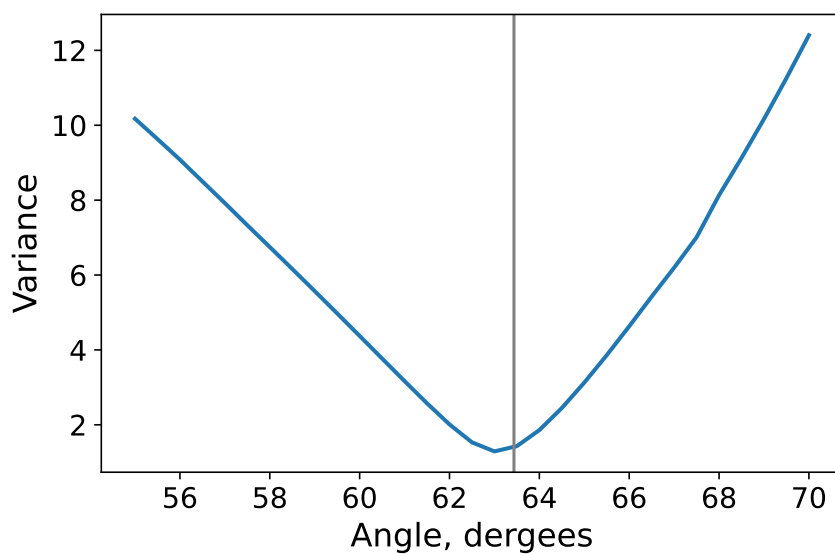


Рис. 6.28: Сумма дисперсий широт для нескольких длинных серий наблюдений солнечных пятен в зависимости от угла α . Вертикальная серая линия соответствует $\arctan 2$. Рисунок из работы [112].

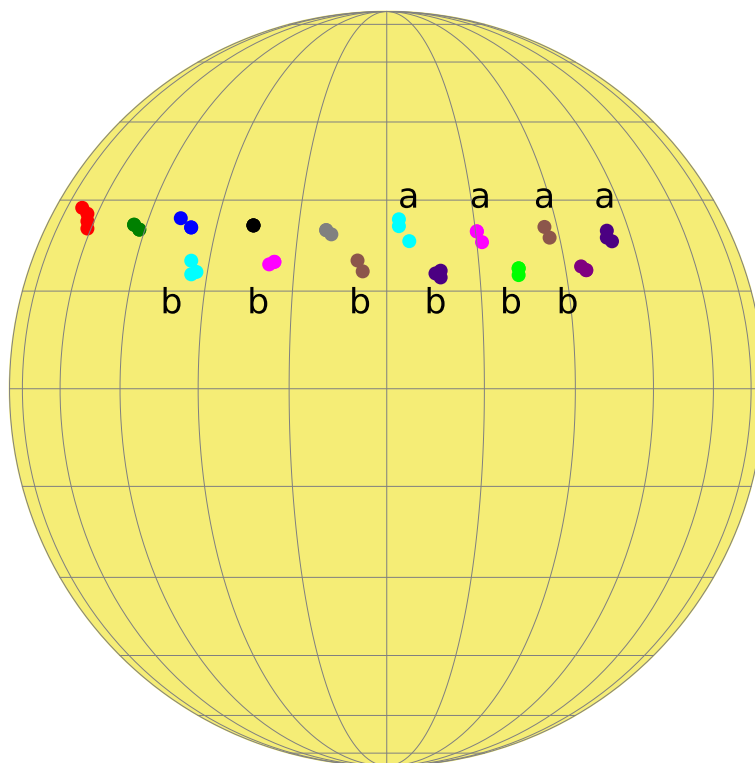


Рис. 6.29: Наблюдения солнечных пятен в период 4–14 апреля 1813 г. в гелиографических координатах. Цвета отвечают различным дням. Рисунок из работы [112].

Таблица 6.9: Контакты во время солнечного затмения 19 ноября 1816.

Событие	Время по каталогу	UTC время
Начало затмения	8:27:12	8:04:15
Первый контакт с пятном	9:21:27	8:58:39
Второй контакт с пятном	10:30:34	10:07:45
Конец затмения	10:46:28	10:23:39

пятнами. Это позволяет восстановить координаты солнечных пятен. Начнем с последнего затмения, поскольку в этот день Флджерг также измерял положение солнечных пятен с помощью ромбовидной сетки, поэтому можно сравнить результаты обоих методов. Для реконструкции солнечного затмения будем использовать пакет программ ASTROPY [14–16].

В таблице 6.9 приведены времена контактов солнечного затмения 19 ноября 1816 года. Используя ASTROPY, можно оценить время начала солнечного затмения как $8^{\text{h}}04^{\text{m}}15^{\text{s}}$ и время окончания как $10^{\text{h}}23^{\text{m}}39^{\text{s}}$ (оба времени – UTC и действительны для места наблюдения). Обратим внимание, что эти времена являются лишь оценками, сделанными с помощью ASTROPY. Точное определение времени затмения – это отдельная проблема, включающая множество специфических деталей (см., например, [208]). Поскольку вывод координат производится на основе разницы времен наблюдаемых контактов, абсолютное время затмения имеет здесь меньшее значение.

Примечательно, что расчетная продолжительность затмения всего на две секунды больше, чем показывают записи Флджерга. На рисунке 6.30 показаны положения Луны, соответствующие времени контакта солнечных пятен. Всего есть две точки пересечения окружностей диска Луны, но только одна точка расположена на солнечном диске. Эта точка соответствует гелиографической широте $b = 8.0^\circ$ и долготе $L = 5.9^\circ$.

Во время описанного выше солнечного затмения Флджерг, используя ромбоидную схему, также измерял положения острых концов частично закрытого Луной солнечного диска. На рисунке 6.31 показаны видимые положения Солнца и Луны, реконструированные с помощью ASTROPY по временам из таблицы 6.10. Затем восстановим гелиографические координаты двух острых концов частично перекрытого солнечного диска C' и C'' ,

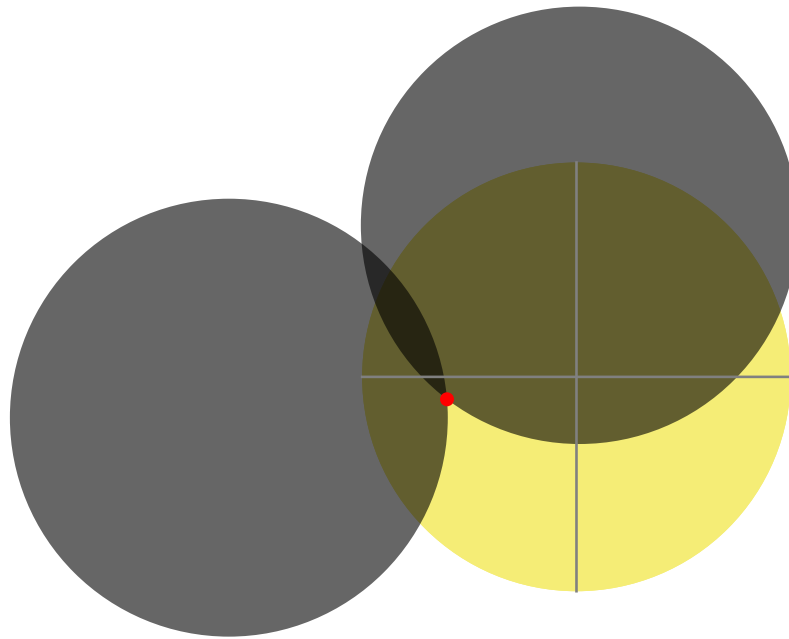


Рис. 6.30: Относительные положения Солнца и Луны в моменты контакта Луны с солнечным пятном во время солнечного затмения 19 ноября 1816 года. Красная точка на пересечении лунных дисков дает положение солнечного пятна. Вертикальное направление на графике указывает на северный полюс мира. Луна движется справа налево с течением времени. Рисунок из работы [112].

Таблица 6.10: Наблюдение солнечного затмения 19 ноября 1816 года. Символы C' и C'' соответствуют двум острым концам частично перекрытого солнечного диска.

Объект	Событие	Время по каталогу
Лимб Солнца	in	21:05:22
C'	in	21:05:35
C'	out	21:06:44
C''	in	21:07:49
C''	out	21:08:16
Лимб Солнца	out	21:09:16

Таблица 6.11: Координаты солнечного пятна, наблюдавшегося 19 ноября 1816 года, реконструированные из измерений затмения и наблюдений, сделанных с помощью ромбической сетки.

Метод	Широта	Долгота
Затмение	8.0°	5.94°
Сетка с ромбом	7.52°	6.44°
Сетка с ромбом	8.43°	6.17°

используя метод, описанный ранее для ромбической сетки.

Теперь сравним результаты. На рисунке 6.32 показаны острые концы солнечного диска и положение солнечного пятна, полученное с помощью ASTROPY (красные точки) в сравнении с положением, восстановленным из записей времен контактов (зеленые точки). Можно видеть, что оба метода дают приблизительно одинаковые координаты для солнечного пятна и обоих концов солнечного диска (см. таблицу 6.11). Эта согласованность служит независимым подтверждением правильности процедуры восстановления координат.

Используя разработанный выше подход, восстановим положения солнечных пятен, наблюдаемых во время солнечного затмения 4 июня 1788 года. Это единственные координаты пятен, которые удастся найти в наблюдениях Флержера до 1795 года. Таблица 6.12 содержит исходные записи наблюдений затмения и четырех солнечных пятен, а также время, переведенное на UTC. Разница между расчетной и наблюдаемой продолжительностью солнечного затмения составляет 26 с. На рисунке 6.33 по-

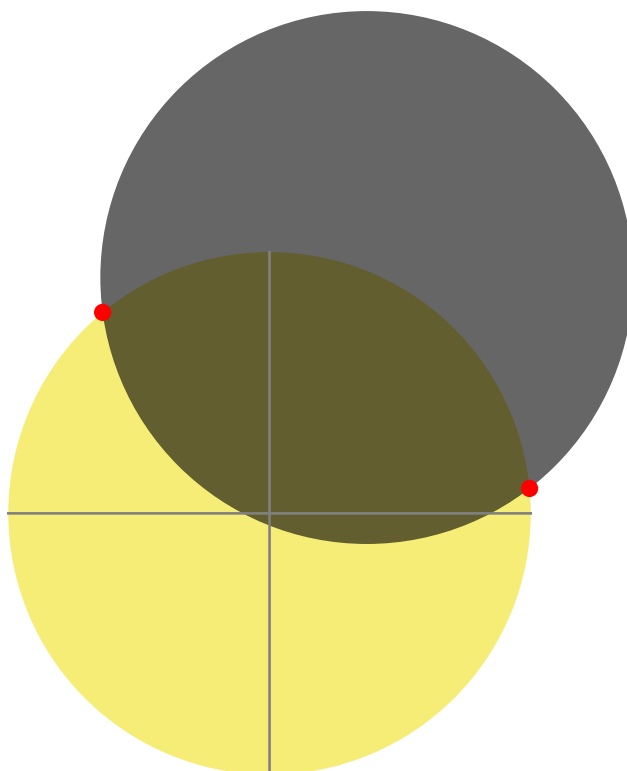


Рис. 6.31: Видимые положения Солнца и Луны, восстановленные с помощью ASTROPY, используя времена из таблицы 6.10. Красные точки в местах пересечения солнечного диска с лунным диском – это острые концы частично перекрытого солнечного диска, обозначенные как C' и C'' в таблице 6.10. Рисунок из работы [112].

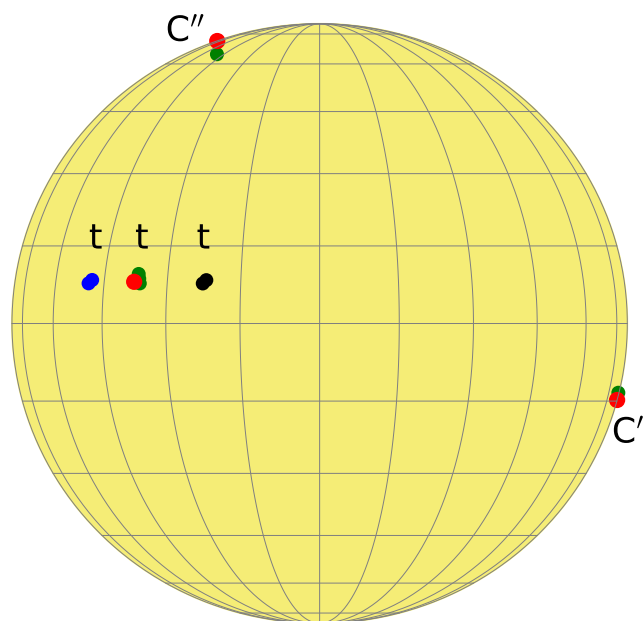


Рис. 6.32: Красными точками показаны острые концы солнечного диска (C' и C'') и положения солнечных пятен (t), полученные при реконструкции солнечного затмения 19 ноября 1816 года с помощью ASTROPY. Зеленые точки показывают соответствующие положения, восстановленные из двух измерений времен контакта. Синие и черные точки – положения солнечных пятен, восстановленные на предыдущий и следующий день. Рисунок из работы [112].

Таблица 6.12: Наблюдения солнечного затмения и солнечных пятен 4 июня 1788.

Событие	Время по каталогу	UTC время
Начало затмения	7:26:36	7:05:30
Первый контакт пятна А	7:31:40	7:10:36
Первый контакт пятна В	7:34:32	7:13:28
Первый контакт пятна С	7:35:07	7:14:04
Первый контакт пятна D	8:30:24	8:09:32
Второй контакт пятна А	8:31:32	8:10:40
Второй контакт пятна В	8:36:12	8:15:21
Второй контакт пятна С	8:37:15	8:16:24
Второй контакт пятна D	9:17:32	8:56:49
Окончание затмения	9:25:43	9:05:02

казаны видимые положения Солнца и Луны в моменты, когда солнечные пятна соприкасаются с диском Луны. Соответствующие пересечения лунных дисков дают положения солнечных пятен. Реконструированные положения солнечных пятен в гелиографических координатах также показаны на рисунке 6.33.

Интересно отметить, что в каталогах Флержера можно найти рисунок солнечного диска с положением солнечных пятен 4 июня 1788 года. Оригинальный рисунок (рисунок 6.34) выглядит довольно близко к реконструированным положениям (рисунок 6.33), однако, оригинальный рисунок содержит дополнительно два необычно больших пятна в верхнем левом квадранте. Это действительно должны быть пятна, поскольку под рисунком находится фраза, которую можно перевести как “многие люди на улице видели два больших верхних пятна”. Отметим, что согласно, например, [127] или [194], предельный диаметр солнечного пятна, видимый для людей с нормальным зрением, составляет около 40 arcsec.

Следует отметить, что рисунки целого диска, подобные рисунку 6.34, встречаются очень редко в книгах Флержера. Всего находится не более 20 рисунков, содержащих весь диск или его части которые могут быть дополнены до полного диска.

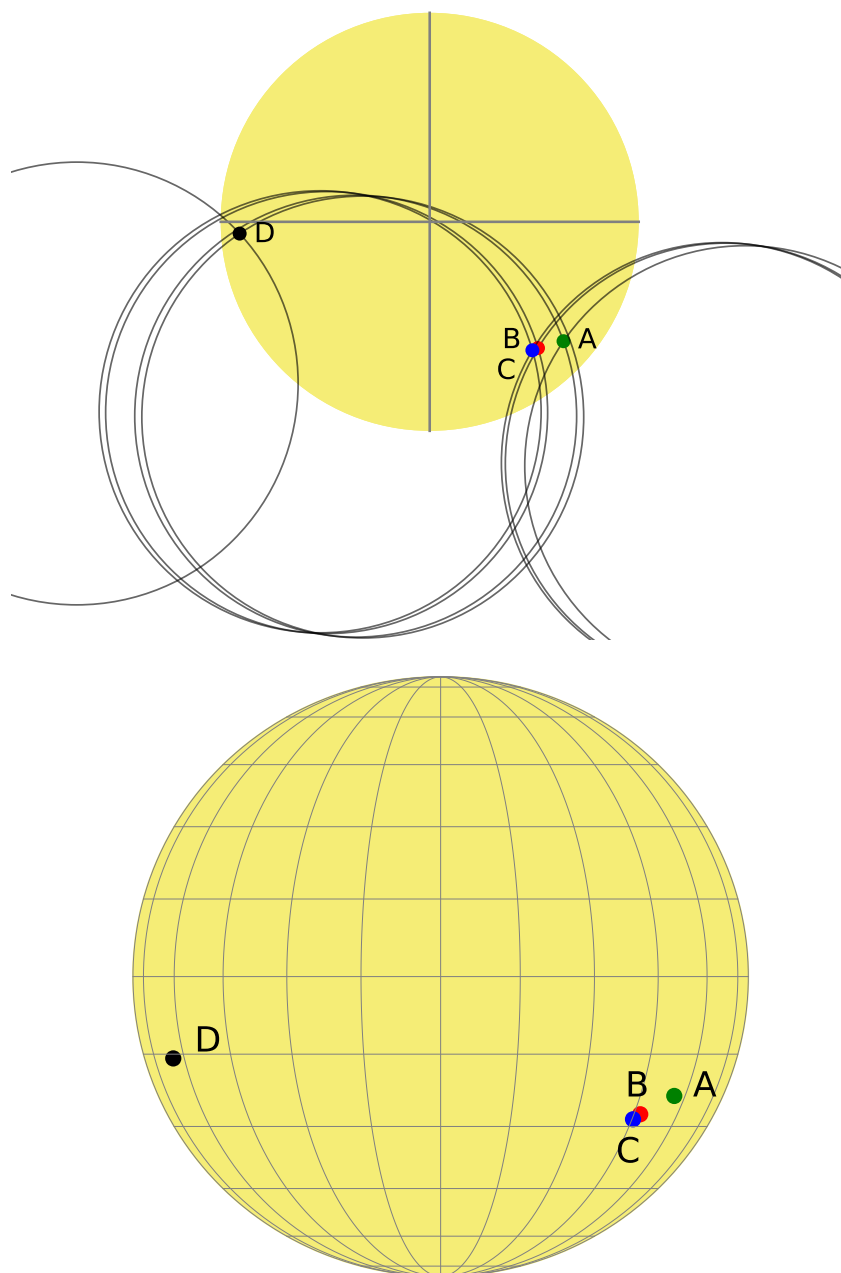


Рис. 6.33: Солнечное затмение 4 июня 1788 года реконструированное с помощью ASTROPY. Верхняя панель: черные круги показывают положение Луны в моменты, когда солнечные пятна соприкасаются с диском Луны (см. таблицу 6.12). Соответствующие пересечения дисков Луны отмечены цветными точками. Вертикаль указывает на северный полюс мира. Луна движется справа налево с течением времени. Нижняя панель: положения солнечных пятен, реконструированные в гелиографических координатах. Рисунок из работы [112].

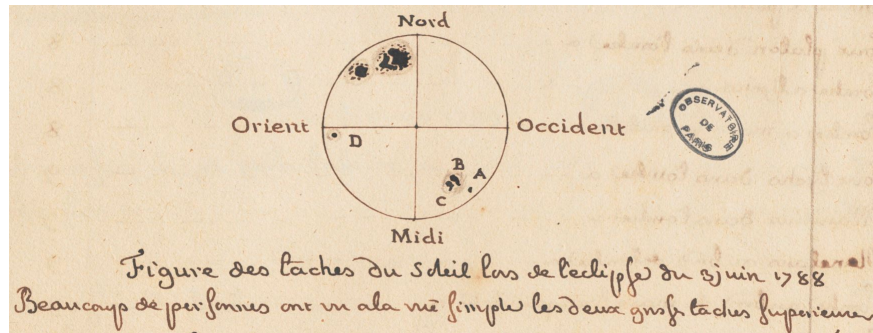


Рис. 6.34: Оригинальный рисунок с положением солнечных пятен 4 июня 1788 г. Нижнюю строку можно перевести как "Многие люди на улице видели два больших верхних пятна". Рисунок из работы [112].

6.2.6. Оценка точности измерений

Оценку точности измерений дает наблюдение прохода Меркурия по диску Солнца 7 мая 1799 года. Фложерг наблюдал транзит Меркурия по солнечному диску с помощью перекрестной сетки. Используя ASTROPY, реконструируем траекторию прохода Меркурия и сравним ее с положениями Меркурия, восстановленными по наблюдениям. Пять восстановленных положений показаны красным цветом на рисунке 6.35. Время первой реконструированной записи – 14:35:30, что лучше всего соответствует положению Меркурия в 14:24:26 UTC. Таким образом, можно оценить разницу во времени между часами Фложерга и UTC как 11 мин 4 с. Используя эту оценку, реконструируем положения Меркурия, согласующиеся с последующими записями. Результаты реконструкции показаны на рисунке 6.35.

Обратим внимание, что диск Меркурия показаны в масштабе, соответствующему отношению видимого размера Меркурия к солнечному диску в тот день (примерно $1/157$). Из рисунка 6.35 можно сделать вывод, что ошибки в измерении положения объекта на солнечном диске порядка видимого размера Меркурия, т.е. около 12 угловых секунд.

В целом, точность измерений ограничивается несколькими факторами. Первый из них – разрешение телескопа, т.е. насколько размытыми кажутся наблюдателю объекты на Солнце и сам лимб Солнца. Хотя есть некоторая информация о телескопах, которые мог использовать Фложерг, неясно, какой именно он использовал для наблюдений. Второй фактор – это толщина линий, образующих схему перекрестия. В-третьих, метод наблюдения

не является мгновенным и требует прохождения всего солнечного диска через каждую ось сетки. Это занимает более 3 минут, в течение которых относительное положение измеряемого объекта может измениться.

6.2.7. Выводы

Всего удалось реконструировать 527 положений солнечных пятен для 154 дней из 156 дней, для которых были соответствующие записи каталогов. Результаты реконструкции представлены в таблице по адресу <https://github.com/observethesun/Flaugergues/blob/main/coordinates.csv>. В таблице 6.13 приведено описание колонок таблицы с восстановленными координатами пятен.

Таблица 6.13: Описание колонок таблицы <https://github.com/observethesun/Flaugergues/blob/main/coordinates.csv>.

Название колонки	Описание
obs_id	Уникальный идентификатор записи наблюдения (наблюдение может содержать несколько пятен)
recorded_time	Время начала наблюдения по каталогу
sidereal	True, если использовалось звездное время
utc_time	Время UTC, соответствующее recorded_time
name	Имя пятна
lat	Широта (градусы)
long	Кэррингтоновская долгота (градусы)
cmd	Расстояние от центрального меридиана (градусы)
outlier	True, если считаем запись недостоверной
type	Тип измерения: hv – перекрестная сетка, ob – косая сетка, rh – ромбическая сетка, es – солнечное затмение
x	x-координата в системе координат, согласованной с движением солнечного диска

Продолжение на следующей странице

Таблица 6.13 – *Продолжение с предыдущей страницы*

Название колонки	Описание
y	у-координата в системе координат, согласованной с движением солнечного диска
rising	True, если предполагаем, что запись сделана до полудня
l0	Солнечный угол L0 (в градусах) для времени наблюдения
b0	Солнечный угол B0 (градусы) для времени наблюдения
p	Солнечный угол P (градусы) для времени наблюдения
incl	Угол (в градусах) между линией движения Солнца и параллельной линией телескопа для времени и места наблюдения
incl_obs	Угол (в градусах) между линией движения Солнца и параллельной линией телескопа, полученный из записи (если применимо)
incl_diff	Вычисленная абсолютная разность (в градусах) между наклоном линии движения Солнца в начале наблюдения и в конце наблюдения
err	Ошибка позиционирования (в градусах, если применимо)
r_sun	Солнечный "радиус", измеренный в единицах времени (секунды)
modified	True, если исходная запись была изменена для исправления возможных ошибок
complemented	True, если исходная запись была дополнена информацией, позволяющей восстановить координаты

Эти наблюдения дополняются измерениями одиночных контактов (которые не позволяют провести прямую реконструкцию координат), в ре-

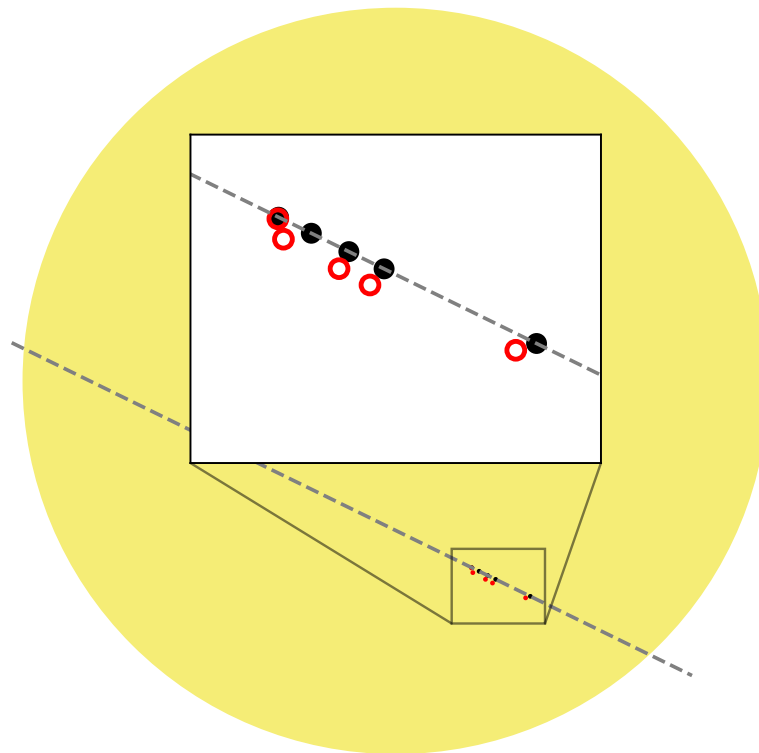


Рис. 6.35: Транзит Меркурия 7 мая 1799 г. Пунктирная линия показывает путь Меркурия, полученный с помощью ASTROPY. Красные круги показывают положение Меркурия, восстановленное по наблюдениям Флержера. Черные круги показывают истинное положение Меркурия, наилучшим образом соответствующее историческим данным. Отношение цветных кругов к солнечному диску соответствует отношению видимого размера Меркурия к солнечному диску в тот день (приблизительно $1/157$). Отдельно показана увеличенная область диска Солнца. Вертикальная ось указывает на северный полюс мира; Меркурий движется слева направо с течением времени. Рисунок из работы [112].

зультате получаем 463 дня задокументированных наблюдений солнечных пятен. Объединяя повторные наблюдения одних и тех же пятен в один и тот же день в усредненные координаты, получено 196 координат пятен. Затем эти координаты были субъективно разделены на надежные и менее надежные, основываясь на полноте информации, дополнительной текстовой информации и общем опыте обработки наблюдений. Результаты представлены в таблице 6.14

Таблица 6.14: Усредненные по нескольким наблюдениям положения солнечных пятен. Имя в колонке name отвечает оригинальному обозначению пятна из каталогов. Если для пятна не было специального обозначения, используется символ t (от фр. tache – пятно). Колонки θ , φ , cmd отвечают за широту, кэррингтоновскую долготу и расстояние от центрального меридиана. В колонке rel. (reliable) дается оценка того, можно ли полагаться на результат восстановления данного пятна. В колонке n приведено число наблюдений, по которым проводилось усреднение.

date	name	θ_{mean}	θ_{std}	φ_{mean}	φ_{std}	cmd _{mean}	cmd _{std}	n	rel.
1788-06-04	A	-23.47		130.83		55.87		1	yes
1788-06-04	B	-27.34		121.84		46.91		1	yes
1788-06-04	C	-28.43		120.24		45.32		1	yes
1788-06-04	D	-15.84		9.81		-64.6		1	yes
1795-02-12	t	11.34		226.1		11.09		1	no
1795-03-03	t	-7.5	0.26	293.45	0.54	-30.85	0.55	4	yes
1795-03-04	t_grande	-7.59	0.76	293.8	0.3	-17.13	0.34	5	yes
1795-03-04	t_petite	1.95	0.95	279.39	0.2	-31.6	0.24	3	yes
1795-03-05	t	-7.55	1	294.31	0.62	-3.63	0.64	5	yes
1795-03-07	t	-8.09		295.43		23.96		1	yes
1796-07-05	t_A	-5.92	0.32	29.47	0.25	52.85	0.3	2	yes
1796-07-05	t_B	6.09	0.44	286.87	2.77	-49.78	2.72	3	yes
1796-07-07	t_B	6.03	1.19	284.87	1.11	-22.3	3.49	5	yes
1796-07-08	t_B	5.87	0.44	285.98	1.35	-9.3	3.84	8	yes
1796-07-09	t	5.63	0.47	285.79	1.08	4.79	2.96	6	yes

Продолжение на следующей странице

Таблица 6.14 – *Продолжение с предыдущей страницы*

date	name	θ_{mean}	θ_{std}	φ_{mean}	φ_{std}	cmd_{mean}	cmd_{std}	n	rel.
1796-07-10	t	5.92	0.31	285.57	0.27	16.76	3.4	8	yes
1796-07-11	t_B	5.6	0.21	285.53	0.4	27.05	0.37	4	yes
1796-07-11	t_C	13.26	0.88	209.56	0.37	-48.87	0.41	2	yes
1796-07-11	t_D	13.35	0.57	205.89	0.94	-52.52	0.98	2	yes
1796-07-13	t_E	10.82	0.3	186.63	0.26	-39.22	0.25	4	yes
1796-07-15	t_F	10.56	1.32	186.41	0.5	-16.14	3.51	5	yes
1796-07-16	t_F	11.69	0.81	187.24	0.7	-4.94	0.76	2	yes
1796-07-19	t_G	12.96	0.48	155.79	0.18	3.51	0.13	2	yes
1796-07-20	t_G	11.5		156.68		17.48		1	yes
1796-07-24	t_H	-5.95	1.17	33.09	5.16	-53.39	5.15	4	yes
1796-07-25	t_H	-6.67	0.1	31.93	1.03	-40.97	0.97	2	yes
1796-07-26	t_H	-7.59		32.03		-27.75		1	yes
1796-07-28	t	-7.35	0.18	30.56	0.74	-2.62	0.7	2	yes
1796-07-29	t_H	-7.22	0.35	31.59	0.5	12.18	0.47	2	yes
1796-07-29	t_I	-5.93	0.4	1.93	0.21	-17.35	0.17	2	yes
1796-07-30	t_H	-6.88	1	32.41	2.11	25.76	2.06	2	yes
1796-07-30	t_I	-5.15	1.28	2.02	0.42	-4.63	0.46	2	yes
1796-07-31	t_H	-9.32		31.95		38.07		1	yes
1796-07-31	t_I	-5.55		4.21		10.27		1	yes
1796-09-01	t_K	10.19	0.39	224.53	1.51	-66.09	1.51	2	yes
1796-09-01	t_L	13.32	0.31	225.02	0.11	-65.6	0.11	2	yes
1796-09-02	t_K	11.02	0.57	222.64	0.78	-54.77	0.73	3	yes
1796-09-02	t_L	13.69	0.41	223.03	0.4	-54.38	0.41	3	yes
1796-09-02	t_M	-13.18		231.89		-45.46		1	yes
1796-09-02	t_N	-14.74		225.72		-51.62		1	no
1796-09-04	t_K	10.31		222.2		-23.91		1	yes
1796-09-04	t_L	15.18	1.79	222.25	0.52	-23.8	0.45	2	yes
1796-09-04	t_M	-14.19	0.43	232.16	0.21	-13.9	0.14	2	yes
1796-09-05	t_L	14.57	0.13	221.88	0.38	-15.3	0.35	2	yes

Продолжение на следующей странице

Таблица 6.14 – *Продолжение с предыдущей страницы*

date	name	θ_{mean}	θ_{std}	φ_{mean}	φ_{std}	cmd_{mean}	cmd_{std}	n	rel.
1796-09-05	t_M	-13.79	0.29	232.38	0.47	-4.8	0.44	2	yes
1796-09-06	t_L	13.73	0.38	221.96	0.11	-2.22	0.14	2	yes
1796-09-06	t_M	-13.71	0.22	232.69	0.95	8.52	0.98	2	yes
1796-09-07	t_L	13.79	0.12	222.04	0.45	10.52	0.42	2	yes
1796-09-07	t_M	-14.32	0.21	232.36	0.98	20.83	1.02	2	yes
1796-09-08	t_M	-13.95	0.06	232.62	0.06	34.81	0.09	2	yes
1796-09-09	t_L	12.73	0.1	221.51	0.35	36.87	0.33	2	yes
1796-09-10	t_L	13.39	0.37	220.69	0.33	49.05	0.37	2	yes
1796-09-11	t_L	13.2	0.24	220.55	0.18	62.03	0.15	2	yes
1796-09-12	t_L	16.77		217.81		72.7		1	yes
1796-10-13	t_N	3.9	0.33	24.72	0.25	-71.77	0.21	2	yes
1796-10-14	t_N	3.58	0.4	24.37	0.86	-57.54	1.95	4	yes
1796-10-23	t_N	4.48	0.08	36.48	2.81	74.14	2.72	2	yes
1796-11-13	t	4.08	1.22	52.63	0.13	7.21	0.18	2	yes
1798-11-20	t	9.72		16.44		-23.69		1	no
1798-11-23	t	2.05		8.35		7.73		1	no
1798-12-20	t	3.79	1.21	6.35	0.55	5.42	0.59	3	yes
1798-12-21	t	1.61	1.72	7.45	0.64	19.62	0.7	5	yes
1799-02-24	t_1	7.3	2.65	214.48	0.41	-0.85	0.45	3	yes
1799-02-24	t_2	5.63	2.56	202.51	0.92	-12.82	0.91	3	yes
1799-02-26	t_1	8.87		215.59		26.69		1	yes
1799-02-26	t_2	6.54		203.4		14.51		1	yes
1799-03-27	t	6.52		204.52		39.77		1	yes
1799-03-28	t	5.02	0	204.67	0.02	54.93	0	2	yes
1799-10-29	t	-28.76	0.48	139.99	1.37	-49.22	1.42	3	yes
1800-10-11	t	26.33		274.88		-15.68		1	yes
1800-10-12	t	28.11		275.15		-2.23		1	yes
1800-10-14	t	25.93		273.07		22.06		1	yes
1806-02-25	t	-12.9	0.42	251.91	0.55	-50.9	0.59	5	yes

Продолжение на следующей странице

Таблица 6.14 – *Продолжение с предыдущей страницы*

date	name	θ_{mean}	θ_{std}	φ_{mean}	φ_{std}	cmd_{mean}	cmd_{std}	n	rel.
1813-02-03	t	10.27	0.66	276.44	1.25	-46.5	1.32	3	yes
1813-02-04	t	10.56	0.92	277.44	0.32	-32.5	0.3	6	yes
1813-02-05	t	9.54	0.78	278.34	0.32	-18.58	0.34	6	yes
1813-02-06	t	10.8	0.44	278.59	0.36	-4.67	0.41	6	yes
1813-02-08	t	10.09	0.77	279.73	0.25	22	0.21	6	yes
1813-04-04	t	28.33	0.65	186.71	0.8	-66.53	0.79	4	yes
1813-04-05	t	26.28	0.61	190.16	0.8	-48.67	0.85	4	yes
1813-04-06	t	26.88	0.4	189.84	1.09	-36.64	1.18	3	yes
1813-04-07	t	27.07	0.44	189.53	0.58	-23.7	0.66	3	yes
1813-04-08	t	25.86	0.25	189.46	0.59	-10.57	0.49	3	yes
1813-04-09	t_a	25.69	1.73	188.93	0.37	2.34	0.47	3	yes
1813-04-09	t_b	18.87	0.91	153.71	0.65	-32.88	0.74	3	yes
1813-04-10	t_a	25.87	1.06	188.53	0.31	14.78	0.39	3	yes
1813-04-10	t_b	20.71	0.64	154.28	0.14	-19.46	0.09	3	yes
1813-04-11	t_a	24.5	1.27	188.17	0.54	27.84	0.39	2	yes
1813-04-11	t_b	19	1.24	156.06	0.77	-4.29	0.62	2	yes
1813-04-12	t_a	24.38	0.67	187.03	0.18	39.83	0.25	3	yes
1813-04-12	t_b	18.3	0.54	155.29	0.49	8.1	0.48	3	yes
1813-04-13	t_b	18.61	0	154.96	0.1	21.65	0	3	yes
1813-04-14	t_b	19.08	0.86	153.98	0.37	33.36	0.44	3	yes
1813-06-23	t_1	17.53	0	246.69	0.11	-27.41	0	2	yes
1813-06-23	t_2	19.35	1.2	237.78	1.19	-36.32	1.3	2	yes
1813-06-24	t_1	17.36	2.64	245.92	0.1	-14.71	0.19	2	yes
1813-06-28	t_1	17.84	0.65	245.97	0.62	38.66	0.53	2	yes
1813-07-26	t	10.69	0.51	129.43	1.1	-68.01	1.17	3	yes
1813-07-27	t_A	10.89	1.53	131.77	0.85	-52.77	0.74	3	yes
1813-07-28	t_A	12.37	0.05	133.46	0.78	-37.98	0.81	2	yes
1813-07-29	t	13.91	0	135.22	0.04	-23.04	0	2	yes
1813-08-02	t	13.06	0.49	154.19	0.66	46.11	0.76	2	yes

Продолжение на следующей странице

Таблица 6.14 – *Продолжение с предыдущей страницы*

date	name	θ_{mean}	θ_{std}	φ_{mean}	φ_{std}	cmd_{mean}	cmd_{std}	n	rel.
1813-08-03	t	13.43	0	153.44	0.11	58.67	0	2	yes
1813-09-26	t_1	-10.09	1.92	137.02	1.88	37.37	1.85	2	yes
1813-09-26	t_2	14.5	0.71	84.45	0.03	-15.2	0.06	2	yes
1813-09-28	t_2	13.49		83.48		11.09		1	yes
1813-10-02	t_2	14.25	0	85.96	0.06	66.55	0	2	yes
1813-10-09	t_1	10.76	0	4.9	0.06	77.4	0	2	no
1813-10-09	t_2	-11.19	0.4	321.8	0.69	34.3	0.64	2	no
1813-12-12	t	7.14	0.42	98.11	0.94	-65.79	0.73	3	no
1815-06-10	t	-25.3	0.93	128.55	1.23	-42.87	1.26	3	no
1816-07-04	t_m	2.86	0.65	8.03	0.57	-54.38	0.47	2	yes
1816-07-06	t_m	1.84	0	10.21	0.06	-26.02	0	2	yes
1816-07-13	t	5.37	0.51	15.58	1.19	72.13	1.27	2	yes
1816-10-05	t_1	-10.79	1.12	235.09	0.72	-39.07	0.68	3	yes
1816-10-05	t_2	-8.98	0.17	222.9	0.75	-51.26	0.71	3	yes
1816-10-08	t_1	-10.62	0.73	236.56	0.09	1.87	0.01	2	yes
1816-10-08	t_2	-9.06	0.72	225.33	0.07	-9.36	0.01	2	yes
1816-10-10	t_1	-8.16	1.03	235.18	1.39	26.72	1.38	3	yes
1816-10-10	t_2	-8.25	1.02	223.5	0.04	15.05	0.04	3	yes
1816-10-11	t_1	-9.06	1.88	234.25	1.85	39.03	1.94	2	yes
1816-10-11	t_2	-7.47	1.91	224.46	1.7	29.23	1.8	2	yes
1816-10-12	t_1	-8.92	0.35	236.45	0.78	54.13	0.88	2	yes
1816-10-12	t_2	-7.96	0.35	225.42	0.71	43.11	0.81	2	yes
1816-10-13	t_1	-9.53	1.48	234.26	0.66	66.44	0.57	2	yes
1816-10-13	t_2	-8.2	0	223.88	0.09	56.07	0	2	yes
1816-10-14	t_2	-8.05	0	223.59	0.09	67.94	0	2	yes
1816-10-15	t_3	11.84	1.13	127.64	0.59	-14.53	0.52	2	yes
1816-10-15	t_4	11.32	0.45	120.9	0.64	-21.27	0.57	2	yes
1816-10-17	t_3	11.32	0.7	127.69	0.06	11.86	0.03	2	yes
1816-10-17	t_4	10.3	1.12	120.78	0.67	4.93	0.59	2	yes

Продолжение на следующей странице

Таблица 6.14 – *Продолжение с предыдущей страницы*

date	name	θ_{mean}	θ_{std}	φ_{mean}	φ_{std}	cmd_{mean}	cmd_{std}	n	rel.
1816-10-19	t_3	9.69	0	126.06	0.03	36.52	0	2	yes
1816-10-19	t_4	10.62	0.39	120.86	0.73	31.32	0.71	2	yes
1816-10-20	t_3	10.11	0.72	125.99	1.81	49.78	1.9	2	yes
1816-10-21	t_3	9.17		124.26		60.76		1	yes
1816-10-22	t_3	9.2	0.55	122.77	0.24	72.93	0.28	3	yes
1816-10-22	t_5	3.94	0.82	336.62	2.52	-73.22	2.54	3	yes
1816-10-24	t_5	3.6	0.7	341.13	0.15	-42.86	0.06	2	yes
1816-11-16	t	7.08	0.84	9.48	4.31	-71.13	4.36	2	yes
1816-11-17	t	8.26		6.64		-61.48		1	yes
1816-11-18	t	7.86	0.47	5.52	0.73	-48.97	0.66	2	yes
1816-11-19	t	8		5.94		-37.5		1	yes
1816-11-19	t_1	7.97	0.64	6.3	0.19	-36.38	0.16	2	yes
1816-11-20	t	7.83	0.45	5.6	0.58	-22.29	0.49	2	yes
1816-11-21	t	10.05	1.49	8.36	1.59	-6.59	1.53	3	yes
1816-11-26	t	-2.15	0.49	6.4	0.78	57.76	0.88	2	yes
1816-11-27	t	-2.13	0.39	6.02	1.16	70.3	1.15	3	yes
1816-12-17	t	-1.48	0.09	5.37	0.52	-26.55	0.56	3	yes
1816-12-18	t	-0.45	1.81	7.09	0.36	-11.8	0.31	3	yes
1816-12-20	t	-2.82	0.06	9.05	0.59	16.72	0.53	3	yes
1816-12-21	t	-2.42	0.83	10.38	0.57	30.71	0.62	3	yes
1816-12-23	t	-3.07	0.65	13.58	1.7	60.25	1.8	2	yes
1816-12-24	t	-2.72	0.87	22.58	1.76	83.01	1.72	4	yes
1817-01-10	t	-0.52	0.43	180.89	206.49	-74.86	1.56	4	no
1817-02-28	t	20.55	0.56	122.13	0.38	-27.89	0.41	6	no
1824-09-19	t	34.33	0.57	12.49	0.97	-67.27	0.98	3	yes
1824-09-20	t	33.2	0.23	13.58	0.46	-53.09	0.39	4	yes
1824-09-23	t	34.64	0.4	12.2	0.34	-14.91	0.41	3	yes
1824-09-25	t	34.53	1.48	10.89	0.45	10.13	0.44	3	yes
1824-09-26	t	34.34	1.24	11.26	1.15	23.83	1.12	2	yes

Продолжение на следующей странице

Таблица 6.14 – *Продолжение с предыдущей страницы*

date	name	θ_{mean}	θ_{std}	φ_{mean}	φ_{std}	cmd_{mean}	cmd_{std}	n	rel.
1824-09-27	t	32.52	1.14	9.85	0.33	35.54	0.26	3	yes
1824-09-29	t	34.69	0.87	9.94	1.41	61.97	1.53	2	yes
1824-10-21	t	21.86	0.88	336.75	0.78	-39.36	0.74	4	yes
1824-10-26	t	21.3	1.28	336.96	1.65	26.93	1.75	2	yes
1824-10-29	t_new	23.65	2.84	341.95	1.91	71.14	1.86	2	yes
1824-10-29	t_old	-19.87		214.8		-55.97		1	no
1825-01-27	t	8.63	0.53	197.21	0.56	31.18	0.53	3	no
1825-09-19	t	-21.47		268.38		-32.3		1	yes
1825-09-20	t	-20.67	1.66	267.66	0.58	-19.84	0.64	3	yes
1827-02-23	t1	16.83		224.28		-30.15		1	no
1827-02-25	t1	-8.04	0.84	237.17	1.32	8.06	1.37	2	no
1827-02-25	t2	-20.59	0.06	241.18	0.45	12.07	0.39	2	no
1827-02-25	t3	-11.18	0.09	190	0.59	-39.11	0.65	2	no
1827-02-26	t3	-9.83	0.9	192.19	1.71	-23.6	1.7	4	no
1827-02-28	t3	-16.95	1.94	193.65	0.53	4.16	0.58	6	no
1827-03-06	t3	17.05	2.81	105.86	0.69	-4.71	0.66	2	yes
1827-03-07	t3	16.26	1.66	104.4	1.59	8.17	1.53	4	yes
1830-03-21	t	7.81	0.08	171.27	0.21	-33.94	0.17	2	yes
1830-03-22	t	9.13	0.62	170.79	1.03	-21.28	1	4	yes
1830-03-24	t	8.6	0.46	170.63	0.84	4.85	0.85	5	yes
1830-03-25	t	9.79	1.52	172.31	0.43	19.78	0.52	2	yes
1830-03-26	t	8		173.15		33.45		1	yes
1830-06-30	t	8.87	1.33	318.51	0.74	7.98	0.71	6	yes
1830-07-02	t	13.62	2.68	318.1	0.69	33.97	0.65	7	yes
1830-07-30	t	14.53	0.56	313.96	0.78	40.56	0.79	3	yes
1830-07-31	t	14.56		312.65		52.54		1	yes
1830-09-27	t	3.3		232.95		17.02		1	no
1830-09-30	t	-15.88	2.96	195.13	0.46	18.84	0.52	4	no
1830-10-03	t	-10.88	0.58	95.73	0.59	-40.94	0.61	4	yes

Продолжение на следующей странице

Таблица 6.14 – *Продолжение с предыдущей страницы*

date	name	θ_{mean}	θ_{std}	φ_{mean}	φ_{std}	cmd_{mean}	cmd_{std}	n	rel.
1830-10-04	t	-11.45	1.08	94.5	1.49	-29.03	1.5	4	yes
1830-10-06	t	-11.25	1.13	96.49	1.26	-0.68	1.24	5	yes
1830-10-07	t	-10.87	0.52	96.32	1.02	12.38	1.01	6	yes
1830-10-09	t	-9.73	0.7	96.91	0.42	39.32	0.39	4	yes
1830-10-10	t	-10.71	0.49	96.68	0.17	52.25	0.19	4	yes
1830-10-11	t	-10.4	0.79	97.5	2.26	66.28	2.28	6	yes
1830-10-13	t	17.86	0.65	314.61	0.66	-50.21	0.65	4	no

На рисунке 6.36 показано полученное широтно-временное распределение.

В процессе реконструкции координат был обнаружен ряд ошибок (опечаток) в оригинальных записях. Подозрение на наличие ошибок возникает тогда, когда в группе из нескольких записей было одно измерение солнечного пятна с гелиографическими координатами, не совпадающими с другими записями в этой группе. Другой случай предполагаемых ошибок – когда солнечное пятно в определенный день не может быть сопоставлено ни с одним солнечным пятном до или после этого дня. При обнаружении таких потенциальных ошибки, проводилась попытка исправить их, предполагая, что либо две строки в записи поменялись местами либо одна минута должна быть добавлена или вычтена из записанного времени (это изменяет одну цифру в записи). При этом менее правдоподобными предполагались исправления, требующие изменения двух или более цифр в записи. С помощью этих двух вариантов удалось в большинстве случаев привести выпадающие пятна в положение, соответствующее другим записям. В опубликованных файлах приведены как исходное время, так и исправленные. Представленные в данной работе реконструированные координаты учитывают эти правки.

На рисунке 6.36 можно обнаружить четыре солнечных цикла. До 1800 года можно наблюдать конец цикла 4. Солнечные пятна, наблюдаемые на

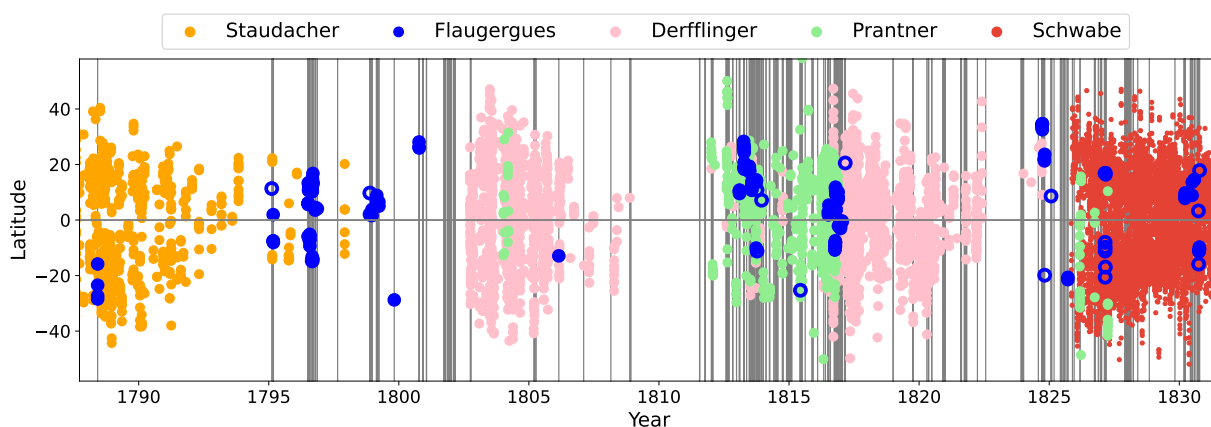


Рис. 6.36: Широтно-временное распределение положений солнечных пятен, полученных из наблюдений Фложерга (синие точки). Сплошные синие круги показывают положения солнечных пятен, классифицированные как надежные, незакрашенные синие круги показывают положения, которые восстанавливаются менее уверенно. Дни с записями контактов отмечены серыми вертикальными линиями. Для сравнения приведены положения солнечных пятен из ранее реконструированных данных других наблюдателей. Оранжевые точки показывают распределение солнечных пятен по каталогам Штаудахера и Армага [7; 8], розовые точки показывают распределение солнечных пятен из каталога Дерффлингера [91], зеленые точки соответствуют солнечным пятнам, реконструированным по рисункам Прантнера [93], и красные точки соответствуют солнечным пятнам, реконструированным по рисункам Швабе [9]. Рисунок из работы [112].

высоких широтах ($\pm 30^\circ$) около 1800 года, указывают на начало цикла 5, который продолжался до конца 1810 года. Затем можно видеть увеличение плотности наблюдений и несколько солнечных пятен в высоких широтах, что указывает на начало цикла 6. Относительно небольшое количество записей в 1823–1824 годах, скорее всего, соответствует солнечному минимуму, после которого в 1825 году в высоких широтах появились пятна цикла 7.

Можно отметить, что в цикле 6 число солнечных пятен в северном полушарии больше, чем количество солнечных пятен в южном полушарии, в то время как во время минимума Маундера активность солнечных пятен преобладала в южном полушарии [181]. Этот результат, конечно, может быть эффектом малого числа наблюдений и требует дополнительного подтверждения. Кроме того, из каталогов Флержера выясняется, что он записывал не все наблюдаемые им солнечные пятна. Однако интересно обратить внимание, что и в работе [45] отмечается преобладание пятен в северном полушарии на основе обработки наблюдений чешского астронома Франца Халашки.

К сожалению, в каталогах Флержера нет измерений пятен в 1793 или 1794 годах, которые могли бы пролить свет на предполагаемый короткий цикл между циклами 4 и 5 (потерянный цикл). Пятна на высоких широтах, наблюдаемые Флержером около 1800 года, указывают на то, что потерянный цикл длился не дольше 1800 года. Можно видеть заметное снижение абсолютных широт с 1796 по 1799 год в данных Флержера, что подтверждает быструю эволюцию короткого цикла до 1800 года.

Удастся найти несколько примеров, когда солнечное пятно (или группа солнечных пятен) живет более одного периода солнечного вращения. Первый пример начинается в 5 июля 1796 года с пятна, обозначенного буквой А, и продолжается 24 июля 1796 года пятном, обозначенным Н (таблица 6.15).

Второй пример начинается 24 февраля 1799 года и состоит из двух пятен, приведенных в таблице 6.16. Примерно через один оборот, 1799 марта 27 и 28, обнаруживается солнечное пятно с примерно теми же координатами, что и хвостовое пятно в предыдущей группе.

Еще один пример – солнечное пятно, наблюдавшееся 26 и 27 ноября

Таблица 6.15: Первый пример пятна, наблюдаемого более чем один солнечный оборот.

Дата	Пятно	Широта	Долгота	CMD
5 июля 1796	A	-5.92°	29.47°	52.85°
24 июля 1796	H	-5.95°	33.09°	-53.39°
25 июля 1796	H	-6.67°	31.93°	-40.97°
26 июля 1796	H	-7.59°	32.03°	-27.75°
28 июля 1796	t	-7.35°	30.56°	-2.62°
29 июля 1796	H	-7.22°	31.59°	12.18°
30 июля 1796	H	-6.88°	32.41°	25.76°
21 июля 1796	H	-9.32°	31.95°	38.07°

Таблица 6.16: Второй пример пятна, наблюдаемого более чем один солнечный оборот.

Дата	Пятно	Широта	Долгота	CMD
24 февраля 1799	t_1	7.30°	214.48°	-0.85°
24 февраля 1799	t_2	5.63°	202.51°	-12.82°
26 февраля 1799	t_1	8.87°	215.59°	26.69°
26 февраля 1799	t_2	6.54°	203.40°	14.51°
27 марта 1799	t	6.52°	204.52°	39.77°
28 марта 1799	t	5.02°	204.67°	54.93°

Таблица 6.17: Третий пример пятна, наблюдаемого более чем один солнечный оборот.

Дата	Пятно	Широта	Долгота	CMD
26 ноября 1816	t	-2.15°	6.40°	57.76°
27 ноября 1816	t	-2.13°	6.02°	70.30°
17 декабря 1816	t	-1.48°	5.37°	-26.55°
18 декабря 1816	t	-0.45°	7.09°	-11.80°
20 декабря 1816	t	-2.82°	9.05°	16.72°
21 декабря 1816	t	-2.42°	10.38°	30.71°
123 декабря 816	t	-3.07°	13.58°	60.25°
24 декабря 1816	t	-2.72°	22.58°	83.01°

1816 года, а затем 17 декабря 1816 года и несколько дней после этого (см. таблицу 6.17). В последующие дни это солнечное пятно довольно необычно дрейфует по долготе, оставаясь примерно на той же широте, что может быть связано с низкой точностью измерений солнечных пятен вблизи солнечного лимба.

В настоящей работе не рассматривается вопрос о группах солнечных пятен и индексе солнечной активности по наблюдениям Фложерга, однако в дальнейшем полученные результаты могут быть использованы для оценки этих значений. В то же время следует отметить, что реконструированные положения солнечных пятен недооценивают солнечную активность, поскольку Фложерг измерял время контакта не для всех наблюдаемых им солнечных пятен. Есть основания рассчитывать, что часть информации содержится в текстовых комментариях, однако их подробный перевод оставлен за рамками данного исследования. В частности, некоторые из текстовых заметок указывают на дни без пятен, другие описывают конфигурации солнечных пятен на диске.

Наконец отметим, что оцифрованные записи наблюдений, восстановленные координаты и методика обработки данных представлены в открытом репозитории github.com/observethesun/Flaugergues.

Глава 7.

Заключение

Целью диссертационной работы являлось развитие нового направления в физике Солнца, в котором исследование солнечной активности строится на основе новых методов параметрического описания процессов и явлений солнечной активности. В работе рассматривались как численные, так и аналитические методы. Отталкиваясь от изучения конкретных задач, были предложены общие подходы. Широкий спектр задач, исследованных в диссертационной работе, показывает, что предлагаемые подходы обладают высокой теоретической и практической значимостью.

Изучение началось с проблемы, характерной для численного моделирования в теории динамо, для которой интерес зачастую представляет не одна отдельная реализация, а усреднение по большому ансамблю реализаций. Становится необходимым прояснение вопроса о том, насколько результаты такого усреднения можно подкрепить количественными аналитическими оценками. Решение этого вопроса требует развития аналитических методов оценки параметров эволюции процессов в случайных средах. В работе был предложен общий метод оценки скоростей роста статистических моментов векторных полей в задачах, где эволюция происходит в рамках моделей с обновлениями, имеющих малое, но конечное время памяти.

Исходной задачей был модельный пример на основе уравнения Якоби, предложенный в свое время Я.Б. Зельдовичем и ставший отправной точкой для многих работ по теории неустойчивости благодаря тому, что многие свойства этого относительно простого примера проявляются затем и в

более сложных системах. Целью исследования было выделение различных сценарии развития неустойчивости и оценка их относительной эффективности. Для оценки скорости роста поля Якоби был предложен подход, на основе эргодических свойств системы, вытекающих из соответствующей теории произведения случайных матриц. С помощью этого подхода были вычислены показатели Ляпунова и скорости роста старших статистических моментов для различных сценариев развития неустойчивости. Показано, что результаты согласуются с оценками, получаемыми численным моделированием.

Далее было показано, как предложенный подход переносится на исследование роста магнитного поля и магнитной энергии в случайном потоке проводящей среды. Были рассмотрены изотропные и анизотропные модели случайного потока в двумерной и трехмерной задаче. Существенной особенностью и одновременно ограничением было предположение об отсутствии магнитной диффузии. В этих условиях были получены аналитические оценки для скорости роста магнитной энергии, проведено сопоставление результатов для изотропного и анизотропного случая, а также сопоставление с моделью короткоррелированного приближения, предложенной ранее А.П. Казанцевым. Полученные оценки были подтверждены численным моделированием. В работе обсуждался контекст и границы применимости полученных результатов в рамках теории солнечного динамо.

Далее изучался вопрос ассимиляции наблюдательных данных в моделях солнечного динамо. В качестве примера была рассмотрена маломодовая модель, для которой удобнее всего проводить разделение эффектов, обусловленных самой моделью, и связанных с процедурой оптимизации. Для согласования модельного и наблюдательного ряда был предложен метод прямой численной оптимизации на основе нейродифференциальных уравнений. В качестве неизвестных параметров модели были выбраны динамо-число и функция подавления альфа-эффекта, заданная с помощью нейронной сети.

Вначале на синтетических примерах, смоделированных при некоторых известных параметрах модели, было показано, что нейродифференциальный метод позволяет находить параметры и вид функции подавления

альфа-эффекта, при которых решение согласуется с синтетическим рядом. При это была проведена серия экспериментов, в которых восстановление проводилось из неполного набора данных, и было показано, что с увеличением полноты данных найденные оценки сходятся к истинным. Одновременно с этим показано, что существует достаточно большая вариативность как для динамо-числа, так и для функции подавления, которые порождают близкие решения. При увеличении полноты данных, на которых проводится обучение, вариативность уменьшается.

Далее было показано, что с помощью нейродифференциального подхода удается находить параметры модели, дающие близкую аппроксимацию среднему профилю солнечного цикла. При этом также наблюдается большая вариативность для динамо-числа и для функции подавления альфа-эффекта и обнаруживается связь между ними. А именно, увеличение вещественной части динамо-числа приводит к более быстрому затуханию функции подавления.

Поскольку при оптимизации с помощью нейродифференциального подхода используются градиентные методы, результат может быть чувствителен к выбору начального приближения. В частности, при произвольном выборе начального вида функции подавления, решение может экспоненциально возрастать. В связи с этим было предложено проводить предварительно обучение нейронной сети так, чтобы функция была затухающей. Также следует отметить, что в отличие от стандартного обучения методом обратного распространения ошибки, в нейродифференциальном методе градиенты вычисляются путем численного решения сопряженной системы дифференциальных уравнений, что ведет к дополнительным вычислительным расходам и имеет потенциал для дальнейшей оптимизации. Вместе с тем, результат, полученный для маломодовых моделей, открывает возможности исследования более сложных моделей, включающих дополнительные параметры и воспроизводящие широтно-временную диаграмму солнечной активности.

Однако оценка параметров в более сложных моделях динамо требует одновременно и более сложной обработки наблюдательных данных и извлечения из них более детальных характеристик. В связи с этим далее

изучался вопрос о том, насколько с помощью современных подходов можно использовать потенциал доступных больших серий данных. В качестве конкретного примера были рассмотрены одни из самых крупных по размерам и одновременно значимых для прогноза космической погоды образований – корональные дыры. Для решения задачи сегментации корональных дыр (КД) была предложена модель на основе сверточных нейронных сетей. Показано, что результаты работы модели оказываются на уровне ручной обработки изображений. Кроме того показано, что модель, обученная на изображениях солнечного диска, оказывается успешно применимой для сегментации КД на синоптических картах. Одним из результатов работы стал опубликованный каталог синоптических карт корональных дыр. На основе анализа карт КД были найдены параметры КД, дающие высокую корреляцию с долговременными вариациями солнечного ветра.

Далее был рассмотрели вопрос о том, каким образом можно использовать информацию об структуре активных областях в последующих моделях оценки и прогноза солнечной активности и космической погоды. Этот вопрос был сведен к задаче о создании набора количественных параметров активной области, который, с одной стороны, был бы достаточно компактным, а с другой – сохранял как можно больше информации об активной области. В качестве решения был изучен подход на основе комбинации методов понижения размерности и машинного обучения. Этот подход был исследован на примере изображений групп солнечных пятен. Показано, что получаемый путем автоматической процедуры набор параметров содержит в себе, в определенном виде, стандартные физические параметры области, например, угол наклона, площадь, протяженность, однако расширяет его до набора, позволяющего достаточно точно восстанавливать исходный геометрический образ группы. Результаты обсуждались в контексте оценки сложности группы и сравнения групп между собой. На основе построенных параметров была предложена модель классификации групп пятен. Одним из результатов исследования стала опубликованная база данных параметров групп солнечных пятен. Далее было показано, каким образом идеи параметрического описания активных областей могут быть использованы для построения моделей прогноза. В качестве примера был рассмотрен во-

прос прогноза протонных событий, предложена модель на основе машинного обучения и проведено сопоставление с текущими методами прогноза.

Наконец, был изучен вопрос оцифровки и восстановлении исторических серий данных по солнечной активности с использованием методов машинного обучения. Предложена модель на основе нейронных сетей для оцифровки рукописного текста из каталогов Цюрихской обсерватории за конец 19 – начало 20 века. Ключевой особенностью модели, позволившей достичь высокого уровня точности, стала методика автоматического дообучения (адаптации) модели под каждую новую страницу каталога. Это позволило модели успешно (без потери точности) реагировать на изменения почерка, фона и других особенностей, присущих рукописным каталогам. Важным результатом работы стала опубликованная база данных солнечных пятен, факелов и протуберанцев. Представлены широтно-временные диаграммы и показана согласованность с Гринвическим каталогом групп солнечных пятен.

Более деликатным оказался вопрос с оцифровкой данных за период конца 18 – начала 19 века. Были изучены каталоги и проведена оцифровка каталогов французского астронома О. Флержера. Среди обширных записей о наблюдении звезд, планет и комет, часть записей относилась к наблюдениям солнечных пятен. Были восстановлены методики наблюдений и для большинства записей восстановлены гелиографические координаты пятен. В результате была получена база данных и широтно-временная диаграмма солнечной активности, приходящейся на знаменательный период в солнечной активности – период минимума Дальтона, и связующая наблюдения других астрономов.

Отметим, что код моделей и программ, представленных в работе, опубликованы в открытом репозитории <https://github.com/observethesun/>, что позволяет воспроизвести результаты исследования и стать основой для дальнейших работ.

Подведем общий итог работы. Задачи эффективного параметрического описания процессов и явления возникают в самых различных аспектах физики Солнца: от исследований моделей теории динамо до задач анализа прямых наблюдательных данных. Широкие возможности по численному

моделированию порождают задачи по аналитическому подкреплению результатов, что требует новых методов оценки параметров эволюции процессов солнечной активности. Последующие задачи ассимиляции данных требуют эффективных методов параметризации нелинейных связей с моделях и их оценки. При обработке наблюдательных данных далеко не всегда методы, применявшиеся ранее, в частности, использующие ручную обработку, могут быть использованы при работе с большими объемами данных, характерными для современного этапа. Целью диссертационной работы было, во-первых, обозначить эти проблемы, во-вторых, сформировать новое направление, сфокусированное на их изучении, предложить новые методы и, наконец, на их основе получить новые результаты для физики Солнца.

В контексте теории динамо были разработаны аналитические методы, на основе которых получены оценки скоростей роста магнитного поля и магнитной энергии на начальной стадии динамо. С его помощью удалось описать и изучить относительную эффективность различных механизмов, приводящих к росту магнитного поля и его моментов.

Для ассимиляции данных в моделях динамо предложен подход на основе нейродифференциальных уравнений. С его помощью на примере маломодовой модели динамо были получены оценки динамо-числа и функции подавления альфа-эффекта, при которых удастся близко воспроизвести средний профиль солнечного цикла.

Для анализа более тонких явлений солнечной активности были предложены новые методы обработки наблюдательных данных, основанные на машинном обучении. Этот подход позволил по-новому взглянуть на процесс постановки и решения задач. Если раньше методы обработки представляли собой либо ручной процесс, либо последовательность четко формализованных действий, то для методов машинного обучения ключевым становится формулировка критериев качества и наличие большой выборки. Поскольку, как правило, предложить критерий качества оказывается проще, чем явный алгоритм решения задачи, и для современной физики Солнца стали доступны большие серии данных, то предложенное направление имеет все основания для дальнейшего успешного развития. Полученные в работе новые результаты и базы данных являются заделом для на

этом пути.

Стоит отметить, что с момента начала в 2010-х годах обширного вовлечения методов глубокого машинного обучения в различные задачи (поначалу, вне контекста физики Солнца) и до сегодняшнего дня прошло лишь чуть более десяти лет. Однако за этот относительно короткий промежуток времени они стали самостоятельным направлением. Наглядным подтверждением этому служат специальные конференции и тематические выпуски журналов, посвященные применению машинного обучения в физике Солнца. Получаемые результаты вдохновляют на дальнейшие исследования и формируют качественно новый уровень возможностей для физики Солнца.

Библиография

1. *Abd M., Majed S., Zharkova V.* Automated Classification of Sunspot Groups with Support Vector Machines. — 2010. — ISBN 978-90-481-9150-5. — DOI: [10.1007/978-90-481-9151-2_56](https://doi.org/10.1007/978-90-481-9151-2_56).
2. *Abramenko V., Yurchyshyn V., Watanabe H.* Parameters of the Magnetic Flux inside Coronal Holes // *Solar Phys.* — 2009. — Vol. 260, no. 1. — P. 43–57. — DOI: [10.1007/s11207-009-9433-7](https://doi.org/10.1007/s11207-009-9433-7). — arXiv: [0908.2460](https://arxiv.org/abs/0908.2460) [astro-ph.SR].
3. *Ahmadzadeh A., Aydin B., Georgoulis M. K., Kempton D. J., Mahajan S. S., Angryk R. A.* How to Train Your Flare Prediction Model: Revisiting Robust Sampling of Rare Events // *The Astrophysical Journal Supplement Series.* — 2021. — Vol. 254, no. 2. — P. 23. — DOI: [10.3847/1538-4365/abec88](https://doi.org/10.3847/1538-4365/abec88). — URL: <https://dx.doi.org/10.3847/1538-4365/abec88>.
4. *Ali A., Sadykov V., Kosovichev A., Kitiashvili I. N., Oria V., Nita G. M., Illarionov E., O’Keefe P. M., Francis F., Chong C.-J., Kosovitch P., Marroquin R. D.* Predicting Solar Proton Events of Solar Cycles 22-24 using GOES Proton & Soft X-Ray Flux Statistics // *arXiv e-prints.* — 2023. — arXiv:2303.05446. — DOI: [10.48550/arXiv.2303.05446](https://doi.org/10.48550/arXiv.2303.05446). — arXiv: [2303.05446](https://arxiv.org/abs/2303.05446) [astro-ph.SR].
5. *Altschuler M. D., Trotter D. E., Orrall F. Q.* Coronal holes // *Solar Physics.* — 1972. — Vol. 26, no. 2. — P. 354–365. — ISSN 1573-093X. — DOI: [10.1007/BF00165276](https://doi.org/10.1007/BF00165276). — URL: <https://doi.org/10.1007/BF00165276>.

6. *Andrews D. F., Mallows C. L.* Scale Mixtures of Normal Distributions // Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological). — 1974. — Vol. 36, no. 1. — P. 99–102. — DOI: <https://doi.org/10.1111/j.2517-6161.1974.tb00989.x>. — eprint: <https://rss.onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1111/j.2517-6161.1974.tb00989.x>. — URL: <https://rss.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1111/j.2517-6161.1974.tb00989.x>.
7. *Arlt R.* The Butterfly Diagram in the Eighteenth Century // Solar Phys. — 2009. — Vol. 255. — P. 143–153. — DOI: [10.1007/s11207-008-9306-5](https://doi.org/10.1007/s11207-008-9306-5). — arXiv: [0812.2233](https://arxiv.org/abs/0812.2233).
8. *Arlt R.* The solar observations at Armagh Observatory in 1795–1797 // Astronomische Nachrichten. — 2009. — Vol. 330. — P. 311. — DOI: [10.1002/asna.200911195](https://doi.org/10.1002/asna.200911195).
9. *Arlt R., Leussu R., Giese N., Mursula K., Usoskin I. G.* Sunspot positions and sizes for 1825–1867 from the observations by Samuel Heinrich Schwabe // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. — 2013. — Vol. 433, no. 4. — P. 3165–3172. — DOI: [10.1093/mnras/stt961](https://doi.org/10.1093/mnras/stt961). — arXiv: [1305.7400](https://arxiv.org/abs/1305.7400) [astro-ph.SR].
10. *Arlt R., Vaquero J. M.* Historical sunspot records // Living Rev. Solar Phys. — 2020. — Vol. 17, no. 1. — P. 1. — DOI: [10.1007/s41116-020-0023-y](https://doi.org/10.1007/s41116-020-0023-y).
11. *Arnol'd V. I., Zel'dovich Y. B., Ruzmaikin A. A., Sokolov D. D.* Magnetic field in a stationary flow with stretching in Riemannian space // Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics. — 1981. — Vol. 54, no. 6. — P. 1083–1086. — ISSN 0038-5646.
12. *Asensio Ramos A., Requerey I. S., Vitas N.* DeepVel: Deep learning for the estimation of horizontal velocities at the solar surface // Astron. Astrophys. — 2017. — Vol. 604. — A11. — DOI: [10.1051/0004-6361/201730783](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201730783).

13. *Asensio Ramos A., Cheung M. C. M., Chifu I., Gafeira R.* Machine learning in solar physics // *Living Reviews in Solar Physics*. — 2023. — Vol. 20, no. 1. — P. 4. — DOI: [10.1007/s41116-023-00038-x](https://doi.org/10.1007/s41116-023-00038-x). — arXiv: [2306.15308](https://arxiv.org/abs/2306.15308) [[astro-ph.SR](#)].
14. *Astropy Collaboration, Robitaille T. P., Tollerud E. J., Greenfield P., Droettboom M., Bray E., Aldcroft T., Davis M., Ginsburg A., Price-Whelan A. M., Kerzendorf W. E., Conley A., Crighton N., Barbary K., Muna D., Ferguson H., Grollier F., Parikh M. M., Nair P. H., Unther H. M., Deil C., Woillez J., Conseil S., Kramer R., Turner J. E. H., Singer L., Fox R., Weaver B. A., Zabalza V., Edwards Z. I., Azalee Bostroem K., Burke D. J., Casey A. R., Crawford S. M., Dencheva N., Ely J., Jenness T., Labrie K., Lim P. L., Pierfederici F., Pontzen A., Ptak A., Refsdal B., Servillat M., Streicher O.* Astropy: A community Python package for astronomy // *Astron. Astrophys.* — 2013. — Vol. 558. — A33. — DOI: [10.1051/0004-6361/201322068](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201322068). — arXiv: [1307.6212](https://arxiv.org/abs/1307.6212) [[astro-ph.IM](#)].
15. *Astropy Collaboration* [et al.]. The Astropy Project: Building an Open-science Project and Status of the v2.0 Core Package // *Astron. J.* — 2018. — Vol. 156, no. 3. — P. 123. — DOI: [10.3847/1538-3881/aabc4f](https://doi.org/10.3847/1538-3881/aabc4f). — arXiv: [1801.02634](https://arxiv.org/abs/1801.02634) [[astro-ph.IM](#)].
16. *Astropy Collaboration* [et al.]. The Astropy Project: Sustaining and Growing a Community-oriented Open-source Project and the Latest Major Release (v5.0) of the Core Package // *Astrophys. J.* — 2022. — Vol. 935, no. 2. — P. 167. — DOI: [10.3847/1538-4357/ac7c74](https://doi.org/10.3847/1538-4357/ac7c74). — arXiv: [2206.14220](https://arxiv.org/abs/2206.14220) [[astro-ph.IM](#)].
17. *Asvestari E., Usoskin I. G., Kovaltsov G. A., Owens M. J., Krivova N. A., Rubinetti S., Taricco C.* Assessment of different sunspot number series using the cosmogenic isotope ^{44}Ti in meteorites // *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* — 2017. — Vol. 467, no. 2. — P. 1608–1613. — DOI: [10.1093/mnras/stx190](https://doi.org/10.1093/mnras/stx190).

18. *Babcock H. W.* The Topology of the Sun's Magnetic Field and the 22-YEAR Cycle. // *Astrophys. J.* — 1961. — Vol. 133. — P. 572. — DOI: [10.1086/147060](https://doi.org/10.1086/147060).
19. *Baldi P., Hornik K.* Neural networks and principal component analysis: Learning from examples without local minima // *Neural Networks.* — 1989. — Vol. 2, no. 1. — P. 53–58. — ISSN 0893-6080. — DOI: [https://doi.org/10.1016/0893-6080\(89\)90014-2](https://doi.org/10.1016/0893-6080(89)90014-2).
20. *Baliunas S., Frick P., Moss D., Popova E., Sokoloff D., Soon W.* Anharmonic and standing dynamo waves: theory and observation of stellar magnetic activity // *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* — 2006. — Vol. 365, no. 1. — P. 181–190. — DOI: [10.1111/j.1365-2966.2005.09701.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2005.09701.x).
21. *Bao X., Lucas J., Sachdeva S., Grosse R. B.* Regularized linear autoencoders recover the principal components, eventually // *Advances in Neural Information Processing Systems.* Vol. 33 / ed. by H. Larochelle, M. Ranzato, R. Hadsell, M. F. Balcan, H. Lin. — Curran Associates, Inc., 2020. — P. 6971–6981.
22. *Barra, V., Delouille, V., Kretzschmar, M., Hochedez, J.-F.* Fast and robust segmentation of solar EUV images: algorithm and results for solar cycle 23 // *Astron. Astrophys.* — 2009. — Vol. 505, no. 1. — P. 361–371. — DOI: [10.1051/0004-6361/200811416](https://doi.org/10.1051/0004-6361/200811416). — URL: <https://doi.org/10.1051/0004-6361/200811416>.
23. *Batchelor G. K.* The Theory of Homogeneous Turbulence. — 1953.
24. *Beck R., Brandenburg A., Moss D., Shukurov A., Sokoloff D.* Galactic Magnetism: Recent Developments and Perspectives // *Annual Review of Astronomy and Astrophysics.* — 1996. — Vol. 34. — P. 155–206. — DOI: [10.1146/annurev.astro.34.1.155](https://doi.org/10.1146/annurev.astro.34.1.155).
25. *Benevolenskaya E. E.* Magnetic flux evolution inside and outside a polar coronal hole based on data from the Solar Dynamics Observatory (SDO) // *Geomagnetism and Aeronomy.* — 2012. — Vol. 52, no. 7. — P. 829–835. — DOI: [10.1134/S0016793212070031](https://doi.org/10.1134/S0016793212070031).

26. *Berggren A. M., Beer J., Possnert G., Aldahan A., Kubik P., Christl M., Johnsen S. J., Abreu J., Vinther B. M.* A 600-year annual ^{10}Be record from the NGRIP ice core, Greenland // *Geophys. Res. Lett.* — 2009. — Vol. 36, no. 11. — P. L11801. — DOI: [10 . 1029 / 2009GL038004](https://doi.org/10.1029/2009GL038004).
27. *Bishop C. M.* Neural Networks for Pattern Recognition. — New York, NY, USA : Oxford University Press, Inc., 1995. — ISBN 0198538642.
28. *Bobra M. G., Couvidat S.* Solar Flare Prediction Using SDO/HMI Vector Magnetic Field Data with a Machine-Learning Algorithm // *The Astrophysical Journal*. — 2015. — Vol. 798, no. 2. — P. 135. — DOI: [10.1088/0004-637X/798/2/135](https://doi.org/10.1088/0004-637X/798/2/135). — URL: <https://dx.doi.org/10.1088/0004-637X/798/2/135>.
29. *Bobra M. G., Sun X., Hoeksema J. T., Turmon M., Liu Y., Hayashi K., Barnes G., Leka K. D.* The Helioseismic and Magnetic Imager (HMI) Vector Magnetic Field Pipeline: SHARPs - Space-Weather HMI Active Region Patches // *Solar Phys.* — 2014. — Vol. 289, no. 9. — P. 3549–3578. — DOI: [10 . 1007 / s11207 - 014 - 0529 - 3](https://doi.org/10.1007/s11207-014-0529-3). — arXiv: [1404.1879 \[astro-ph.SR\]](https://arxiv.org/abs/1404.1879).
30. *Bommasani R.* [et al.]. On the Opportunities and Risks of Foundation Models // *arXiv e-prints*. — 2021. — arXiv:2108.07258. — DOI: [10.48550/arXiv.2108.07258](https://doi.org/10.48550/arXiv.2108.07258). — arXiv: [2108.07258 \[cs.LG\]](https://arxiv.org/abs/2108.07258).
31. *Bonanno A., Arlt R.* Data-Driven Reconstruction of a Low-Order Dynamo Model from Sunspot Data // *Solar Physics*. — 2025. — Vol. 300, no. 8. — ISSN 1573-093X. — DOI: [10 . 1007 / s11207 - 025 - 02531 - y](https://doi.org/10.1007/s11207-025-02531-y). — URL: <http://dx.doi.org/10.1007/s11207-025-02531-y>.
32. *Boral A., Wan Z. Y., Zepeda-Núñez L., Lottes J., Wang Q., Chen Y.-f., Anderson J. R., Sha F.* Neural ideal large eddy simulation: modeling turbulence with neural stochastic differential equations // *Proceedings of the 37th International Conference on Neural Information Processing Systems*. — New Orleans, LA, USA : Curran Associates Inc., 2023. — (NIPS '23).

33. *Brandenburg A., Elstner D., Masada Y., Pipin V.* Turbulent Processes and Mean-Field Dynamo // *Space Sci. Rev.* — 2023. — Vol. 219, no. 7. — P. 55. — DOI: [10.1007/s11214-023-00999-3](https://doi.org/10.1007/s11214-023-00999-3). — arXiv: [2303.12425](https://arxiv.org/abs/2303.12425) [[astro-ph.SR](#)].
34. *Brandenburg A., Sokoloff D., Subramanian K.* Current Status of Turbulent Dynamo Theory. From Large-Scale to Small-Scale Dynamos // *Space Sci. Rev.* — 2012. — Vol. 169, no. 1–4. — P. 123–157. — DOI: [10.1007/s11214-012-9909-x](https://doi.org/10.1007/s11214-012-9909-x). — arXiv: [1203.6195](https://arxiv.org/abs/1203.6195) [[astro-ph.SR](#)].
35. *Brandenburg A., Subramanian K.* Astrophysical magnetic fields and nonlinear dynamo theory // *Phys. Rep.* — 2005. — Vol. 417, no. 1–4. — P. 1–209. — DOI: [10.1016/j.physrep.2005.06.005](https://doi.org/10.1016/j.physrep.2005.06.005). — arXiv: [astro-ph/0405052](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0405052) [[astro-ph](#)].
36. *Brehm N., Bayliss A., Christl M., Synal H.-A., Adolphi F., Beer J., Kromer B., Muscheler R., Solanki S. K., Usoskin I., Bleicher N., Bollhalder S., Tyers C., Wacker L.* Eleven-year solar cycles over the last millennium revealed by radiocarbon in tree rings // *Nature Geoscience*. — 2021. — Vol. 14, no. 1. — P. 10–15. — DOI: [10.1038/s41561-020-00674-0](https://doi.org/10.1038/s41561-020-00674-0).
37. *Brown T., Mann B., Ryder N., Subbiah M., Kaplan J. D., Dhariwal P., Neelakantan A., Shyam P., Sastry G., Askell A., Agarwal S., Herbert-Voss A., Krueger G., Henighan T., Child R., Ramesh A., Ziegler D., Wu J., Winter C., Hesse C., Chen M., Sigler E., Litwin M., Gray S., Chess B., Clark J., Berner C., McCandlish S., Radford A., Sutskever I., Amodei D.* Language Models are Few-Shot Learners // *Advances in Neural Information Processing Systems*. Vol. 33 / ed. by H. Larochelle, M. Ranzato, R. Hadsell, M. Balcan, H. Lin. — Curran Associates, Inc., 2020. — P. 1877–1901. — URL: https://proceedings.neurips.cc/paper_files/paper/2020/file/1457c0d6bfc4967418bfb8ac142f64a-Paper.pdf.

38. *Cameron R. H., Schüssler M.* Solar activity: periodicities beyond 11 years are consistent with random forcing // *Astron. Astrophys.* — 2019. — Vol. 625. — A28. — DOI: [10.1051/0004-6361/201935290](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201935290).
39. *Canny J.* A Computational Approach to Edge Detection // *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence.* — 1986. — Vol. PAMI-8, no. 6. — P. 679–698. — DOI: [10.1109/TPAMI.1986.4767851](https://doi.org/10.1109/TPAMI.1986.4767851).
40. *Cao Y., Li S., Petzold L., Serban R.* Adjoint Sensitivity Analysis for Differential-Algebraic Equations: The Adjoint DAE System and Its Numerical Solution // *SIAM Journal on Scientific Computing.* — 2003. — Vol. 24, no. 3. — P. 1076–1089. — DOI: [10.1137/S1064827501380630](https://doi.org/10.1137/S1064827501380630). — eprint: <https://doi.org/10.1137/S1064827501380630>.
41. *Caplan R. M., Downs C., Linker J. A.* Synchronic Coronal Hole Mapping Using Multi-instrument EUV Images: Data Preparation and Detection Method // *Astrophys. J.* — 2016. — Vol. 823, no. 1. — P. 53. — DOI: [10.3847/0004-637X/823/1/53](https://doi.org/10.3847/0004-637X/823/1/53). — arXiv: [1510.04718](https://arxiv.org/abs/1510.04718) [astro-ph.SR].
42. *Carrasco V. M. S.* Number of Sunspot Groups and Individual Sunspots Recorded by Tevel for the Period 1816–1836 in the Dalton Minimum // *Astrophys. J.* — 2021. — Vol. 922, no. 1. — P. 58. — DOI: [10.3847/1538-4357/ac24a5](https://doi.org/10.3847/1538-4357/ac24a5).
43. *Carrasco V. M. S., Hayakawa H., Kuroyanagi C., Gallego M. C., Vaquero J. M.* Strong evidence of low levels of solar activity during the Maunder Minimum // *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* — 2021. — Vol. 504, no. 4. — P. 5199–5204. — DOI: [10.1093/mnras/stab1155](https://doi.org/10.1093/mnras/stab1155).
44. *Carrasco V. M. S., Llera J., Aparicio A. J. P., Gallego M. C., Vaquero J. M.* Relationship between the Sunspot Number and Active Day Fraction: An Application for the Maunder Minimum // *Astrophys. J.* — 2022. — Vol. 933, no. 1. — P. 26. — DOI: [10.3847/1538-4357/ac7045](https://doi.org/10.3847/1538-4357/ac7045).

45. *Carrasco V. M. S., Vaquero J. M., Arlt R., Gallego M. C.* Sunspot Observations Made by Hallaschka During the Dalton Minimum // *Solar Phys.* — 2018. — Vol. 293, no. 7. — P. 102. — DOI: [10.1007/s11207-018-1322-5](https://doi.org/10.1007/s11207-018-1322-5). — arXiv: [1807.03014](https://arxiv.org/abs/1807.03014) [astro-ph.SR].
46. *Chamberlain R. G., Duquette W. H.* Some algorithms for polygons on a sphere. //. — 2007. — URL: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:125531952>.
47. *Chandrasekhar S.* The Theory of Axisymmetric Turbulence // *Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A.* — 1950. — Vol. 242, no. 855. — P. 557–577. — DOI: [10.1098/rsta.1950.0010](https://doi.org/10.1098/rsta.1950.0010).
48. *Charbonneau P.* Dynamo models of the solar cycle // *Living Reviews in Solar Physics.* — 2020. — Vol. 17, no. 1. — P. 4. — DOI: [10.1007/s41116-020-00025-6](https://doi.org/10.1007/s41116-020-00025-6).
49. *Chen L., Papandreou G., Kokkinos I., Murphy K., Yuille A. L.* Semantic Image Segmentation with Deep Convolutional Nets and Fully Connected CRFs // *CoRR.* — 2014. — Vol. abs/1412.7062. — arXiv: [1412.7062](https://arxiv.org/abs/1412.7062). — URL: <http://arxiv.org/abs/1412.7062>.
50. *Chen R. T. Q., Rubanova Y., Bettencourt J., Duvenaud D. K.* Neural Ordinary Differential Equations // *Advances in Neural Information Processing Systems.* Vol. 31 / ed. by S. Bengio, H. Wallach, H. Larochelle, K. Grauman, N. Cesa-Bianchi, R. Garnett. — Curran Associates, Inc., 2018. — URL: https://proceedings.neurips.cc/paper_files/paper/2018/file/69386f6bb1dfed68692a24c8686939b9-Paper.pdf.
51. *Chen Y., Manchester W. B., Hero A. O., Toth G., DuFumier B., Zhou T., Wang X., Zhu H., Sun Z., Gombosi T. I.* Identifying Solar Flare Precursors Using Time Series of SDO/HMI Images and SHARP Parameters // *Space Weather.* — 2019. — Vol. 17, no. 10. — P. 1404–1426. — DOI: <https://doi.org/10.1029/2019SW002214>.

52. *Ching T., Himmelstein D. S., Beaulieu-Jones B. K., Kalinin A. A., Do B. T., Way G. P., Ferrero E., Agapow P.-M., Xie W., Rosen G. L., Lengerich B. J., Israeli J., Lanchantin J., Woloszynek S., Carpenter A. E., Shrikumar A., Xu J., Cofer E. M., Harris D. J., DeCaprio D., Qi Y., Kundaje A., Peng Y., Wiley L. K., Segler M. H. S., Gitter A., Greene C. S.* Opportunities And Obstacles For Deep Learning In Biology And Medicine // bioRxiv. — 2017. — DOI: [10.1101/142760](https://doi.org/10.1101/142760). — eprint: <https://www.biorxiv.org/content/early/2017/05/28/142760.full.pdf>. — URL: <https://www.biorxiv.org/content/early/2017/05/28/142760>.
53. *Çiçek Ö., Abdulkadir A., Lienkamp S. S., Brox T., Ronneberger O.* 3D U-Net: Learning Dense Volumetric Segmentation from Sparse Annotation // CoRR. — 2016. — Vol. abs/1606.06650. — arXiv: [1606.06650](https://arxiv.org/abs/1606.06650). — URL: <http://arxiv.org/abs/1606.06650>.
54. *Clette F., Lefèvre L.* SILSO Sunspot Number V2.0. — 2015. — DOI: [10.24414/qnza-ac80](https://doi.org/10.24414/qnza-ac80). — Published by WDC SILSO - Royal Observatory of Belgium (ROB).
55. *Clette F., Svalgaard L., Vaquero J. M., Cliver E. W.* Revisiting the Sunspot Number // Space Science Reviews. — 2014. — Vol. 186, no. 1. — P. 35–103. — ISSN 1572-9672. — DOI: [10.1007/s11214-014-0074-2](https://doi.org/10.1007/s11214-014-0074-2). — URL: <https://doi.org/10.1007/s11214-014-0074-2>.
56. *Clette F., Svalgaard L., Vaquero J. M., Cliver E. W.* Revisiting the Sunspot Number. A 400-Year Perspective on the Solar Cycle // Space Sci. Rev. — 2014. — Vol. 186, no. 1–4. — P. 35–103. — DOI: [10.1007/s11214-014-0074-2](https://doi.org/10.1007/s11214-014-0074-2). — arXiv: [1407.3231](https://arxiv.org/abs/1407.3231) [astro-ph.SR].
57. *Clevert D.-A., Unterthiner T., Hochreiter S.* Fast and Accurate Deep Network Learning by Exponential Linear Units (ELUs). // CoRR. — 2015. — Vol. abs/1511.07289. — URL: <http://dblp.uni-trier.de/db/journals/corr/corr1511.html#ClevertUH15>.

58. *Cliver E. W.* Sunspot number recalibration: The 1840-1920 anomaly in the observer normalization factors of the group sunspot number // *J. Space Weather. Space Clim.* — 2017. — Vol. 7. — A12. — DOI: [10.1051/swsc/2017010](https://doi.org/10.1051/swsc/2017010).
59. *Colak T., Qahwaji R.* Automated McIntosh-Based Classification of Sunspot Groups Using MDI Images // *Solar Phys.* — 2008. — Vol. 248, no. 2. — P. 277–296. — DOI: [10.1007/s11207-007-9094-3](https://doi.org/10.1007/s11207-007-9094-3).
60. *Curto J. J., Solé J. G., Genescà M., Blanca M. J., Vaquero J. M.* Historical Heliophysical Series of the Ebro Observatory // *Solar Phys.* — 2016. — Vol. 291, no. 9/10. — P. 2587–2607. — DOI: [10.1007/s11207-016-0896-z](https://doi.org/10.1007/s11207-016-0896-z).
61. *Cybenko G.* Approximation by superpositions of a sigmoidal function // *Mathematics of Control, Signals, and Systems (MCSS)*. — 1989. — Vol. 2, no. 4. — P. 303–314. — ISSN 0932-4194. — DOI: [10.1007/BF02551274](https://doi.org/10.1007/BF02551274). — URL: <http://dx.doi.org/10.1007/BF02551274>.
62. *De Pontieu B., Title A. M., Lemen J. R., Kushner G. D., Akin D. J., Allard B., Berger T., Boerner P., Cheung M., Chou C., Drake J. F., Duncan D. W., Freeland S., Heyman G. F., Hoffman C., Hurlburt N. E., Lindgren R. W., Mathur D., Rehse R., Sabolish D., Seguin R., Schrijver C. J., Tarbell T. D., Wülser J. P., Wolfson C. J., Yanari C., Mudge J., Nguyen-Phuc N., Timmons R., van Bezooijen R., Weingrod I., Brookner R., Butcher G., Dougherty B., Eder J., Knagenhjelm V., Larsen S., Mansir D., Phan L., Boyle P., Cheimets P. N., DeLuca E. E., Golub L., Gates R., Hertz E., McKillop S., Park S., Perry T., Podgorski W. A., Reeves K., Saar S., Testa P., Tian H., Weber M., Dunn C., Eccles S., Jaeggli S. A., Kankelborg C. C., Mashburn K., Pust N., Springer L., Carvalho R., Kleint L., Marmie J., Mazmanian E., Pereira T. M. D., Sawyer S., Strong J., Worden S. P., Carlsson M., Hansteen V. H., Leenaarts J., Wiesmann M., Aloise J., Chu K. C., Bush R. I., Scherrer P. H., Brekke P., Martinez-Sykora J., Lites B. W., McIntosh S. W., Uitenbroek H., Okamoto T. J., Gumm*

- M. A., Auken G., Jerram P., Pool P., Waltham N.* The Interface Region Imaging Spectrograph (IRIS) // *Solar Phys.* — 2014. — Vol. 289, no. 7. — P. 2733–2779. — DOI: [10.1007/s11207-014-0485-y](https://doi.org/10.1007/s11207-014-0485-y). — arXiv: [1401.2491](https://arxiv.org/abs/1401.2491) [astro-ph.SR].
63. *Delouille V., Hofmeister S. J., Reiss M. A., Mampaey B., Temmer M., Veronig A.* Chapter 15 - Coronal Holes Detection Using Supervised Classification // *Machine Learning Techniques for Space Weather* / ed. by E. Camporeale, S. Wing, J. R. Johnson. — Elsevier, 2018. — P. 365–395. — ISBN 978-0-12-811788-0. — DOI: <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-811788-0.00015-9>. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780128117880000159>.
64. *Deng L., Yu D.* Deep Learning: Methods and Applications : tech. rep. — 2014. — URL: <https://www.microsoft.com/en-us/research/publication/deep-learning-methods-and-applications/>.
65. *Devlin J., Chang M.-W., Lee K., Toutanova K.* BERT: Pre-training of Deep Bidirectional Transformers for Language Understanding // arXiv e-prints. — 2018. — arXiv:1810.04805. — DOI: [10.48550/arXiv.1810.04805](https://doi.org/10.48550/arXiv.1810.04805). — arXiv: [1810.04805](https://arxiv.org/abs/1810.04805) [cs.CL].
66. *Díaz Baso C. J., Asensio Ramos A.* Enhancing SDO/HMI images using deep learning // *Astron. Astrophys.* — 2018. — Vol. 614. — A5. — DOI: [10.1051/0004-6361/201731344](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201731344).
67. *Dice L. R.* Measures of the Amount of Ecologic Association Between Species // *Ecology*. — 1945. — Vol. 26, no. 3. — P. 297–302. — DOI: [10.2307/1932409](https://doi.org/10.2307/1932409). — eprint: <https://esajournals.onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.2307/1932409>. — URL: <https://esajournals.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.2307/1932409>.

68. *Dickinson R. P., Gelinas R. J.* Sensitivity analysis of ordinary differential equation systems—A direct method // Journal of Computational Physics. — 1976. — Vol. 21, no. 2. — P. 123–143. — ISSN 0021-9991. — DOI: [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(76\)90007-3](https://doi.org/10.1016/0021-9991(76)90007-3). — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0021999176900073>.
69. *Diercke A., Arlt R., Denker C.* Digitization of sunspot drawings by Spörer made in 1861-1894 // Astron. Nachrichten. — 2015. — Vol. 336, no. 1. — P. 53. — DOI: [10.1002/asna.201412138](https://doi.org/10.1002/asna.201412138). — arXiv: [1411.7790](https://arxiv.org/abs/1411.7790) [astro-ph.SR].
70. *Dmitrieva I. V., Kuzanyan K. M., Obridko V. N.* Amplitude and period of the dynamo wave and prediction of the solar cycle // Solar Phys. — 2000. — Vol. 195, no. 1. — P. 209–218. — DOI: [10.1023/A:1005207828577](https://doi.org/10.1023/A:1005207828577).
71. *Dosovitskiy A., Beyer L., Kolesnikov A., Weissenborn D., Zhai X., Unterthiner T., Dehghani M., Minderer M., Heigold G., Gelly S., Uszkoreit J., Houlsby N.* An Image is Worth 16x16 Words: Transformers for Image Recognition at Scale // arXiv e-prints. — 2020. — arXiv:2010.11929. — DOI: [10.48550/arXiv.2010.11929](https://doi.org/10.48550/arXiv.2010.11929). — arXiv: [2010.11929](https://arxiv.org/abs/2010.11929) [cs.CV].
72. *Dosovitskiy A., Brox T.* Generating Images with Perceptual Similarity Metrics Based on Deep Networks // Proceedings of the 30th International Conference on Neural Information Processing Systems. — Barcelona, Spain : Curran Associates Inc., 2016. — P. 658–666. — (NIPS'16). — ISBN 9781510838819.
73. *Dubey S. R., Singh S. K., Chaudhuri B. B.* Activation functions in deep learning: A comprehensive survey and benchmark // Neurocomputing. — 2022. — Vol. 503. — P. 92–108. — ISSN 0925-2312. — DOI: <https://doi.org/10.1016/j.neucom.2022.06.111>. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0925231222008426>.

74. *Dumoulin V., Visin F.* A guide to convolution arithmetic for deep learning. — 2016. — URL: <http://arxiv.org/abs/1603.07285> ; cite arxiv:1603.07285.
75. *Eltoft T., Kim T., Lee T.-W.* On the multivariate Laplace distribution // IEEE Signal Processing Letters. — 2006. — Vol. 13, no. 5. — P. 300–303. — DOI: [10.1109/LSP.2006.870353](https://doi.org/10.1109/LSP.2006.870353).
76. *Flaugergues H.* Astronomie pratique. Mémoire sur l’usage du réticule rhombe, pour les observations des taches du soleil et de la lune // Annales de mathématiques pures et appliquées. — Paris, 1813. — Vol. 4. — P. 321–331. — URL: http://www.numdam.org/item/AMPA_1813-1814__4__321_0/.
77. *Furstenberg H., Kesten H.* Products of Random Matrices // The Annals of Mathematical Statistics. — 1960. — Vol. 31, no. 2. — P. 457–469. — DOI: [10.1214/aoms/1177705909](https://doi.org/10.1214/aoms/1177705909). — URL: <https://doi.org/10.1214/aoms/1177705909>.
78. *Furstenberg H.* Noncommuting Random Products // Transactions of the American Mathematical Society. — 1963. — Vol. 108, no. 3. — P. 377–428. — ISSN 00029947. — URL: <http://www.jstor.org/stable/1993589> (visited on 12/03/2022).
79. *Galvez R., Fouhey D. F., Jin M., Szenicer A., Muñoz-Jaramillo A., Cheung M. C. M., Wright P. J., Bobra M. G., Liu Y., Mason J., Thomas R.* A Machine-learning Data Set Prepared from the NASA Solar Dynamics Observatory Mission // The Astrophysical Journal Supplement Series. — 2019. — Vol. 242, no. 1. — P. 7. — DOI: [10.3847/1538-4365/ab1005](https://doi.org/10.3847/1538-4365/ab1005).
80. *Gao P. X.* Periodicity of sunspot group number during the Maunder Minimum // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. — 2017. — Vol. 472, no. 3. — P. 2913–2918. — DOI: [10.1093/mnras/stx2206](https://doi.org/10.1093/mnras/stx2206).
81. *Garton T. M., Gallagher P. T., Murray S. A.* Automated coronal hole identification via multi-thermal intensity segmentation // Journal of

- Space Weather and Space Climate. — 2018. — Vol. 8. — A02. — DOI: [10.1051/swsc/2017039](https://doi.org/10.1051/swsc/2017039).
82. *Golub G. H., Van Loan C. F.* Matrix Computations. — Third. — The Johns Hopkins University Press, 1996.
 83. *Golubeva E. M., Mordvinov A. V.* Rearrangements of Open Magnetic Flux and Formation of Polar Coronal Holes in Cycle 24 // Solar Physics. — 2017. — Vol. 292, no. 11. — ISSN 1573-093X. — DOI: [10.1007/s11207-017-1200-6](https://doi.org/10.1007/s11207-017-1200-6). — URL: <http://dx.doi.org/10.1007/s11207-017-1200-6>.
 84. *Gonzalez R. C., Woods R. E.* Digital Image Processing (3rd Edition). — USA : Prentice-Hall, Inc., 2006. — ISBN 013168728X.
 85. *Goodfellow I., Bengio Y., Courville A.* Deep Learning. — MIT Press, 2016. — URL: <http://www.deeplearningbook.org> ; Book in preparation for MIT Press.
 86. *Graves A., Fernández S., Gomez F.* Connectionist temporal classification: Labelling unsegmented sequence data with recurrent neural networks // In Proceedings of the International Conference on Machine Learning, ICML 2006. — 2006. — P. 369–376.
 87. *Hale G. E., Ellerman F., Nicholson S. B., Joy A. H.* The Magnetic Polarity of Sun-Spots // Astrophys. J. — 1919. — Vol. 49. — P. 153. — DOI: [10.1086/142452](https://doi.org/10.1086/142452).
 88. *Hamada A., Asikainen T., Mursula K.* New Homogeneous Dataset of Solar EUV Synoptic Maps from SOHO/EIT and SDO/AIA // Solar Physics. — 2020. — Vol. 295. — DOI: [10.1007/s11207-019-1563-y](https://doi.org/10.1007/s11207-019-1563-y).
 89. *Hamada A., Asikainen T., Virtanen I., Mursula K.* Automated Identification of Coronal Holes from Synoptic EUV Maps // Solar Physics. — 2018. — Vol. 293, no. 4. — ISSN 1573-093X. — DOI: [10.1007/s11207-018-1289-2](https://doi.org/10.1007/s11207-018-1289-2). — URL: <http://dx.doi.org/10.1007/s11207-018-1289-2>.

90. *Hathaway D. H.* The Solar Cycle // Living Reviews in Solar Physics. — 2015. — Vol. 12, no. 1. — P. 4. — DOI: [10.1007/lrsp-2015-4](https://doi.org/10.1007/lrsp-2015-4). — arXiv: [1502.07020](https://arxiv.org/abs/1502.07020) [astro-ph.SR].
91. *Hayakawa H., Besser B. P., Iju T., Arlt R., Uneme S., Imada S., Bourdin P.-A., Kraml A.* Thaddäus Derfflinger’s Sunspot Observations during 1802-1824: A Primary Reference to Understand the Dalton Minimum // Astrophys. J. — 2020. — Vol. 890, no. 2. — P. 98. — DOI: [10.3847/1538-4357/ab65c9](https://doi.org/10.3847/1538-4357/ab65c9). — arXiv: [2001.02367](https://arxiv.org/abs/2001.02367) [astro-ph.SR].
92. *Hayakawa H., Kuroyanagi C., Carrasco V. M. S., Uneme S., Besser B. P., Sôma M., Imada S.* Sunspot Observations at the Eimmart Observatory and in Its Neighborhood during the Late Maunder Minimum (1681-1718) // Astrophys. J. — 2021. — Vol. 909, no. 2. — P. 166. — DOI: [10.3847/1538-4357/abd949](https://doi.org/10.3847/1538-4357/abd949).
93. *Hayakawa H., Uneme S., Besser B. P., Iju T., Imada S.* Stephan Prantner’s Sunspot Observations during the Dalton Minimum // Astrophys. J. — 2021. — Vol. 919, no. 1. — P. 1. — DOI: [10.3847/1538-4357/abee1b](https://doi.org/10.3847/1538-4357/abee1b). — arXiv: [2105.05405](https://arxiv.org/abs/2105.05405) [astro-ph.SR].
94. *Heinemann S., Temmer M., Heinemann N., Dissauer K., Samara E., Jerčić V., Hofmeister S., Veronig A.* Statistical Analysis and Catalog of Non-polar Coronal Holes Covering the SDO-Era Using CATCH // Solar Physics. — 2019. — Vol. 294. — P. 144. — DOI: [10.1007/s11207-019-1539-y](https://doi.org/10.1007/s11207-019-1539-y).
95. *Heinemann S. G., Temmer M., Hofmeister S. J., Veronig A. M., Venerstrøm S.* Three-phase Evolution of a Coronal Hole. I. 360° Remote Sensing and In Situ Observations // Astrophys. J. — 2018. — Vol. 861, no. 2. — P. 151. — DOI: [10.3847/1538-4357/aac897](https://doi.org/10.3847/1538-4357/aac897). — arXiv: [1806.09495](https://arxiv.org/abs/1806.09495) [astro-ph.SR].
96. *Henney C. J., Harvey J. W.* Automated Coronal Hole Detection using He 1083 nm Spectroheliograms and Photospheric Magnetograms //

- Large-scale Structures and their Role in Solar Activity. Vol. 346. — 2005. — P. 261. — arXiv: [astro-ph/0701122](#).
97. *Hess Webber S. A., Karna N., Pesnell W. D., Kirk M. S.* Areas of Polar Coronal Holes from 1996 Through 2010 // *Solar Phys.* — 2014. — Vol. 289, no. 11. — P. 4047–4067. — DOI: [10.1007/s11207-014-0564-0](#).
 98. *Hofmeister S. J., Veronig A., Temmer M., Vennerstrom S., Heber B., Vršnak B.* The Dependence of the Peak Velocity of High-Speed Solar Wind Streams as Measured in the Ecliptic by ACE and the STEREO satellites on the Area and Co-latitude of Their Solar Source Coronal Holes // *Journal of Geophysical Research (Space Physics)*. — 2018. — Vol. 123, no. 3. — P. 1738–1753. — DOI: [10.1002/2017JA024586](#). — arXiv: [1804.09579 \[astro-ph.SR\]](#).
 99. *Hong S., Kim J., Han J., Kim Y.* The Automatic Solar Synoptic Analyzer and Solar Wind Prediction // *AGU Fall Meeting Abstracts*. — 2014. — SH21A.
 100. *Hoyt D. V., Schatten K. H.* Group Sunspot Numbers: A New Solar Activity Reconstruction // *Solar Phys.* — 1998. — Vol. 179, no. 1. — P. 189–219. — DOI: [10.1023/A:1005007527816](#).
 101. *Hoyt D. V., Schatten K. H.* How Well Was the Sun Observed during the Maunder Minimum? // *Solar Phys.* — 1996. — Vol. 165, no. 1. — P. 181–192. — DOI: [10.1007/BF00149097](#).
 102. *Huang G. H., Lin C. H., Lee L. C.* Solar Open Flux Migration from Pole to Pole: Magnetic Field Reversal // *Scientific Reports*. — 2017. — Vol. 7. — P. 9488. — DOI: [10.1038/s41598-017-09862-2](#).
 103. *Iglovikov V., Mushinskiy S., Osin V.* Satellite Imagery Feature Detection using Deep Convolutional Neural Network: A Kaggle Competition // *CoRR*. — 2017. — Vol. abs/1706.06169. — arXiv: [1706.06169](#). — URL: <http://arxiv.org/abs/1706.06169>.

104. *Iglovikov V., Rakhlin A., Kalinin A. A., Shvets A.* Pediatric Bone Age Assessment Using Deep Convolutional Neural Networks // CoRR. — 2017. — Vol. abs/1712.05053. — arXiv: [1712.05053](https://arxiv.org/abs/1712.05053). — URL: <http://arxiv.org/abs/1712.05053>.
105. *Il'yn A. S., Kopyev A. V., Sirota V. A., Zybin K. P.* Long-term properties of finite-correlation-time isotropic stochastic systems // Phys. Rev. E. — 2022. — Vol. 105, no. 5. — P. 054130. — DOI: [10.1103/PhysRevE.105.054130](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.105.054130). — arXiv: [2203.00478](https://arxiv.org/abs/2203.00478) [math.PR].
106. *Illarionov E., Kisielius V., Stepanov R., Kuzanyan K. M.* Neural differential equations for the solar dynamo // Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics. — United States, 2026. — Vol. 113, no. 5. — P. L053202. — ISSN 1063-651X; 1539-3755; 1550-2376; 2470-0045; 2470-0053. — DOI: [10.1103/dpsp-bwkh](https://doi.org/10.1103/dpsp-bwkh).
107. *Illarionov E. A., Sokoloff D. D.* Finite memory time and anisotropy effects for initial magnetic energy growth in random flow of conducting media // Phys. Rev. E. — 2021. — Vol. 104, issue 1. — P. 015214. — DOI: [10.1103/PhysRevE.104.015214](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.104.015214). — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.104.015214>.
108. *Illarionov E. A., Sokoloff D. D.* Growth rate of the initial magnetic energy in isotropic velocity field with non-Gaussian distribution // Magnetohydrodynamics. — United States, 2023. — Vol. 59, no. 1. — P. 23–27. — ISSN 0024-998X. — DOI: [10.22364/mhd.59.1.2](https://doi.org/10.22364/mhd.59.1.2).
109. *Illarionov E. A., Sokoloff D. D.* Relative efficiency of three mechanisms of vector field growth in a random media // Phys. Rev. E. — 2023. — Vol. 107, issue 4. — P. 044110. — DOI: [10.1103/PhysRevE.107.044110](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.107.044110). — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.107.044110>.
110. *Illarionov E. A., Sokoloff D. D., Pavlenko S. S.* Memory Time Fluctuations and Explosive Growth of Moments in Systems of Equations with Random Coefficients // Computational Mathematics and Math-

- ematical Physics. — 2026. — Vol. 66, no. 1. — P. 15–19. — ISSN 0965-5425; 1555-6662. — DOI: [10.1134/S0965542525701684](https://doi.org/10.1134/S0965542525701684).
111. *Illarionov E., Arlt R.* Reconstruction of the Solar Activity from the Catalogs of the Zurich Observatory // Solar Phys. — 2022. — Vol. 297, no. 7. — P. 79. — DOI: [10.1007/s11207-022-02015-3](https://doi.org/10.1007/s11207-022-02015-3). — arXiv: [2205.10167](https://arxiv.org/abs/2205.10167) [astro-ph.SR].
 112. *Illarionov E., Arlt R.* Reconstruction of the Solar Activity from the Catalogs of the Zurich Observatory // Solar Phys. — 2022. — Vol. 297, no. 7. — P. 79. — DOI: [10.1007/s11207-022-02015-3](https://doi.org/10.1007/s11207-022-02015-3). — arXiv: [2205.10167](https://arxiv.org/abs/2205.10167) [astro-ph.SR].
 113. *Illarionov E., Kosovichev A., Tlatov A.* Machine-learning Approach to Identification of Coronal Holes in Solar Disk Images and Synoptic Maps // Astrophys. J. — 2020. — Vol. 903, no. 2. — P. 115. — DOI: [10.3847/1538-4357/abb94d](https://doi.org/10.3847/1538-4357/abb94d). — arXiv: [2006.08529](https://arxiv.org/abs/2006.08529) [astro-ph.SR].
 114. *Illarionov E., Tlatov A.* Parametrization of Sunspot Groups Based on Machine-Learning Approach // Solar Phys. — 2022. — Vol. 297, no. 2. — P. 19. — DOI: [10.1007/s11207-022-01955-0](https://doi.org/10.1007/s11207-022-01955-0). — arXiv: [2201.05840](https://arxiv.org/abs/2201.05840) [astro-ph.SR].
 115. *Illarionov E., Tlatov A., Berezin I., Skorbezh N.* Correlation of Coronal Hole Area Indices and Solar Wind Speed // Solar Phys. — 2025. — Vol. 300, no. 9. — P. 123. — DOI: [10.1007/s11207-025-02530-z](https://doi.org/10.1007/s11207-025-02530-z). — arXiv: [2507.21641](https://arxiv.org/abs/2507.21641) [astro-ph.SR].
 116. *Illarionov E. A., Tlatov A. G.* Segmentation of coronal holes in solar disc images with a convolutional neural network // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 2018. — Vol. 481, no. 4. — P. 5014–5021. — ISSN 1365-2966. — DOI: [10.1093/mnras/sty2628](https://doi.org/10.1093/mnras/sty2628). — URL: <http://dx.doi.org/10.1093/mnras/sty2628>.
 117. *Illarionov E. A., Yukui W., Pevtsov A. A.* Extraction of metadata from solar disk H-alpha observations at Sacramento Peak Observatory // Scientific Data. — 2026. — ISSN 2052-4463. — DOI: [10.1038/](https://doi.org/10.1038/)

- s41597-026-07243-x. — URL: <http://dx.doi.org/10.1038/s41597-026-07243-x>.
118. *Jarolim R., Veronig A. M., Hofmeister S., Heinemann S. G., Temmer M., Podladchikova T., Dissauer K.* Multi-channel coronal hole detection with convolutional neural networks // *Astron. Astrophys.* — 2021. — Vol. 652. — A13. — DOI: [10.1051/0004-6361/202140640](https://doi.org/10.1051/0004-6361/202140640). — arXiv: [2104.14313](https://arxiv.org/abs/2104.14313) [astro-ph.SR].
 119. *Johnson J., Alahi A., Fei-Fei L.* Perceptual losses for real-time style transfer and super-resolution // *European Conference on Computer Vision.* — 2016.
 120. *Johnstone I. M., Paul D.* PCA in High Dimensions: An Orientation // *Proceedings of the IEEE.* — 2018. — Vol. 106, no. 8. — P. 1277–1292. — DOI: [10.1109/JPROC.2018.2846730](https://doi.org/10.1109/JPROC.2018.2846730).
 121. *Käpylä P. J., Korpi M. J., Ossendrijver M., Tuominen I.* Local models of stellar convection. III. The Strouhal number // *Astronomy and Astrophysics.* — 2006. — Vol. 448, no. 2. — P. 433–438. — DOI: [10.1051/0004-6361:20042245](https://doi.org/10.1051/0004-6361:20042245). — arXiv: [astro-ph/0410586](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0410586) [astro-ph].
 122. *Käpylä P. J., Browning M. K., Brun A. S., Guerrero G., Warnecke J.* Simulations of Solar and Stellar Dynamos and Their Theoretical Interpretation // *Space Sci. Rev.* — 2023. — Vol. 219, no. 7. — P. 58. — DOI: [10.1007/s11214-023-01005-6](https://doi.org/10.1007/s11214-023-01005-6). — arXiv: [2305.16790](https://arxiv.org/abs/2305.16790) [astro-ph.SR].
 123. *Karachik N. V., Pevtsov A. A.* Solar Wind and Coronal Bright Points inside Coronal Holes // *Astrophys. J.* — 2011. — Vol. 735, no. 1. — P. 47. — DOI: [10.1088/0004-637X/735/1/47](https://doi.org/10.1088/0004-637X/735/1/47).
 124. *Karak B. B., Choudhuri A. R.* The Waldmeier effect and the flux transport solar dynamo // *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* — 2011. — Vol. 410, no. 3. — P. 1503–1512. — DOI: [10.1111/j.1365-2966.2010.17531.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2010.17531.x). — arXiv: [1008.0824](https://arxiv.org/abs/1008.0824) [astro-ph.SR].

125. *Karna N., Hess Webber S. A., Pesnell W. D.* Using Polar Coronal Hole Area Measurements to Determine the Solar Polar Magnetic Field Reversal in Solar Cycle 24 // *Solar Phys.* — 2014. — Vol. 289, no. 9. — P. 3381–3390. — DOI: [10.1007/s11207-014-0541-7](https://doi.org/10.1007/s11207-014-0541-7).
126. *Karoff C., Jørgensen C. S., Senthamizh Pavai V., Arlt R.* Christian Horrebow’s Sunspot Observations – II. Construction of a Record of Sunspot Positions // *Solar Phys.* — 2019. — Vol. 294, no. 6. — P. 78. — DOI: [10.1007/s11207-019-1466-y](https://doi.org/10.1007/s11207-019-1466-y). — arXiv: [1906.10895](https://arxiv.org/abs/1906.10895) [[astro-ph.SR](#)].
127. *Keller H. U., Friedli T. K.* Visibility limit of naked-eye sunspots // *QJRAS.* — 1992. — Vol. 33, no. 2. — P. 83–89.
128. *Khavaran A.* Role of Anisotropy in Turbulent Mixing Noise // *AIAA Journal.* — 1999. — Vol. 37, no. 7. — P. 832–841. — DOI: [10.2514/2.7531](https://doi.org/10.2514/2.7531).
129. *Kingma D. P., Ba J.* Adam: A Method for Stochastic Optimization. // *CoRR.* — 2014. — Vol. abs/1412.6980. — URL: <http://dblp.uni-trier.de/db/journals/corr/corr1412.html#KingmaB14>.
130. *Kingma D. P., Welling M.* An Introduction to Variational Autoencoders // *Found. Trends Mach. Learn.* — 2019. — Vol. 12, no. 4. — P. 307–392. — DOI: [10.1561/22000000056](https://doi.org/10.1561/22000000056).
131. *Kirillov A., Mintun E., Ravi N., Mao H., Rolland C., Gustafson L., Xiao T., Whitehead S., Berg A. C., Lo W.-Y., Dollár P., Girshick R.* Segment Anything. — 2023. — arXiv: [2304.02643](https://arxiv.org/abs/2304.02643) [[cs.CV](#)]. — URL: <https://arxiv.org/abs/2304.02643>.
132. *Kirk M. S., Pesnell W. D., Young C. A., Hess Webber S. A.* Automated detection of EUV Polar Coronal Holes during Solar Cycle 23 // *Solar Phys.* — 2009. — Vol. 257, no. 1. — P. 99–112. — DOI: [10.1007/s11207-009-9369-y](https://doi.org/10.1007/s11207-009-9369-y). — arXiv: [0901.1158](https://arxiv.org/abs/0901.1158) [[astro-ph.SR](#)].

133. *Kisielius V., Illarionov E.* Machine Learning for Reconstruction of Polarity Inversion Lines from Solar Filaments // Solar Physics. — Dordrecht, Netherlands, 2024. — Vol. 299, no. 5. — P. 69. — ISSN 0038-0938; 1573-093X. — DOI: [10.1007/s11207-024-02324-9](https://doi.org/10.1007/s11207-024-02324-9).
134. *Kleeorin N., Rogachevskii I., Sokoloff D.* Magnetic fluctuations with a zero mean field in a random fluid flow with a finite correlation time and a small magnetic diffusion // Phys. Rev. E. — 2002. — Vol. 65, no. 3. — P. 036303. — DOI: [10.1103/PhysRevE.65.036303](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.65.036303). — arXiv: [astro-ph/0205233](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0205233) [astro-ph].
135. *Kleeorin N., Rogachevskii I., Sokoloff D., Tomin D.* Mean-field dynamos in random Arnold-Beltrami-Childress and Roberts flows // Phys. Rev. E. — 2009. — Vol. 79, no. 4. — P. 046302. — DOI: [10.1103/PhysRevE.79.046302](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.79.046302). — arXiv: [0811.3123](https://arxiv.org/abs/0811.3123) [astro-ph].
136. *Klingenberg W. P.* Riemannian Geometry. — Berlin, New York : De Gruyter, 1995. — ISBN 9783110905120. — DOI: [doi : 10 . 1515 / 9783110905120](https://doi.org/10.1515/9783110905120). — URL: [https : // doi . org / 10 . 1515 / 9783110905120](https://doi.org/10.1515/9783110905120).
137. *Ko Y.-K., Muglach K., Wang Y.-M., Young P. R., Lepri S. T.* Temporal Evolution of Solar Wind Ion Composition and their Source Coronal Holes during the Declining Phase of Cycle 23. I. Low-latitude Extension of Polar Coronal Holes // Astrophys. J. — 2014. — Vol. 787, no. 2. — P. 121. — DOI: [10.1088/0004-637X/787/2/121](https://doi.org/10.1088/0004-637X/787/2/121).
138. *Kogan V. R., Kolokolov I. V., Lebedev V. V.* Kinematic magnetic dynamo in a random flow with strong average shear // Journal of Physics A Mathematical General. — 2010. — Vol. 43, no. 18. — P. 182001. — DOI: [10.1088/1751-8113/43/18/182001](https://doi.org/10.1088/1751-8113/43/18/182001).
139. *Krause F., Rädler K.-H.* Mean-field magnetohydrodynamics and dynamo theory. — 1980.

140. *Krieger A. S., Timothy A. F., Roelof E. C.* A Coronal Hole and Its Identification as the Source of a High Velocity Solar Wind Stream // Solar Phys. — 1973. — Vol. 29, no. 2. — P. 505–525. — DOI: [10.1007/BF00150828](https://doi.org/10.1007/BF00150828).
141. *Krista L. D., Gallagher P. T.* Automated Coronal Hole Detection Using Local Intensity Thresholding Techniques // Solar Physics. — 2009. — Vol. 256, no. 1. — P. 87–100. — ISSN 1573-093X. — DOI: [10.1007/s11207-009-9357-2](https://doi.org/10.1007/s11207-009-9357-2). — URL: <https://doi.org/10.1007/s11207-009-9357-2>.
142. *Lambert V., Sokoloff D., Tutubalin V.* Light propagation in a universe with spatial inhomogeneities // Astrophys. Space Sci. — 2005. — Vol. 298, no. 3. — P. 409–418. — DOI: [10.1007/s10509-005-5831-y](https://doi.org/10.1007/s10509-005-5831-y).
143. *Leenaarts J., Pereira T. M. D., Carlsson M., Uitenbroek H., De Pontieu B.* The Formation of IRIS Diagnostics. I. A Quintessential Model Atom of Mg II and General Formation Properties of the Mg II h&k Lines // Astrophys. J. — 2013. — Vol. 772, no. 2. — P. 89. — DOI: [10.1088/0004-637X/772/2/89](https://doi.org/10.1088/0004-637X/772/2/89). — arXiv: [1306.0668](https://arxiv.org/abs/1306.0668) [astro-ph.SR].
144. *Leighton R. B.* A Magneto-Kinematic Model of the Solar Cycle // Astrophys. J. — 1969. — Vol. 156. — P. 1. — DOI: [10.1086/149943](https://doi.org/10.1086/149943).
145. *Lemen J. R., Title A. M., Akin D. J., Boerner P. F., Chou C., Drake J. F., Duncan D. W., Edwards C. G., Friedlaender F. M., Heyman G. F., Hurlburt N. E., Katz N. L., Kushner G. D., Levay M., Lindgren R. W., Mathur D. P., McFeaters E. L., Mitchell S., Rehse R. A., Schrijver C. J., Springer L. A., Stern R. A., Tarbell T. D., Wuelser J.-P., Wolfson C. J., Yanari C., Bookbinder J. A., Cheimets P. N., Caldwell D., Deluca E. E., Gates R., Golub L., Park S., Podgorski W. A., Bush R. I., Scherrer P. H., Gummie M. A., Smith P., Auker G., Jerram P., Pool P., Soufli R., Windt D. L., Beardsley S., Clapp M., Lang J., Waltham N.* The Atmospheric Imaging Assembly (AIA) on the Solar Dynamics Observatory (SDO) // Solar Physics. — 2012. —

- Vol. 275, no. 1. — P. 17–40. — ISSN 1573-093X. — DOI: [10.1007/s11207-011-9776-8](https://doi.org/10.1007/s11207-011-9776-8). — URL: <https://doi.org/10.1007/s11207-011-9776-8>.
146. *Lepshokov D. K., Tlatov A. G., Vasil'eva V. V.* Reconstruction of sunspot characteristics for 1853–1879 // *Geomagnetism and Aeronomy*. — 2012. — Vol. 52, no. 7. — P. 843–848. — DOI: [10.1134/s0016793212070109](https://doi.org/10.1134/s0016793212070109).
 147. *Lettermann L., Jurado A., Betz T., Wörgötter F., Herzog S.* Tutorial: a beginner's guide to building a representative model of dynamical systems using the adjoint method // *Communications Physics*. — 2024. — Vol. 7, no. 1. — P. 128. — DOI: [10.1038/s42005-024-01606-9](https://doi.org/10.1038/s42005-024-01606-9).
 148. *Lorensen W. E., Cline H. E.* Marching Cubes: A High Resolution 3D Surface Construction Algorithm // *Proceedings of the 14th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques*. — New York, NY, USA : Association for Computing Machinery, 1987. — P. 163–169. — (SIGGRAPH '87). — ISBN 0897912276. — DOI: [10.1145/37401.37422](https://doi.org/10.1145/37401.37422). — URL: <https://doi.org/10.1145/37401.37422>.
 149. *Lowder C., Qiu J., Leamon R., Liu Y.* Measurements of EUV Coronal Holes and Open Magnetic Flux // *The Astrophysical Journal*. — 2014. — Vol. 783, no. 2. — P. 142. — DOI: [10.1088/0004-637X/783/2/142](https://doi.org/10.1088/0004-637X/783/2/142).
 150. *Lowder C., Qiu J., Leamon R.* Coronal Holes and Open Magnetic Flux over Cycles 23 and 24 // *Solar Phys*. — 2017. — Vol. 292, no. 1. — P. 18. — DOI: [10.1007/s11207-016-1041-8](https://doi.org/10.1007/s11207-016-1041-8). — arXiv: [1612.07595](https://arxiv.org/abs/1612.07595) [astro-ph.SR].
 151. *Makarenko N., Malkova D., Machin M., Knyazeva I., Makarenko I.* Methods of Computational Topology for the Analysis of Dynamics of Active Regions of the Sun // *Journal of Mathematical Sciences (United*

- States). — 2014. — Vol. 203. — P. 806–815. — DOI: [10.1007/s10958-014-2170-y](https://doi.org/10.1007/s10958-014-2170-y).
152. *Makarov V. I., Fatianov M. P., Sivaraman K. R.* Poleward Migration of the Magnetic Neutral Line and the Reversal of the Polar Fields on the Sun - Part One - Period 1945-1981 // *Solar Phys.* — 1983. — Vol. 85, no. 2. — P. 215–226. — DOI: [10.1007/BF00148649](https://doi.org/10.1007/BF00148649).
 153. *Makarov V. I., Sivaraman K. R.* Poleward Migration of the Magnetic Neutral Line and the Reversal of the Polar Fields on the Sun - Part Two - Period 1904-1940 // *Solar Phys.* — 1983. — Vol. 85, no. 2. — P. 227–233. — DOI: [10.1007/BF00148650](https://doi.org/10.1007/BF00148650).
 154. *Marroquin R. D., Sadykov V., Kosovichev A., Kitiashvili I. N., Oria V., Nita G. M., Illarionov E., O’Keefe P. M., Francis F., Chong C. J., Kosovitch P., Ali A.* Statistical Study of the Correlation between Solar Energetic Particles and Properties of Active Regions // *Astrophys. J.* — 2023. — Vol. 952, no. 2. — P. 97. — DOI: [10.3847/1538-4357/acdb65](https://doi.org/10.3847/1538-4357/acdb65). — arXiv: [2303.06100](https://arxiv.org/abs/2303.06100) [astro-ph.SR].
 155. *McIntosh P. S.* Solar magnetic fields derived from hydrogen alpha filtergrams. // *Reviews of Geophysics and Space Physics.* — 1972. — Vol. 10. — P. 837–846. — DOI: [10.1029/RG010i003p00837](https://doi.org/10.1029/RG010i003p00837).
 156. *McIntosh P. S.* The Classification of Sunspot Groups // *Solar Phys.* — 1990. — Vol. 125, no. 2. — P. 251–267. — DOI: [10.1007/BF00158405](https://doi.org/10.1007/BF00158405).
 157. *Meng Q., Chen W., Wang Y., Ma Z., Liu T.-Y.* Convergence Analysis of Distributed Stochastic Gradient Descent with Shuffling // *CoRR.* — 2017. — Vol. abs/1709.10432.
 158. *Miyahara H., Masuda K., Muraki Y., Furuzawa H., Menjo H., Nakamura T.* Cyclicity of Solar Activity During the Maunder Minimum Deduced from Radiocarbon Content // *Solar Phys.* — 2004. — Vol. 224, no. 1/2. — P. 317–322. — DOI: [10.1007/s11207-005-6501-5](https://doi.org/10.1007/s11207-005-6501-5).

159. *Moon K. R., Li J. J., Delouille V., De Visscher R., Watson F., Hero A. O.* Image patch analysis of sunspots and active regions. I. Intrinsic dimension and correlation analysis // *Journal of Space Weather and Space Climate*. — 2016. — Vol. 6. — A2. — DOI: [10.1051/swsc/2015044](https://doi.org/10.1051/swsc/2015044). — arXiv: [1503.04127](https://arxiv.org/abs/1503.04127) [[astro-ph.SR](#)].
160. *Muñoz-Jaramillo A., Senkpeil R. R., Windmueller J. C., Amouzou E. C., Longcope D. W., Tlatov A. G., Nagovitsyn Y. A., Pevtsov A. A., Chapman G. A., Cookson A. M., Yeates A. R., Watson F. T., Balmaceda L. A., DeLuca E. E., Martens P. C. H.* Small-scale and Global Dynamos and the Area and Flux Distributions of Active Regions, Sunspot Groups, and Sunspots: A Multi-database Study // *Astrophys. J.* — 2015. — Vol. 800, no. 1. — P. 48. — DOI: [10.1088/0004-637X/800/1/48](https://doi.org/10.1088/0004-637X/800/1/48). — arXiv: [1410.6281](https://arxiv.org/abs/1410.6281) [[astro-ph.SR](#)].
161. *Murphy K. P.* Machine Learning: A Probabilistic Perspective. — The MIT Press, 2012. — ISBN 0262018020.
162. *Nagovitsyn Y. A.* Solar cycles during the Maunder minimum // *Astronomy Letters*. — 2007. — Vol. 33, no. 5. — P. 340–345. — DOI: [10.1134/S1063773707050076](https://doi.org/10.1134/S1063773707050076).
163. *Newton A. P. L., Kim E.* Determining the temporal dynamics of the solar α effect // *Astron. Astrophys.* — 2013. — Vol. 551. — A66. — DOI: [10.1051/0004-6361/201219456](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201219456).
164. *Nielsen M. L., Kjeldsen H.* Is Cycle 24 the Beginning of a Dalton-Like Minimum? // *Solar Phys.* — 2011. — Vol. 270, no. 1. — P. 385. — DOI: [10.1007/s11207-011-9733-6](https://doi.org/10.1007/s11207-011-9733-6). — arXiv: [1104.4624](https://arxiv.org/abs/1104.4624) [[astro-ph.SR](#)].
165. *Nolte J. T., Krieger A. S., Timothy A. F., Gold R. E., Roelof E. C., Vaiana G., Lazarus A. J., Sullivan J. D., McIntosh P. S.* Coronal holes as sources of solar wind. // *Solar Phys.* — 1976. — Vol. 46, no. 2. — P. 303–322. — DOI: [10.1007/BF00149859](https://doi.org/10.1007/BF00149859).

166. *Novikov V. G., Ruzmaikin A. A., Sokoloff D. D.* Kinematic dynamo in a reflection-invariant random field // Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics. — 1983. — Vol. 58, no. 3. — P. 527–532.
167. *Obridko V. N., Shelting B. D., Livshits I. M., Asgarov A. B.* Contrast of Coronal Holes and Parameters of Associated Solar Wind Streams // Solar Physics. — 2009. — Vol. 260, no. 1. — P. 191–206. — ISSN 1573-093X. — DOI: [10.1007/s11207-009-9435-5](https://doi.org/10.1007/s11207-009-9435-5). — URL: <https://doi.org/10.1007/s11207-009-9435-5>.
168. *Oh Y., Kam S., Lee J., Lim D.-Y., Kim S., Bui A.* Comprehensive Review of Neural Differential Equations for Time Series Analysis. — 2025. — URL: <https://arxiv.org/abs/2502.09885>.
169. *Passos D., Lopes I.* A Low-Order Solar Dynamo Model: Inferred Meridional Circulation Variations Since 1750 // Astrophys. J. — 2008. — Vol. 686, no. 2. — P. 1420–1425. — DOI: [10.1086/591511](https://doi.org/10.1086/591511).
170. *Pavlenko S., Illarionov E., Sokoloff D.* Memory time fluctuations and instabilities in random media // Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics. — 2025. — Vol. 0, no. 0. — P. 1–7. — DOI: [10.1080/03091929.2025.2455175](https://doi.org/10.1080/03091929.2025.2455175). — eprint: <https://doi.org/10.1080/03091929.2025.2455175>. — URL: <https://doi.org/10.1080/03091929.2025.2455175>.
171. *Pearson K.* LIII. On lines and planes of closest fit to systems of points in space // The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science. — 1901. — Vol. 2, no. 11. — P. 559–572. — DOI: [10.1080/14786440109462720](https://doi.org/10.1080/14786440109462720).
172. *Perez L., Wang J.* The Effectiveness of Data Augmentation in Image Classification using Deep Learning // CoRR. — 2017. — Vol. abs/1712.04621.
173. *Pipin V. V., Kosovichev A. G.* The Asymmetry of Sunspot Cycles and Waldmeier Relations as a Result of Nonlinear Surface-shear Shaped Dynamo // Astrophys. J. — 2011. — Vol. 741, no. 1. — P. 1. — DOI: [10.1088/0004-637X/741/1/1](https://doi.org/10.1088/0004-637X/741/1/1). — arXiv: [1105.1828](https://arxiv.org/abs/1105.1828) [astro-ph.SR].

174. *Pipin V. V., Kosovichev A. G.* The Subsurface-shear-shaped Solar $\alpha\Omega$ Dynamo // *Astrophys. J. Lett.* — 2011. — Vol. 727, no. 2. — P. L45. — DOI: [10.1088/2041-8205/727/2/L45](https://doi.org/10.1088/2041-8205/727/2/L45).
175. *Priest E.* Magnetohydrodynamics of the Sun. — Cambridge University Press, 2014. — ISBN 9780521854719. — URL: <https://books.google.ru/books?id=BrbSAgAAQBAJ>.
176. *Radiuk P. M.* Impact of Training Set Batch Size on the Performance of Convolutional Neural Networks for Diverse Datasets // *Information Technology and Management Science.* — 2017. — Vol. 20, no. 1. — P. 20–24. — URL: <https://content.sciendo.com/view/journals/itms/20/1/article-p20.xml>.
177. *Redmon J., Divvala S., Girshick R., Farhadi A.* You Only Look Once: Unified, Real-Time Object Detection // *arXiv e-prints.* — 2015. — arXiv:1506.02640. — DOI: [10.48550/arXiv.1506.02640](https://doi.org/10.48550/arXiv.1506.02640). — arXiv: [1506.02640](https://arxiv.org/abs/1506.02640) [cs.CV].
178. *Reiss M., Temmer M., Rotter T., Hofmeister S., Veronig A.* Identification of coronal holes and filament channels in SDO/AIA 193Å images via geometrical classification methods // *Cent. Eur. Astrophys. Bull.* — 2014. — Vol. 38.
179. *Reiss M. A., Muglach K., Mason E., Davies E. E., Chakraborty S., Delouille V., Downs C., Garton T. M., Grajeda J. A., Hamada A., Heinemann S. G., Hofmeister S., Illarionov E., Jarolim R., Krista L., Lowder C., Verwichte E., Arge C. N., Boucheron L. E., Foullon C., Kirk M. S., Kosovichev A., Leisner A., Möstl C., Turtle J., Veronig A.* A Community Data Set for Comparing Automated Coronal Hole Detection Schemes // *The Astrophysical Journal Supplement Series.* — 2024. — Vol. 271, no. 1. — P. 6. — DOI: [10.3847/1538-4365/ad1408](https://doi.org/10.3847/1538-4365/ad1408). — URL: <https://doi.org/10.3847/1538-4365/ad1408>.
180. *Reiss M. A., Muglach K., Möstl C., Arge C. N., Bailey R., Delouille V., Garton T. M., Hamada A., Hofmeister S., Illarionov E., Jarolim R., Kirk M. S. F., Kosovichev A., Krista L., Lee S., Lowder C., Mac-*

- Neice P. J., Veronig A., Cospar Isnat Coronal Hole Boundary Working Team.* The Observational Uncertainty of Coronal Hole Boundaries in Automated Detection Schemes // *Astrophys. J.* — 2021. — Vol. 913, no. 1. — P. 28. — DOI: [10.3847/1538-4357/abf2c8](https://doi.org/10.3847/1538-4357/abf2c8). — arXiv: [2103.14403](https://arxiv.org/abs/2103.14403) [astro-ph.SR].
181. *Ribes J. C., Nesme-Ribes E.* The solar sunspot cycle in the Maunder minimum AD1645 to AD1715 // *Astron. Astrophys.* — 1993. — Vol. 276. — P. 549.
 182. *Robbins S., Henney C. J., Harvey J. W.* Solar Wind Forecasting with Coronal Holes // *Solar Physics.* — 2006. — Vol. 233, no. 2. — P. 265–276. — ISSN 1573-093X. — DOI: [10.1007/s11207-006-0064-y](https://doi.org/10.1007/s11207-006-0064-y). — URL: <https://doi.org/10.1007/s11207-006-0064-y>.
 183. *Rogachevskii I., Kleeorin N.* Electromotive force for an anisotropic turbulence: Intermediate nonlinearity // *Phys. Rev. E.* — 2000. — Vol. 61, no. 5. — P. 5202–5210. — DOI: [10.1103/PhysRevE.61.5202](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.61.5202).
 184. *Ronneberger O., P.Fischer, Brox T.* U-Net: Convolutional Networks for Biomedical Image Segmentation // *Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention (MICCAI).* Vol. 9351. — Springer, 2015. — P. 234–241. — (LNCS). — URL: <http://lmb.informatik.uni-freiburg.de/Publications/2015/RFB15a> ; (available on arXiv:1505.04597 [cs.CV]).
 185. *Rotter T., Veronig A. M., Temmer M., Vršnak B.* Real-Time Solar Wind Prediction Based on SDO/AIA Coronal Hole Data // *Solar Physics.* — 2015. — Vol. 290, no. 5. — P. 1355–1370. — ISSN 1573-093X. — DOI: [10.1007/s11207-015-0680-5](https://doi.org/10.1007/s11207-015-0680-5). — URL: <https://doi.org/10.1007/s11207-015-0680-5>.
 186. *Rotter T., Veronig A. M., Temmer M., Vršnak B.* Relation Between Coronal Hole Areas on the Sun and the Solar Wind Parameters at 1 AU // *Solar Phys.* — 2012. — Vol. 281, no. 2. — P. 793–813. — DOI: [10.1007/s11207-012-0101-y](https://doi.org/10.1007/s11207-012-0101-y).

187. *Roy S., Schmude J., Lal R., Gaur V., Freitag M., Kuehnert J., Kessel T. van, Hegde D. V., Muñoz-Jaramillo A., Jakubik J., Vos E., Mandal K., Asanjan A. A., Sousa Almeida J. L. de, Lin A., Singh T., Yang K., Pandey C., Hong J., Aydin B., Kurth T., McGranaghan R., Kasapis S., Upendran V., Bahauddin S., Silva D. da, Pogorelov N. V., Spalding A., Watson C., Maskey M., Guhathakurta M., Bernabe-Moreno J., Ramachandran R.* Surya: Foundation Model for Heliophysics. — 2025. — arXiv: [2508.14112 \[astro-ph.SR\]](https://arxiv.org/abs/2508.14112). — URL: <https://arxiv.org/abs/2508.14112>.
188. *Rüdiger G., Kitchatinov L. L., Hollerbach R.* Magnetic Processes in Astrophysics: theory, simulations, experiments. — Wiley-VCH, L., 2013.
189. *Sadykov V., Kosovichev A., Kitiashvili I., Oria V., Nita G. M., Illarionov E., O’Keefe P., Jiang Y., Fereira S., Ali A.* Prediction of Solar Proton Events with Machine Learning: Comparison with Operational Forecasts and ”All-Clear” Perspectives. — 2021. — arXiv: [2107.03911 \[astro-ph.SR\]](https://arxiv.org/abs/2107.03911).
190. *Sadykov V. M., Kitiashvili I. N., Dalda A. S., Oria V., Kosovichev A. G., Illarionov E.* Compression of Solar Spectroscopic Observations: a Case Study of Mg II k Spectral Line Profiles Observed by NASA’s IRIS Satellite // 2021 International Conference on Content-Based Multimedia Indexing (CBMI). — 2021. — P. 1–6. — DOI: [10.1109/CBMI50038.2021.9461879](https://doi.org/10.1109/CBMI50038.2021.9461879).
191. *Sadykov V. M., Kitiashvili I. N., Kosovichev A. G., Wray A. A.* Connecting Atmospheric Properties and Synthetic Emission of Shock Waves Using 3D RMHD Simulations of the Quiet Sun // The Astrophysical Journal. — 2021. — Vol. 909, no. 1. — P. 35. — DOI: [10.3847/1538-4357/abd9c7](https://doi.org/10.3847/1538-4357/abd9c7). — URL: <https://dx.doi.org/10.3847/1538-4357/abd9c7>.
192. *Samanta T., Tian H., Nakariakov V. M.* Evidence for Vortex Shedding in the Sun’s Hot Corona // Physical Review Letters. — 2019. — Vol.

- 123, no. 3. — P. 035102. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.123.035102](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.123.035102). — arXiv: [1907.08930](https://arxiv.org/abs/1907.08930) [astro-ph.SR].
193. *Sapienza F., Bolibar J., Schäfer F., Groenke B., Pal A., Boussange V., Heimbach P., Hooker G., Pérez F., Persson P.-O., Rackauckas C.* Differentiable Programming for Differential Equations: A Review // arXiv e-prints. — 2024. — arXiv:2406.09699. — DOI: [10.48550/arXiv.2406.09699](https://doi.org/10.48550/arXiv.2406.09699).
 194. *Schaefer B. E.* Visibility of Sunspots // *Astrophys. J.* — 1993. — Vol. 411. — P. 909. — DOI: [10.1086/172895](https://doi.org/10.1086/172895).
 195. *Scholl I. F., Habbal S. R.* Automatic Detection and Classification of Coronal Holes and Filaments Based on EUV and Magnetogram Observations of the Solar Disk // *Solar Physics*. — 2008. — Vol. 248, no. 2. — P. 425–439. — ISSN 1573-093X. — DOI: [10.1007/s11207-007-9075-6](https://doi.org/10.1007/s11207-007-9075-6). — URL: <https://doi.org/10.1007/s11207-007-9075-6>.
 196. *Schou J., Scherrer P. H., Bush R. I., Wachter R., Couvidat S., Rabello-Soares M. C., Bogart R. S., Hoeksema J. T., Liu Y., Duvall T. L., Akin D. J., Allard B. A., Miles J. W., Rairden R., Shine R. A., Tarbell T. D., Title A. M., Wolfson C. J., Elmore D. F., Norton A. A., Tomczyk S.* Design and Ground Calibration of the Helioseismic and Magnetic Imager (HMI) Instrument on the Solar Dynamics Observatory (SDO) // *Solar Phys.* — 2012. — Vol. 275, no. 1/2. — P. 229–259. — DOI: [10.1007/s11207-011-9842-2](https://doi.org/10.1007/s11207-011-9842-2).
 197. *Sheeley N. R. J., Harvey J. W., Feldman W. C.* Coronal holes, solar wind streams, and recurrent geomagnetic disturbances: 1973–1976 // *Solar Phys.* — 1976. — Vol. 49, no. 2. — P. 271–278. — DOI: [10.1007/BF00162451](https://doi.org/10.1007/BF00162451).
 198. *Shi B., Bai X., Yao C.* An End-to-End Trainable Neural Network for Image-based Sequence Recognition and Its Application to Scene Text Recognition // arXiv e-prints. — 2015. — arXiv:1507.05717. — arXiv: [1507.05717](https://arxiv.org/abs/1507.05717) [cs.CV].

199. *Silverman S. M., Hayakawa H.* The Dalton Minimum and John Dalton's Auroral Observations // Journal of Space Weather and Space Climate. — 2021. — Vol. 11. — P. 17. — DOI: [10.1051/swsc/202008210.48550](https://doi.org/10.1051/swsc/202008210.48550) / [arXiv: 2012.13713](https://arxiv.org/abs/2012.13713) [astro-ph.SR].
200. *Simonyan K., Zisserman A.* Very Deep Convolutional Networks for Large-Scale Image Recognition. — 2015. — arXiv: [1409.1556](https://arxiv.org/abs/1409.1556) [cs.CV].
201. *Snell J., Ridgeway K., Liao R., Roads B. D., Mozer M. C., Zemel R. S.* Learning to generate images with perceptual similarity metrics // 2017 IEEE International Conference on Image Processing (ICIP). — IEEE. 2017. — P. 4277–4281.
202. *Sobolev A. M., Moran J. M., Gray M. D., Alakoz A., Imai H., Baan W. A., Tolmachev A. M., Samodurov V. A., Ladeyshchikov D. A.* Sun-sized Water Vapor Masers in Cepheus A // The Astrophysical Journal. — 2018. — Vol. 856, no. 1. — P. 60. — DOI: [10.3847/1538-4357/aab096](https://doi.org/10.3847/1538-4357/aab096). — arXiv: [1802.06756](https://arxiv.org/abs/1802.06756) [astro-ph.GA].
203. *Sokoloff D. D., Chikina A. A., Illarionov E. A.* Mean Square Geodesic Deviation in the Zeldovich Problem on Light Propagation in a Universe with Inhomogeneities // Astronomy Reports. — 2021. — Vol. 65, no. 5. — P. 362–369. — DOI: [10.1134/S1063772921050073](https://doi.org/10.1134/S1063772921050073).
204. *Sokoloff D., Illarionov E. A.* Intermittency and random matrices // Journal of Plasma Physics. — 2015. — Vol. 81, no. 4. — P. 395810402. — DOI: [10.1017/S0022377815000458](https://doi.org/10.1017/S0022377815000458).
205. *Spörer G.* Beobachtungen der Sonnenflecken zu Anclam. — Leipzig: Wilh. Engelmann, 1874.
206. *Srivastava N., Hinton G., Krizhevsky A., Sutskever I., Salakhutdinov R.* Dropout: A Simple Way to Prevent Neural Networks from Overfitting // Journal of Machine Learning Research. — 2014. — Vol. 15. — P. 1929–1958. — URL: <http://jmlr.org/papers/v15/srivastava14a.html>.

207. *Stenning D., Lee T., Dyk D. van, Kashyap V., Sandell J., Young C.* Morphological Feature Extraction for Statistical Learning With Applications To Solar Image Data // Statistical Analysis and Data Mining. — 2013. — Vol. 6. — DOI: [10.1002/sam.11200](https://doi.org/10.1002/sam.11200).
208. *Stephenson F. R., Morrison L. V., Hohenkerk C. Y.* Measurement of the Earth's rotation: 720 BC to AD 2015 // Proceedings of the Royal Society of London Series A. — 2016. — Vol. 472, no. 2196. — P. 20160404. — DOI: [10.1098/rspa.2016.0404](https://doi.org/10.1098/rspa.2016.0404).
209. *Stix M.* The Sun. — Springer Berlin Heidelberg, 2002. — DOI: [10.1007/978-3-642-56042-2](https://doi.org/10.1007/978-3-642-56042-2). — URL: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-56042-2>.
210. *Stone E., Frandsen A., Mewaldt R., Christian E., Margolies D., Ormes J., Snow F.* The Advanced Composition Explorer // Space Science Reviews. — 1998. — Vol. 86, no. 1. — P. 1–22. — ISSN 1572-9672. — DOI: [10.1023/A:1005082526237](https://doi.org/10.1023/A:1005082526237). — URL: <https://doi.org/10.1023/A:1005082526237>.
211. *Svalgaard L., Schatten K. H.* Reconstruction of the Sunspot Group Number: The Backbone Method // Solar Phys. — 2016. — Vol. 291, no. 9/10. — P. 2653–2684. — DOI: [10.1007/s11207-015-0815-8](https://doi.org/10.1007/s11207-015-0815-8). — arXiv: [1506.00755](https://arxiv.org/abs/1506.00755) [astro-ph.SR].
212. *Ternullo M., Contarino L., Romano P., Zuccarello F.* A statistical analysis of sunspot groups hosting M and X flares // Astronomische Nachrichten. — 2006. — Vol. 327, no. 1. — P. 36–43. — DOI: [10.1002/asna.200510485](https://doi.org/10.1002/asna.200510485).
213. *Tlatov A., Tavastsherna K., Vasil'eva V.* Coronal Holes in Solar Cycles 21 to 23 // Solar Phys. — 2014. — Vol. 289, no. 4. — P. 1349–1358. — DOI: [10.1007/s11207-013-0387-4](https://doi.org/10.1007/s11207-013-0387-4).
214. *Tlatova K. A., Vasil'eva V. V., Tlatov A. G.* Drift of Polar Prominences in Solar Cycles 13–24 // Geomagnetism and Aeronomy. — 2020. — Vol. 59, no. 8. — P. 1022–1028. — DOI: [10.1134/S001679321908022X](https://doi.org/10.1134/S001679321908022X).

215. *Toma G. de.* Evolution of Coronal Holes and Implications for High-Speed Solar Wind During the Minimum Between Cycles 23 and 24 // Solar Physics. — 2011. — Vol. 274, no. 1. — P. 195–217. — DOI: [10.1007/s11207-010-9677-2](https://doi.org/10.1007/s11207-010-9677-2). — URL: <https://doi.org/10.1007/s11207-010-9677-2>.
216. *Toma G. D., Arge C. N.* Multi-wavelength Observations of Coronal Holes // Large-scale Structures and their Role in Solar Activity. Vol. 346 / ed. by K. Sankarasubramanian, M. Penn, A. Pevtsov. — 2005. — P. 251. — (Astronomical Society of the Pacific Conference Series).
217. *Tutubalin V.* A central limit theorem for products of random matrices and some of its applications // Symposia Mathematica. Vol. 21. — 1977. — P. 101–116.
218. *Usoskin I. G., Mursula K., Kovaltsov G. A.* Reconstruction of Monthly and Yearly Group Sunspot Numbers From Sparse Daily Observations // Solar Phys. — 2003. — Vol. 218, no. 1. — P. 295–305. — DOI: [10.1023/B:SOLA.0000013029.99907.97](https://doi.org/10.1023/B:SOLA.0000013029.99907.97).
219. *Usoskin I. G., Solanki S. K., Krivova N. A., Hofer B., Kovaltsov G. A., Wacker L., Brehm N., Kromer B.* Solar cyclic activity over the last millennium reconstructed from annual ^{14}C data // Astron. Astrophys. — 2021. — Vol. 649. — A141. — DOI: [10.1051/0004-6361/20214071110.48550/arXiv.2103.15112](https://doi.org/10.1051/0004-6361/20214071110.48550/arXiv.2103.15112). — arXiv: [2103.15112](https://arxiv.org/abs/2103.15112) [astro-ph.SR].
220. *Usoskin I., Kovaltsov G., Kiviahio W.* Robustness of Solar-Cycle Empirical Rules Across Different Series Including an Updated Active-Day Fraction (ADF) Sunspot Group Series // Solar Phys. — 2021. — Vol. 296, no. 1. — P. 13. — DOI: [10.1007/s11207-020-01750-9](https://doi.org/10.1007/s11207-020-01750-9).
221. *Usoskin I. G., Arlt R., Asvestari E., Hawkins E., Käpylä M., Kovaltsov G. A., Krivova N., Lockwood M., Mursula K., O'Reilly J., Owens M., Scott C. J., Sokoloff D. D., Solanki S. K., Soon W., Vaquero J. M.* The Maunder minimum (1645–1715) was indeed a grand minimum: A reassessment of multiple datasets // Astron. Astrophys. — 2015. —

- Vol. 581. — A95. — DOI: [10.1051/0004-6361/201526652](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201526652). — arXiv: [1507.05191](https://arxiv.org/abs/1507.05191) [astro-ph.SR].
222. *Usoskin I. G., Mursula K., Arlt R., Kovaltsov G. A.* A Solar Cycle Lost in 1793-1800: Early Sunspot Observations Resolve the Old Mystery // *Astrophys. J. Lett.* — 2009. — Vol. 700, no. 2. — P. L154–L157. — DOI: [10.1088/0004-637X/700/2/L154](https://doi.org/10.1088/0004-637X/700/2/L154). — arXiv: [0907.0063](https://arxiv.org/abs/0907.0063) [astro-ph.SR].
 223. *Vaquero J. M., Kovaltsov G. A., Usoskin I. G., Carrasco V. M. S., Gallego M. C.* Level and length of cyclic solar activity during the Maunder minimum as deduced from the active-day statistics // *Astron. Astrophys.* — 2015. — Vol. 577. — A71. — DOI: [10.1051/0004-6361/201525962](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201525962). — arXiv: [1503.07664](https://arxiv.org/abs/1503.07664) [astro-ph.SR].
 224. *Vaswani A., Shazeer N., Parmar N., Uszkoreit J., Jones L., Gomez A. N., Kaiser L., Polosukhin I.* Attention Is All You Need. — 2023. — arXiv: [1706.03762](https://arxiv.org/abs/1706.03762) [cs.CL].
 225. *Verbeeck, C., Delouille, V., Mampaey, B., De Visscher, R.* The SPoCA-suite: Software for extraction, characterization, and tracking of active regions and coronal holes on EUV images // *Astron. Astrophys.* — 2014. — Vol. 561. — A29. — DOI: [10.1051/0004-6361/201321243](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201321243). — URL: <https://doi.org/10.1051/0004-6361/201321243>.
 226. *Viterbi A.* Error bounds for convolutional codes and an asymptotically optimum decoding algorithm // *IEEE Transactions on Information Theory*. — 1967. — Vol. 13, no. 2. — P. 260–269. — DOI: [10.1109/TIT.1967.1054010](https://doi.org/10.1109/TIT.1967.1054010).
 227. *Wang Y.-M.* Small-scale Flux Emergence, Coronal Hole Heating, and Flux-tube Expansion: A Hybrid Solar Wind Model // *The Astrophysical Journal*. — 2020. — Vol. 904, no. 2. — P. 199. — DOI: [10.3847/1538-4357/abbda6](https://doi.org/10.3847/1538-4357/abbda6). — URL: <https://dx.doi.org/10.3847/1538-4357/abbda6>.

228. *Whitman K.* [et al.]. Review of solar energetic particle models // *Advances in Space Research*. — 2022. — ISSN 0273-1177. — DOI: <https://doi.org/10.1016/j.asr.2022.08.006>. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0273117722007244>.
229. *Williams J., Wolfram U., Ozel A.* Neural stochastic differential equations for particle dispersion in large-eddy simulations of homogeneous isotropic turbulence // *Physics of Fluids*. — 2022. — Vol. 34, no. 11. — P. 113315. — DOI: [10.1063/5.0121344](https://doi.org/10.1063/5.0121344).
230. *Willis D. M., Coffey H. E., Henwood R., Erwin E. H., Hoyt D. V., Wild M. N., Denig W. F.* The Greenwich Photo-heliographic Results (1874 - 1976): Summary of the Observations, Applications, Datasets, Definitions and Errors // *Solar Phys.* — 2013. — Vol. 288, no. 1. — P. 117–139. — DOI: [10.1007/s11207-013-0311-y](https://doi.org/10.1007/s11207-013-0311-y).
231. *Wolf R.* Astronomische Mittheilungen LXX // *Astronomische Mittheilungen der Eidgenössischen Sternwarte Zurich*. — 1887. — Vol. 7. — P. 369–410.
232. *Wolf R.* Astronomische Mittheilungen LIII // *Astronomische Mittheilungen der Eidgenössischen Sternwarte Zurich*. — 1881. — Vol. 6. — P. 69–96.
233. *Woolley Richard S.* Bradley, James; Third Astronomer Royal. // *QJRAS*. — 1963. — Vol. 4. — P. 47.
234. *Zel'dovich Y. B.* The magnetic field in the two-dimensional motion of a conducting turbulent liquid // *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics*. — 1957. — Vol. 4, no. 3. — P. 460–462.
235. *Zel'dovich Y. B., Ruzmaikin A. A., Sokoloff D. D.* Magnetic fields in astrophysics. Vol. 3. — New York : Gordon, Breach, 1983. — (The fluid mechanics of astrophysics and geophysics). — ISBN 0677063806.

236. *Zel'dovich Y. B., Ruzmaikin A. A., Molchanov S. A., Sokolov D. D.* Kinematic dynamo problem in a linear velocity field // Journal of Fluid Mechanics. — 1984. — Vol. 144. — P. 1–11. — DOI: [10.1017/S0022112084001488](https://doi.org/10.1017/S0022112084001488).
237. *Андреева О. А., Илларионов Е. А.* Вариации некоторых индексов солнечной активности и магнитные поля корональных дыр 25-го цикла // Геомагнетизм и аэрономия. — Москва, 2025. — Т. 65, № 5. — С. 590–598. — ISSN 0016-7940. — DOI: [10.7868/S3034502225050035](https://doi.org/10.7868/S3034502225050035).
238. *Грачев Д. А.* О соотношении между аналитическим и численным подходами к исследованию стохастических дифференциальных уравнений // Вычислительные методы и программирование. — Москва, 2008. — Т. 9, № 2. — С. 85–90. — ISSN 1726-3522.
239. *Зельдович Я. Б.* Наблюдения во Вселенной, однородной в среднем // Астрономический журнал. — 1964. — Т. 41. — С. 19–24.
240. *Илларионов Е. А.* Методы машинного обучения в физике Солнца // Усп. физ. наук. — 2025. — Т. 195, № 4. — С. 395–415. — DOI: [10.3367/UFNr.2025.02.039872](https://doi.org/10.3367/UFNr.2025.02.039872). — URL: <https://ufn.ru/ru/articles/2025/4/e/>.
241. *Илларионов Е. А., Тлатов А. Г.* Создание атласа солнечной активности // Изв. Крымской астрофизической обсерватории. — 2018. — Т. 114, № 1. — С. 118–122.
242. *Илларионов Е.* Стационарное распределение для уравнения Якоби с большим случайным параметром кривизны // Вычислительные методы и программирование. — 2013. — Т. 14. — URL: <https://num-meth.ru/index.php/journal/article/view/580>.
243. *Илларионов Е., Соколов Д., Тутубалин В.* Стационарное распределение произведения матриц со случайными коэффициентами // Вычислительные методы и программирование. — 2012. — Т. 13, № 1. — URL: <https://num-meth.ru/index.php/journal/article/view/513>.

244. *Казанцев А. П.* Об усилении магнитного поля проводящей жидкостью // ЖЭТФ. — 1967. — Т. 53, вып. 5. — С. 1806—1813.
245. *Ламбурт В., Соколов Д., Тутубалин В.* Поля Якоби вдоль геодезической со случайной кривизной // Математические заметки. — 2003. — Т. 74, № 3. — С. 416—424. — DOI: doi.org/10.4213/mzm275.
246. *Михайлов Е., Соколов Д., Тутубалин В.* Фундаментальная матрица для уравнения Якоби со случайными коэффициентами // Вычислительные методы и программирование. — 2010. — Т. 11. — URL: <https://num-meth.ru/index.php/journal/article/view/398>.
247. *Молчанов С. А., Рузмайкин А. А., Соколов Д. Д.* Кинематическое динамо в случайном потоке // Усп. физ. наук. — 1985. — Т. 145, № 4. — С. 593—628. — DOI: [10.3367/UFNr.0145.198504b.0593](https://doi.org/10.3367/UFNr.0145.198504b.0593). — URL: <https://ufn.ru/ru/articles/1985/4/b/>.
248. *Монин А. С., Яглом А. М.* Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности : в 2 т. — Москва : Наука, 1965—1967.
249. *Очир-Горяева А. П., Соколов Д. Д., Илларионов Е. А.* Эффекты длинной памяти при развитии неустойчивости в случайной среде // Журнал экспериментальной и теоретической физики. — 2024. — Т. 166, № 6. — С. 878—887. — ISSN 0044-4510. — DOI: [10.31857/S0044451024120113](https://doi.org/10.31857/S0044451024120113).
250. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. — Москва : Наука, 1983.
251. *Серенкова А. Ю., Соколов Д. Д., Юшков Е. В.* Нелинейный параметрический резонанс в простейшей модели солнечного динамо // Журнал экспериментальной и теоретической физики. — 2023. — Т. 163, № 4. — С. 514—523. — ISSN 0044-4510. — URL: <https://journals.rcsi.science/0044-4510/article/view/145389>.

252. *Тлатов А. Г., Илларионов Е. А., Березин И. А., Шрамко А. Д.* Прогнозирование солнечных вспышек и фоновых потоков рентгеновского излучения по данным синоптических наземных наблюдений с помощью методов машинного обучения // *Космические исследования*. — Москва, 2020. — Т. 58, № 6. — ISSN 0023-4206. — DOI: [10.31857/S0023420620060102](https://doi.org/10.31857/S0023420620060102).