

ЛОКАЛИЗОВАННЫЙ СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ В ГЕОФИЗИКЕ

Н.М. Астафьева, М.Д. Раев, Н.Ю. Комарова

*Институт космических исследований РАН,
117997 Москва, Профсоюзная 84/32
E-mails: ast@iki.rssi.ru, mraev@asp.iki.rssi.ru*

Геофизические процессы протекают в открытой системе взаимосвязанных геосфер планеты, формируясь в результате взаимодействия природных процессов энергообмена и массопереноса в широком диапазоне интенсивностей и с разными пространственными и временными масштабами. Сложность процессов отражается в структуре данных наблюдений — и в данных долговременных наблюдений за изменчивостью гидрометеорологических параметров, и в структуре спутниковой информации. Традиционные методы классического спектрального анализа, основанного на математическом аппарате преобразования Фурье, зачастую оказываются недостаточными для изучения сложной внутренней структуры (нелинейной, неоднородной и мультимасштабной) природных процессов. Для адекватного выявления локализованных спектральных характеристик процессов, их иерархической структуры, глобальной и локальной автономности успешно используются методы локализованного спектрального анализа, основанного, на математическом аппарате вейвлет-преобразования. Вейвлет-преобразование состоит в разложении множества по иерархическому базису, сконструированному из хорошо локализованной солитоноподобной функции посредством масштабных преобразований и переносов. Базис преобразования обладает свойством самоподобия; автономность анализируемого множества проявляется соответствующими соотношениями для коэффициентов преобразования; каждая из функций базиса характеризует частоту и ее локализацию во времени. В отличие от преобразования Фурье, вейвлет-преобразование проецирует одномерную реализацию на полуплоскость время-частота, что позволяет с одинаково хорошей точностью выделять составляющие разных масштабов и получать локализованные во времени спектральные характеристики (time-scale spectrum в отличие от single spectrum Фурье). Возможности предлагаемых методик локализованного спектрального анализа, построенных, в основном, на базе вейвлет-преобразования с привлечением понятий теории нелинейных динамических систем, показаны на примерах изучения структуры наиболее влиятельных термодинамических процессов системы океан – атмосфера, принимающих участие в формировании климата.

Понятие «климат» в последнее время стало несколько даже слишком широко употребительным: мы привычно говорим не только о климате планеты — долговременном состоянии природных условий, но о климате в коллективе или международных отношениях, помещении или регионе. А XXII столетия назад древний грек из Никеи по имени Гиппарх (190–120 гг., II век до н. э.) использовал термин климат в его изначальном смысле (наклон) для обозначения природных условий на планете. Он описал пять зон, природные условия в которых определяются лишь наклоном солнечных лучей к поверхности Земли. Гиппарх был гениальным астрономом. Он разработал теорию и составил таблицы движения Солнца и Луны, солнечных затмений (в геоцентрической системе, поскольку гипотезу гелиоцентризма отвергал как недостаточно обоснованную — простительная ошибка для ученого II века до н. э.), и довольно точно оценил расстояние от Земли до Луны. Он составил каталог положений 850 звезд, ввел их разделение по блеску на 6 величин, открыл явление прецессии, определил наклон экватора к плоскости эклиптики с ошибкой всего в 5'. Гиппарх ввел географические координаты — широту и долготу. И он же выделил основной фактор, определяющий характер природных условий — наклон солнечных лучей к поверхности Земли. Сейчас климатических зон больше и они подробно структурированы, однако, в первом приближении — это все та же картина климатических зон Гиппарха.

Почти через 20 столетий признано, что на климат оказывают влияние Мировой океан и свойства подстилающей поверхности (суши) — впервые это опубликовано в труде Гумбольдта (1769–1859) «Космос». Примерно тогда же основан журнал *Meteorological Magazine* (1866). Во второй половине XVIII века возрос интерес к климатическим проблемам, вернее даже к проблемам погоды. К тому же появился и начал широко использоваться телеграф. Созвано совещание в Лейпциге (1872) об унификации метеонаблюдений и обмене сводками по телеграфу, основными метеоэлементами признаны T , p , V , осадки — у поверхности. Учреждена международная метеорологическая организация и несколько благополучно здравствующих научных журналов: *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* (1873) в Лондоне, *Monthly Weather Review* (1873) в Вашингтоне и *Метеорологический вестник* (1891) в России (*Метеорология и гидрология* с 1935 г.).

На конгрессе в Варшаве (1935) утвержден реперный ряд и все сопоставления изменений климата рекомендовалось делать, опираясь на данные наблюдений за 30 лет (1901–1930). Тридцатилетняя база продолжает быть опорой многих климатологов до сих пор (1931–1960, затем 1961–1990), хотя давно уже

понятно, что климатическим изменениям свойственны более долговременные, скорее 65–70-летние колебания [1–3].

Осознана роль Мирового океана в формировании климата, организованы научные экспедиции и комитеты по исследованию Мирового океана, Арктики и Антарктики. Появились корабли погоды, буйковые станции, множество метеостанций, данные наблюдений активно накапливались и изучались. Все это принесло свои плоды и на совещании в Стокгольме (1974) выработаны определения погоды и климата. *Погода* — мгновенное состояние атмосферы. *Климат* — статистический ансамбль состояний, проходимых системой А-О-С (атмосфера – океан – суша) за периоды времени, сравнимые с периодом жизни человека.

В последней четверти прошлого века неизмеримо выросли возможности приборов и средств наблюдения; появились метеорологические спутники; мощная вычислительная техника предоставила возможности для моделирования и анализа данных наблюдений. Основным результатом исследований за последние годы является тот факт, что климат формируется в *открытой системе взаимосвязанных геосфер планеты*. К началу нашего века мы подошли с осознанием почти неохватной широты проблемы. Климатическая система Земли формируется при активном участии всех геосфер планеты: атмосфера, океаносфера, криосфера, поверхность континентов (их гидросфера и биосфера), литосфера и антропосфера. Система открытая, на формирование процессов на Земле влияют внешние силы: радиационные, приливные, гравитационные, электромагнитные и другие воздействия окружающего нас пространства — солнечной системы со всеми планетами, особенно большими, Солнцем и межпланетной плазмой.

Изучение природных процессов представляет собой сложную проблему. Термодинамические процессы в системе океан – атмосфера, обмен завихренностью, угловым моментом, массой и теплом осуществляется на фоне и под управлением внутренних и внешних энергетических источников и большого числа процессов, в разных геосферах планеты. Энергетические потоки и массоперенос, происходящие в широком спектре интенсивностей и пространственных и временных масштабов, связывают между собой функционирующие структуры всех геосфер планеты. Эти связи, а в результате и сами геофизические процессы оказываются сложными, нелинейными и многопараметрическими.

При исследованиях климатической изменчивости важно найти объекты наблюдений, параметры, которые были бы *индикаторами климатических изменений*, удовлетворяющими некоторым обязательным требованиям: их удобно измерять, есть данные за прошлые годы, они достаточно чувствительны и, в то же время, отражают крупномасштабные изменения. Параметров, полностью удовлетворяющих перечисленным требованиям, пока нет. Наиболее подходящими индикаторами признаны температура (приземная и поверхности океана), уровень моря и распространение морского льда.

Одним из важных факторов изменчивости климата являются крупномасштабные термодинамические взаимодействия в системе океан – атмосфера, эволюционирующие в широком диапазоне временных и пространственных масштабов. Природные процессы, оказывающие существенное воздействие на транспортные и диссипативные свойства атмосферы и влияющие на формирование климата, имеют большую пространственную протяженность, достаточно длительны и характеризуются сложной пространственно-временной структурой. Для выявления общих закономерностей таких процессов и понимания физических механизмов, ими управляющих, необходим, в частности, анализ данных наблюдений, представляющих их энергетику и динамику.

Данные наблюдений обычно усваиваются в виде локальных (точечных) измерений и гораздо реже — в виде полей пространственных и временных измерений, поскольку это сопряжено с техническими трудностями. Обеспечить глобальные наблюдения климатических параметров в виде полей с необходимыми пространственным разрешением, протяженностью и временной регулярностью могут установленные на искусственных спутниках Земли приборы. Глубокое изучение таких полей может привести к новым результатам в исследовании влиятельных природных процессов и к существенному вкладу в решение проблемы изменчивости климата.

Радиометрические спутниковые данные используются для восстановления известных климатических характеристик на основе полуэмпирических формул, а также непосредственно в качестве прямых характеристик теплового и динамического взаимодействия океана и атмосферы. Путь прямого использования спутниковых данных представляется перспективным. Его действенность, подтверждается не только на масштабах среднемесячных изменений, но и на синоптических масштабах в ситуациях, когда формализация процессов затруднительна вследствие их высокой динамичности, из-за резких градиентов, формирующихся в полях пространственно-временного изменения параметров (фронтальные зоны и вихревые структуры разных масштабов).

Сложность природных процессов отражается в структуре данных наблюдений. Традиционно используемые методы классического спектрального анализа, основанного на математическом аппарате преобразования Фурье, зачастую оказываются недостаточными для изучения изменчивости природных процессов и их сложной внутренней структуры (нелинейной, неоднородной и мультимасштабной). Выявить

локализованные спектральные характеристики атмосферных процессов, иерархическую структуру, глобальную и локальную автомодельность можно используя методы локализованного спектрального анализа, основанного на математическом аппарате вейвлет-преобразования. Ниже коротко представлены некоторые возможности метода.

Вейвлет-преобразование — основа локализованного спектрального анализа

Термин вейвлет (wavelet — маленькая волна) появился сравнительно недавно — в середине 80-х гг. прошлого века. Семейство анализаторов, названных вейвлетами, широко применяется в задачах распознавания образов; при синтезе сигналов и анализе изображений различной природы; для изучения свойств турбулентных полей и свертки информации, а также для прямого численного моделирования — как иерархический базис, хорошо приспособленный для описания динамики сложных нелинейных процессов, характеризующихся взаимодействиями в широких диапазонах масштабов.

Вейвлет-преобразование [2, 4, 5] состоит в разложении множества по иерархическому по базису, сконструированному из обладающей определенными свойствами хорошо локализованной солитоноподобной функции посредством масштабных преобразований и переносов; каждая из функций базиса характеризуется как частоту, так и ее локализацию во времени. В результате преобразования Фурье, одномерная реализация во временном пространстве преобразуется в одномерную же в пространстве частот. Вейвлет-преобразование обеспечивает двумерную развертку одномерной реализации, при этом частота и время рассматриваются как независимые переменные, что дает возможность анализировать множество одновременно в физическом и в спектральном пространстве. Это важное качество позволяет назвать анализ, базирующийся на математическом аппарате вейвлет-преобразования, *локализованным спектральным анализом* в отличие от спектрального анализа, базирующегося на математическом аппарате преобразования Фурье. В литературе уже принято спектр Фурье называть single spectrum, в отличие от time-scale spectrum, или wavelet spectrum, полученного на основе вейвлет-преобразования.

От преобразования Фурье к вейвлет-преобразованию

Для большей наглядности и простоты необходимые сведения о преобразовании (правая колонка) вводятся с привлечением аналогии с преобразованием Фурье (левая колонка), значимость и привлекательность которого неоспоримы и проверены временем.

Рассмотрим два функциональных пространства:

$L^2(0, 2\pi)$ — пространство квадратично-интегрируемых 2π -периодических функций $f(t)$ с конечной нормой; кусочно-непрерывную функцию $f(t)$ можно периодически расширить и определить на всей действительной оси $R(-\infty, \infty)$ так, что $f(t) = f(t - 2\pi)$, ($t \in R$).

$L^2(R)$ — пространство квадратично-интегрируемых функций $f(t)$, определенных на всей действительной оси $R(-\infty, \infty)$ и обладающих конечной нормой (энергией).

Пространства $L^2(0, 2\pi)$ и $L^2(R)$ существенно различны, в частности, локальное среднее $f(t)$ из $L^2(R)$ должно стремиться к нулю на $\pm \infty$ и, следовательно, синусоидальная волна не может быть элементом базиса пространства $L^2(R)$. Рассмотрим в качестве базисных функций пространства $L^2(R)$ хорошо локализованные солитоноподобные затухающие на $\pm \infty$ «маленькие волны» — вейвлеты $\psi(t)$, предусмотрев систему их сдвигов (переносов) вдоль оси и аналог синусоидальной частоты.

Базис $L^2(0, 2\pi)$ строится с помощью масштабного преобразования единственной функции, синусоидальной волны $w(t) = \exp(int)$, таким образом, что $w_n(t) = w(nt)$.

Базис $L^2(R)$ строится с помощью масштабного преобразования (коэффициент a) и сдвигов (b) единственной функции $\psi(t)$ так, что

$$\psi_{ab} = |a|^{-1/2} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad a, b \in R, \quad \psi \in L^2(R).$$

Любая $f(t)$ из $L^2(0, 2\pi)$ может быть представлена в виде $f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n \exp(int)$ с коэффициентами

Любая $f(t)$ из $L^2(R)$ может быть представлена в виде

$$c_n = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} f(t) \exp(-int) dt.$$

Итак, каждая $f(t)$ из $L^2(0, 2\pi)$ может быть получена суперпозицией масштабных преобразований базисной функции $w(t)$, т. е. является композицией синусоидальных волн с различными частотами (с коэффициентами, зависящими от номера гармоники).

$$f(t) = C_{\psi}^{-1} \iint [W_{\psi} f](a, b) \psi_{ab}(t) \frac{da db}{a^2}$$

с коэффициентами $[W_{\psi} f](a, b) = |a|^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi_{ab}^*(t) dt$.

Аналогично, каждая $f(t)$ из $L^2(R)$ может быть получена суперпозицией масштабных преобразований и сдвигов базисного вейвлета $\psi(t)$, т. е. является композицией «вейвлетных волн» с коэффициентами, зависящими от номера волны (частоты или масштаба a) и от параметра сдвига b (времени).

Частотно-временная локализация вейвлет-преобразования

Иногда интерпретация спектров Фурье бывает затруднительна; для получения спектральной информации на некой частоте, необходимо иметь и прошлую и будущую временную информацию; к тому частота может эволюционировать со временем. Преобразование Фурье не отличает сигнал, представляющий собой сумму двух гармоник с разными частотами, от сигнала, состоящего из тех же, но последовательно включающихся гармоник. Частота сигнала обратно пропорциональна его продолжительности, поэтому важно извлекать высокочастотную информацию из относительно малых временных интервалов, а низкочастотную спектральную информацию — из относительно широких. Часть описанных трудностей снимается оконным преобразованием Фурье. Однако, бесконечно осциллирующая базисная функция (синусоидальная волна) не позволяет получать по настоящему локализованную информацию. Элементом базиса вейвлет-преобразования является хорошо локализованная функция с подвижным частотно-временным окном — узким на малых масштабах и широким на больших. На рис. 1 показана также локализация в частотно-временном пространстве преобразований с другими анализирующими функциями.

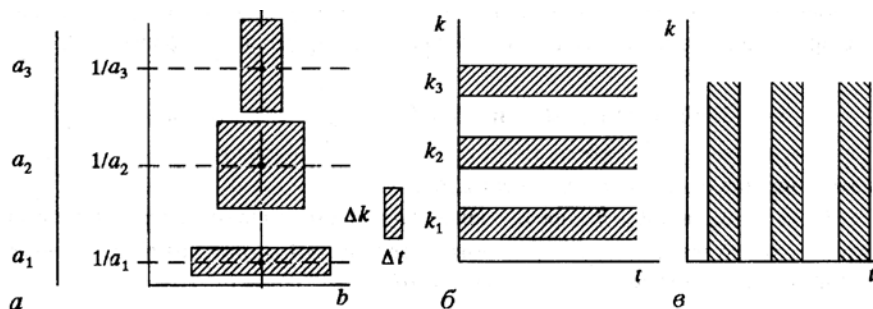


Рис. 1. Частотно-временная локализация преобразований с разными анализаторами:
 а — вейвлеты;
 б — гармоники Фурье;
 в — функции Шеннона

Преобразование Фурье хорошо локализует частоту, но без временного разрешения; преобразование Шеннона не обладает частотной локализацией; вейвлет-преобразование имеет подвижное окно, локализованное около выбранного момента времени и расширяющееся с ростом масштаба, что и является наиболее желательным при получении спектральной информации. Базисными функциями перечисленных преобразований являются локализующая только частоту синусоидальная волна, локализующая только момент времени функция Дирака и достаточно хорошо локализующей и масштаб, и момент времени солитоноподобный вейвлет, соответственно. Базисные функции оконного преобразования Фурье имеют одно и то же разрешение по времени и частоте для всех точек плоскости преобразования, в то время как базисные функции вейвлет-преобразования имеют уменьшающееся с масштабом разрешение по времени и увеличивающееся с масштабом разрешение по частоте. Это свойство дает преимущество, так как быстрые вариации сигналов хорошо локализованы, а для выявления медленно меняющихся характеристик достаточно хорошего низкочастотного разрешения. Вейвлет-преобразование, обладающее подвижным частотно-временным окном, одинаково хорошо выявляет и низкочастотные, и высокочастотные характеристики сигналов.

Выбор базисной функции вейвлет-преобразования

В литературе мы не встретили общепринятого удачного определения вейвлета. Для практического применения важно знать признаки, которыми обязательно должна обладать функция, чтобы быть вейвлетом. Эти признаки следующие.

Ограниченность и хорошая локализация: вейвлет должен быть локализован и в физическом, и в спектральном пространстве. Например, δ -функция и синусоида не удовлетворяют необходимому условию одновременной локализации во временном пространстве и в пространстве частот.

Нулевое среднее: часто для приложений необходимо, чтобы не только нулевой, но и все первые m моментов, были равны нулю. Обладающие большим числом нулевых моментов вейвлеты позволяют, игнорируя наиболее регулярные составляющие, анализировать мелкомасштабные флуктуации и особенности высокого порядка.

Характерным признаком преобразования является автомодельность базиса: все вейвлеты семейства $\psi_{ab}(t)$ имеют то же число осцилляций, что и базисный вейвлет, поскольку получены из него посредством масштабных преобразований и переносов.

Вейвлет-преобразование есть скалярное произведение анализирующего вейвлета и анализируемого сигнала, поэтому коэффициенты (амплитуды) преобразования $W(a, b)$ содержат комбинированную информацию о вейвлете и сигнале (как и коэффициенты преобразования Фурье, содержащие информацию о сигнале и о синусоидальной волне). Выбор вейвлета определяется тем, какую информацию необходимо извлечь из сигнала. Каждый вейвлет имеет характерные особенности во временном и в частотном пространстве, поэтому с помощью разных вейвлетов можно полнее выявить те или иные свойства анализируемого сигнала. На рис. 2 показаны функции, часто применяемые в качестве базисных для вейвлет-преобразования и их образы Фурье.

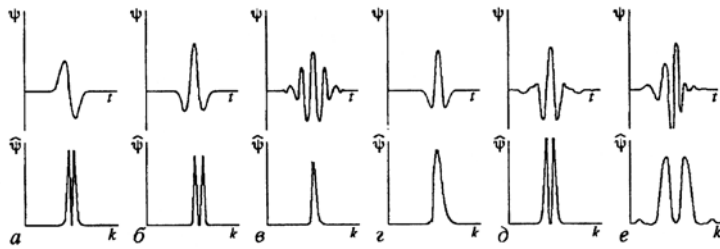


Рис. 2. Наиболее популярные вейвлеты: a — WAVE, b — MНAT, v — Morlet, z — Paul, d — LMB, e — Dobechieis (и их образы Фурье, показанные в нижней части рисунка)

Вещественные базисы часто конструируются на основе производных функции Гаусса. Высокие производные имеют больше нулевых моментов и позволяют извлечь информацию об особенностях высокого порядка. Вейвлеты, сконструированные на основе первой и второй производных показаны на рис. 2а и 2б. Из-за их формы первый называют wave-вейвлет, второй — Mexican hat. Вейвлет Mexican hat, имеющий узкий энергетический спектр и два равных нулю момента, хорошо приспособлен для анализа сложных сигналов. Обобщенный на двумерный случай, он часто используется для анализа изотропных полей. Если же производная берется лишь в одном направлении, получается анизотропный базис с хорошей угловой избирательностью. Для построения такого базиса к масштабным преобразованиям и сдвигам базисного вейвлета необходимо добавить его вращение. Вейвлет-преобразование называют математическим микроскопом, в котором параметр сдвига b фиксирует точку фокусировки микроскопа, масштабный коэффициент a — увеличение, а выбором базисной формы вейвлета ψ определяются оптические качества микроскопа. Если продолжить аналогию с математическим микроскопом, то в случае анизотропного базиса математический микроскоп приобретает еще и качества поляризатора с углом поляризации, пропорциональным углу поворота вейвлета.

Примеры комплексных вейвлетов (действительные составляющие) приведены на рис. 2в и 2г: часто используется хорошо локализованный в обоих пространствах вейвлет Морле, в квантовой механике применяется вейвлет Пауля. Представленные вейвлеты прогрессивные — имеют нулевые коэффициенты Фурье при отрицательных значениях волновых чисел и хорошо приспособлены для анализа сигналов, для которых важен принцип причинности, т.к. сохраняют направление времени и не создают паразитической интерференции между прошлым и будущим. Отметим, что при анализе комплексного одномерного сигнала или использовании комплексного анализирующего вейвлета в результате получаются двумерные массивы значений модуля коэффициентов и фазы:

$$W(a, b) = |W(a, b)| \exp[i\Phi(a, b)].$$

На рис. 2д и 2е приведены примеры вейвлетов, которые часто служат основой для построения ортогональных дискретных базисов с помощью процедуры Малла.

Строгие доказательства полноты и ортогональности базисов, строящихся на основании вейвлетов сложны и громоздки, примеры этого можно видеть в монографиях и сборниках (см., например, [4]), где разрабатывается теория преобразования. Для практических целей часто достаточно бывает устойчивости и «приблизительной» ортогональности системы функций разложения, т. е. достаточно, чтобы она была «почти базисом». Как правило, для анализа сигналов используются такие «почти базисные» вейвлеты.

Примеры применения вейвлет-преобразования к модельным сигналам

Ниже показаны примеры применения вейвлет-преобразования к некоторым характерным сигналам, построенным на основе функций с хорошо известными свойствами. Приведены графики анализируемого

ряда, картина коэффициентов преобразования и скелетон (линии локальных экстремумов). Коэффициенты показаны в виде проекций на плоскость $(a, b) = (\text{временной масштаб, время})$; светлые области соответствуют положительным, темные — отрицательным значениям коэффициентов. Линии локальных экстремумов соответствуют экстремумам анализируемой функции — точкам смены знака ее производной.

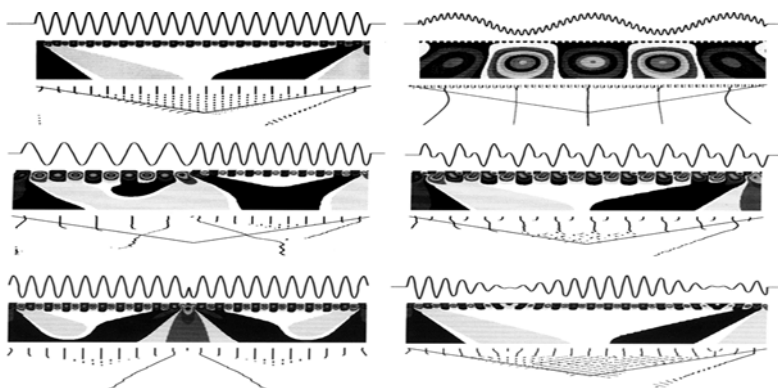


Рис. 3. Примеры применения вейвлет-преобразования. Для каждого примера (сверху вниз): $f(t)$, $W(a, b)$, скелетон. По оси абсцисс — время t (или параметр сдвига b), по оси ординат — частота ω (или масштабный коэффициент a)

Во втором ряду показан характерный пример — сигналы составлены из двух одинаковых синусоид включенных последовательно (слева) и просуммированных (справа); для преобразования Фурье эти сигналы неразличимы, для вейвлет-преобразования они очень разные. Сигнал в третьем ряду слева отличается от сигнала в первом ряду справа фазовым сдвигом на π в середине ряда. Его спектр Фурье характеризуется наличием дополнительных пиков: любая особенность сигнала оказывает влияние на все коэффициенты преобразования Фурье. Присутствие особенностей такого рода в сигнале с учетом прямой связи между частотами в спектре и характерными масштабами процесса может исказить интерпретацию результата, т.к. наличие дополнительных пиков в спектре связывается с наличием масштабов, которых в приведенном примере на самом деле нет. Вейвлет-преобразование прекрасно справляется с такого рода особенностью, локализуя ее.

Вейвлет-преобразование, с его иерархическим базисом, хорошо приспособлено для анализа каскадных процессов, фрактальных и мультифрактальных множеств, имеющих иерархическую структуру. Пример анализа фрактального множества, построенного на основе однородного триадного канторовского ряда приведен в верхней части рис. 4.

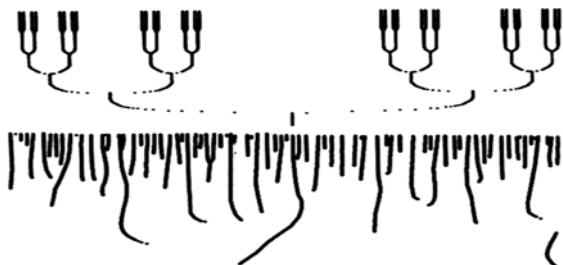


Рис. 4. Линии локальных максимумов вейвлет-преобразования однородного триадного канторовского ряда (вверху) и случайного процесса (внизу) в логарифмическом масштабе

Скелетон выявляет и иерархическую структуру множества, и способ построения фрактальной меры, на которой оно сформировано. Каждый этап каскадного процесса, каждое дробление масштаба отмечено на картине локальных максимумов ветвлением, появлением характерной бифуркационной вилочки. Это неизменно повторяется с ростом масштаба, так как мера обладает свойством самоподобия и монофрактальна. Для сравнения на рис. 4 представлены линии локальных максимумов преобразования случайного процесса. Видно, насколько качественно отличается «древовидная» структура скелетона каскадного процесса от «травовидного» скелетона случайного. На рис. 5 на цветной вкладке представлены два сигнала совершенно различной природы и картины коэффициентов их преобразования, демонстрирующие возможности этого математического аппарата выявлять структуру анализируемого множества.

Свойства вейвлет-преобразования

Коэффициенты преобразования содержат комбинированную информацию об анализируемом вейвлете и анализируемом сигнале. Несмотря на это, вейвлет-анализ позволяет получить и объективную информацию об анализируемом сигнале, поскольку некоторые свойства преобразования не зависят от выбора анализирующего вейвлета. Независимость от анализатора делает эти простые свойства преобразования очень важными. Выпишем основные свойства преобразования.

Линейность. Отсюда, в частности, следует, что преобразование векторной функции есть вектор с компонентами, представляющими собой преобразование каждой из компонент анализируемого вектора по отдельности.

Инвариантность относительно сдвига. Отсюда следует коммутативность дифференцирования. Вместе с первым свойством это означает перестановочность и для производных векторного анализа.

Инвариантность относительно растяжения (сжатия). Это свойство позволяет, в частности, определять наличие и характер особенностей анализируемой функции.

Кроме этих трех не зависящих от выбора анализирующего вейвлета элементарных свойств преобразование обладает еще несколькими.

Частотно-временная локализация, наличие подвижного частотно-временного окна.

Дифференцирование. Чтобы проигнорировать, например, крупномасштабные полиномиальные составляющие и проанализировать особенности высокого порядка или мелкомасштабные вариации, безразлично дифференцировать ли нужное число раз анализирующий вейвлет или саму функцию. Очень полезное свойство, если учесть, что часто функция представляет собой ряд чисел, а анализирующий вейвлет задан формулой.

Существует *аналог равенства Парсеваля*, следовательно, энергия (мощность) сигнала может быть вычислена через амплитуды вейвлет-преобразования подобно тому, как она вычисляется через амплитуды преобразования Фурье.

Отметим, что:

- свойства одномерного преобразования обобщаются на многомерный случай;
- дискретное преобразование приспособлено для быстрого численного алгоритма, использующего широко применяемую процедуру быстрого преобразования Фурье (FFT);
- непрерывное преобразование выполняется, как правило, прямым численным интегрированием. Самая простая и быстрая проверка численного алгоритма заключается в вычислении коэффициентов преобразования функции Дирака (на каждом масштабе должен быть получен анализирующий вейвлет) или функции Гаусса (результат легко получить аналитически). Проверить достаточную плотность дискретизации по масштабу можно, вычислив коэффициенты преобразования анализирующего вейвлета и убедившись в отсутствии паразитных краевых деталей.

Некоторые возможности вейвлет-анализа

Имея вейвлет-спектры, можно вычислить полезные характеристики изучаемого процесса и проанализировать многие его свойства, например, особенности сигнала и его энергетические характеристики.

Анализ локальной регулярности. Рассмотрим некоторые следствия свойства масштабной инвариантности. Вейвлет-преобразование так устроено, что $W(a, t)$ — регулярная функция даже при нерегулярной $f(t)$. Вся информация о возможной особенности заключена в асимптотическом поведении коэффициентов преобразования. Если коэффициенты на малых масштабах расходятся, то f имеет особенность и показатель сингулярности α определяется наклоном $\log |W(a, t_0)|$ к $\log a$. Если они, напротив, близки к нулю в окрестности t_0 на малых масштабах, то f в этой точке регулярна.

Типичным свойством фрактальных множеств является их асимптотическое самоподобие. Базис преобразования автомоделен; легко показать, что коэффициенты преобразования масштабируются с тем же показателем, что и анализируемая функция: $W(\lambda a, t_0 + \lambda b) \cong \lambda^{\alpha(t_0)} W(a, t_0)$. Отсюда определяется скейлинговый показатель $\alpha(t_0)$, тесно связанный с фрактальной размерностью. Спектр размерностей (фрактальная, информационная или n -точечные корреляционные) определяется также по значениям функции распределения локальных максимумов коэффициентов преобразования. Важно, что анализ локальной регулярности универсален — он не зависит от вида анализирующего вейвлета.

Энергетические характеристики. Из существования для преобразования аналога равенства Парсеваля следует, что в пространстве действительных функций полная энергия (мощность) сигнала f может быть записана через амплитуды преобразования

$$E_f = \int f^2(t) dt = C_{\Psi}^{-1} \iint W^2(a, b) \frac{da db}{a^2}.$$

Плотность мощности $E_w(a, b) = W^2(a, b)$ характеризует энергетические уровни сигнала в пространстве $(a, b) = (\text{масштаб}, \text{время})$. Полная энергия распределена по масштабам в соответствии с глобальным спектром энергии

$$E_W(a) = \int W^2(a, b) db = \int E_W(a, b) db.$$

Его называют также скалограммой (scalogram) или дисперсией преобразования (wavelet variance). Максимумы энергетического спектра определяют масштабы процесса, вносящие основной вклад в полную мощность.

Корреляционные функции. Если коэффициент корреляции ρ близок к единице, можно говорить о наличии связей между процессами; при $\rho = 1$ процессы полностью коррелированы; если же ρ мало, то процессы не коррелируют. Однако независимость отсюда не следует: независимость процессов приводит к $\rho = 0$, но обратное утверждение неверно. Связи между процессами в разных диапазонах времени могут различаться, например, положительная корреляция в одном интервале может компенсироваться отрицательной в другом. При близких к единице значениях ρ также остается неопределенность: процессы коррелированы, но в каких временных диапазонах — неясно. Вейвлет-преобразование разлагает одномерный сигнал на составляющие его компоненты разного масштаба. Найдя корреляции между этими компонентами можно получить распределение корреляционной функции одновременно и по временному сдвигу, и по временному масштабу

$$C_{xy}^W(a, \tau) = \frac{1}{T} \int W_x(a, t) W_y(a, t - \tau) dt.$$

Распределенная по масштабам функция корреляции позволяет более детально изучить структуру сложных мультимасштабных процессов.

Функции когерентности и перемежаемости. Плотность распределения энергии $W_x^2(a, b)$ в пространстве (a, b) позволяет анализировать обмен энергией между составляющими процесс компонентами разного масштаба в любой заданный момент времени. Можно найти локальные отклонения от среднего поля на каждом масштабе, т. е. определить меру локальной перемежаемости процесса

$$I_x^W(a, b) = W_x^2(a, b) / \langle W_x^2(a, b) \rangle_b,$$

вычислить функции перемежаемости и когерентности. Отметим, что перемежаемость и когерентность являются характеристиками турбулентных явлений. Таким образом, появляется возможность диагностики нелинейных свойств процессов локально: в отличие, например, от корреляционных функций, которые позволяют находить линейные связи между процессами, функции перемежаемости, когерентности и распределенная корреляционная функция позволяют говорить о возможности нелинейных связей.

Анализ климатических характеристик с использованием математического аппарата вейвлет-преобразования

Одним из важных факторов изменчивости климата являются крупномасштабные термодинамические взаимодействия в системе океан – атмосфера, эволюционирующие в широком диапазоне временных и пространственных масштабов. Например, термодинамический процесс глобального масштаба Южное Колебание – Эль-Ниньо (ЮКЭН).

Южное Колебание — крупномасштабный атмосферный процесс, развивающийся над акваторией Тихого океана, и тесно связанный с явлением Эль-Ниньо — резким потеплением океанических вод вблизи тихоокеанского побережья Центральной Америки. Термин Южное Колебание ввел в 1920–х гг. известный английский ученый Gilbert Walker для обозначения аномалий приземного атмосферного давления вдоль тропической зоны. Аномалия Южного Колебания — это одновременное колебание давления, температуры и осадков над восточными и западными частями Тихого океана; основным ее проявлением считается изменение разности давления между Южно-тихоокеанским антициклоном и областью низкого давления, простирающейся над Индонезией и Северной Австралией. Чередование знаков аномалий напоминает гигантские качели, перекачивающие массы воздуха между восточным и западным полушариями. Вблизи центров действия Южного Колебания противоположного знака находятся станции на острове Таити (17° ю.ш., 150° з.д.) и в городе Дарвин (12° ю.ш., 150° в.д.) в Австралии.

О существовании Эль-Ниньо известно с 1726 г.; это явление происходит в среднем раз в 4 – 4,5 года (с диапазоном от 2 до 10 лет), охватывает весь тропический Тихий океан и оказывает воздействие на океанические и атмосферные условия на всей планете. Во временной изменчивости и в интенсивности Эль-Ниньо существует значительная нерегулярность: иногда потепление приобретает долговременный и крупномасштабный характер, в результате случаются катастрофические природные явления, типа засух, наводнений, тайфунов, наносящие значительный экономический ущерб. Из-за изменения расположения областей активной конвекции в обычно умеренно влажных районах наступают периоды засухи; в районах с обычно сухим климатом начинают лить проливные дожди; население прибрежных стран страдает от наводнений и

шквалов; из-за прекращения прибрежного апвеллинга мигрирует или гибнет рыба, птицы, животные. Аномальный нагрев вод экваториальной зоны в период Эль-Ниньо обостряет контраст температуры между экватором и полюсами, что приводит к увеличению интенсивности зональной циркуляции; наблюдается смещение путей распространения тропических циклонов; аномалии погоды обнаруживаются не только в экваториальной зоне, но и в умеренных широтах. Обнаружена связь Эль-Ниньо с усилением Алеутского минимума, циркуляцией западных ветров и осадками умеренных широт. Следует учитывать, что последствия явления Эль-Ниньо в умеренных широтах сильно меняются от случая к случаю. Представляется, что основной причиной изменчивости последствий является существенная нелинейность отклика общей циркуляции атмосферы умеренных широт на аномалии температуры поверхности океана (тропические и внетропические), в то время как отклик тропической атмосферы с достаточно хорошей точностью может быть аппроксимирован линейной динамикой.

Связь между этими двумя природными явлениями, Южное Колебание и Эль-Ниньо, была осознана гораздо позже — после сильного события Эль-Ниньо, произошедшего в 1957 г. и имевшего катастрофические последствия. Термодинамический процесс глобального масштаба, ЮКЭН, происходит в тропической зоне системы океан – атмосфера, но оказывает заметное воздействие на динамику всей климатической системы планеты, влияя на циркуляции Гадлея и Уокера и на расположение областей активной конвекции в приэкваториальной зоне. События Эль-Ниньо нарушают нормальный цикл циркуляции в системе океан – атмосфера и приводят к широкомасштабным аномалиям климатического процесса. Кроме того, события Эль-Ниньо являются природными катастрофами и часто приводят к тяжелым экологическим и экономическим последствиям. Диагностика и прогноз таких опасных природных явлений чрезвычайно актуальны.

В верхней части рис. 6 представлен график индекса Южного Колебания, одной из характеристик процесса ЮКЭН (индекс Южного Колебания — это нормированная разность атмосферного давления, измеряемого на станциях Таити и Дарвин). Событиям Эль-Ниньо соответствуют отрицательные значения индекса Южного Колебания, другой стадии явления, Ла-Нинья, соответствуют положительные значения индекса. Вейвлет-спектры мощности $E_w(a, b)$ индекса Южного Колебания и чисел Вольфа (одной из характеристик солнечной активности) демонстрируют связь между этими двумя процессами. Интересно, что наиболее интенсивные явления Эль-Ниньо (на рис. 6 они отмечены стрелками) происходят не столько в годы наибольшей активности Солнца, сколько в периоды наибольших градиентов — резких изменений солнечной активности.

Существуют многочисленные попытки реконструкции истории ЮКЭН по свидетельствам о засухах, наводнениях, состоянии снега на горных вершинах и другим косвенным признакам. Среднегодовые данные о частоте событий Эль-Ниньо за последние 500 лет основаны на свидетельствах о тайфунах в Южном Китае, холодных зимах в Восточной Азии, засухах в Австралии, наводнениях на Ниле и в Перу, которые могли иметь связь с событиями Эль-Ниньо. В результате применения вейвлет-преобразования к таким реконструированным данным [2, 3] обнаружены локальные периодичности событий Эль-Ниньо с масштабами от 8 до 11 лет; которые связывают с 22-летним циклом солнечной активности; масштаб около 35–40 лет может быть связан с 70–80-летним циклом событий Эль-Ниньо (он хорошо виден на рис. 6). Отметим, что близкий к 70-летнему масштаб хорошо заметен в рядах долговременных изменений поверхностной температуры воздуха.

События Эль-Ниньо влияют на погоду не только тропических, но и внетропических умеренных широт. На рис. 7 показаны вейвлет-спектры мощности $E_w(a, b)$ поверхностной температуры воздуха в трех разных точках на территории нашей страны: в Петербурге (60° с.ш., 30° в.д.), в Оренбурге (52° с.ш., 56° в.д.) и Иркутске (52° с.ш., 104° в.д.), находящихся практически на одной широте. Наиболее интенсивные явления Эль-Ниньо, произошедшие в сороковых и восьмидесятих годах прошлого века заметно повлияли на изменение температуры в Петербурге. С продвижением внутрь территории страны на восток климат становится все более континентальным. Влияние событий Эль-Ниньо заметно ослабевает в Оренбурге и практически не исчезает в Иркутске. Особенно хорошо это видно во время сильнейшего Эль-Ниньо 1940-х годов. Распределенная по масштабам функция корреляции, которая здесь не приведена, подтверждает тенденцию.

В заключение следует сказать, что разработанные методики локализованного спектрального анализа, основанного на математическом аппарате вейвлет-преобразования, могут быть использованы для изучения данных наблюдений за поведением любых сложных нелинейных неравновесных систем. Они уже с успехом использовались нами для анализа структуры шумовых и деградиационных процессов в полупроводниковых приборах, при анализе иерархической структуры социальных систем массового обслуживания, для анализа данных научных наблюдений за изменчивостью магнитного поля Земли и интенсивности космических лучей, в области физики высоких энергий, а также для анализа характеристик широкого круга геофизических процессов.

Литература

1. *Schleziinger M.E., Ramankutty N.* Is the recently reported 65- to 70-year surface-temperature oscillation the result of climatic noise? // *J. Geophysical Research.* 1995. V. 100. No. D7. P. 13767–13774.
2. *Астафьева Н.М.* Вейвлет–анализ: основы теории и примеры применения // *Успехи физических наук.* 1996. Т. 166. № 11. С. 1145–1170.
3. *Астафьева Н.М.* Анализ долговременной структуры индекса Южного Колебания и событий Эль-Ниньо // *Известия РАН. Физика атмосферы и океана,* 1997. Т. 33. № 6. С. 850–859.
4. *Daubechies I.* Ten lectures on wavelets. CBMS Lecture Notes Series. SIAM. Philadelphia. 1991. 136 p. (*Добеши И.* Десять лекций по вейвлетам. Москва – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. 464 с.).
5. *Чу К.* Введение в вейвлеты. М.: Мир, 2001. 412 С.

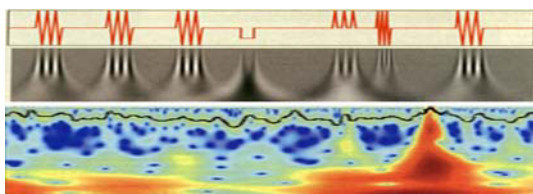


Рис. 5. Два сигнала различной природы и картины коэффициентов их вейвлет-преобразования, демонстрирующие возможности этого математического аппарата выявлять структуру анализируемого множества

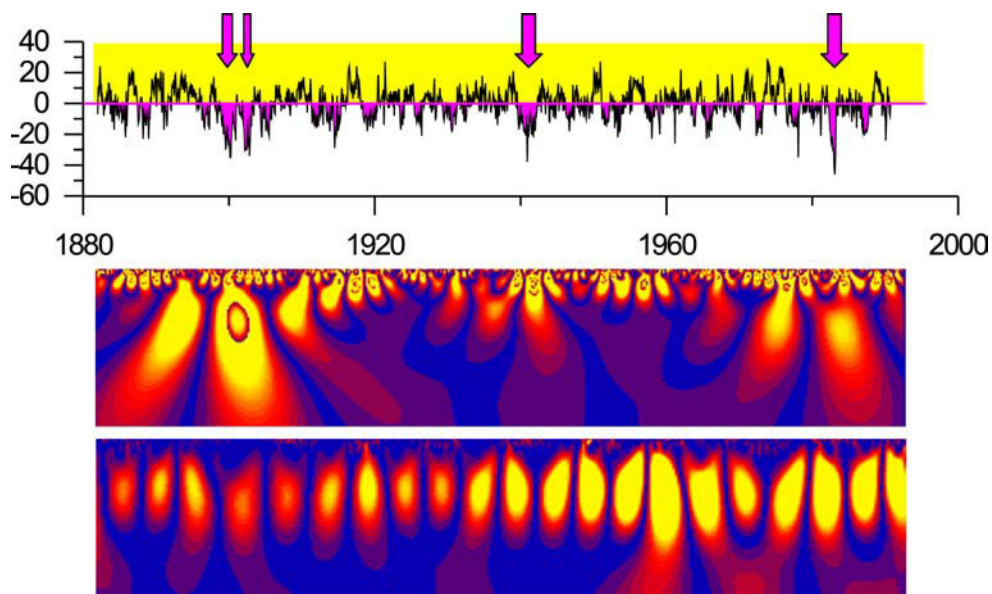


Рис. 6. Изменение значений индекса Южного Колебания (выделены и показаны Стрелками области наиболее сильных явлений Эль-Ниньо) и вейвлет-спектры мощности $E_w(a,b)$ индекса; ниже — вейвлет-спектры мощности чисел Вольфа

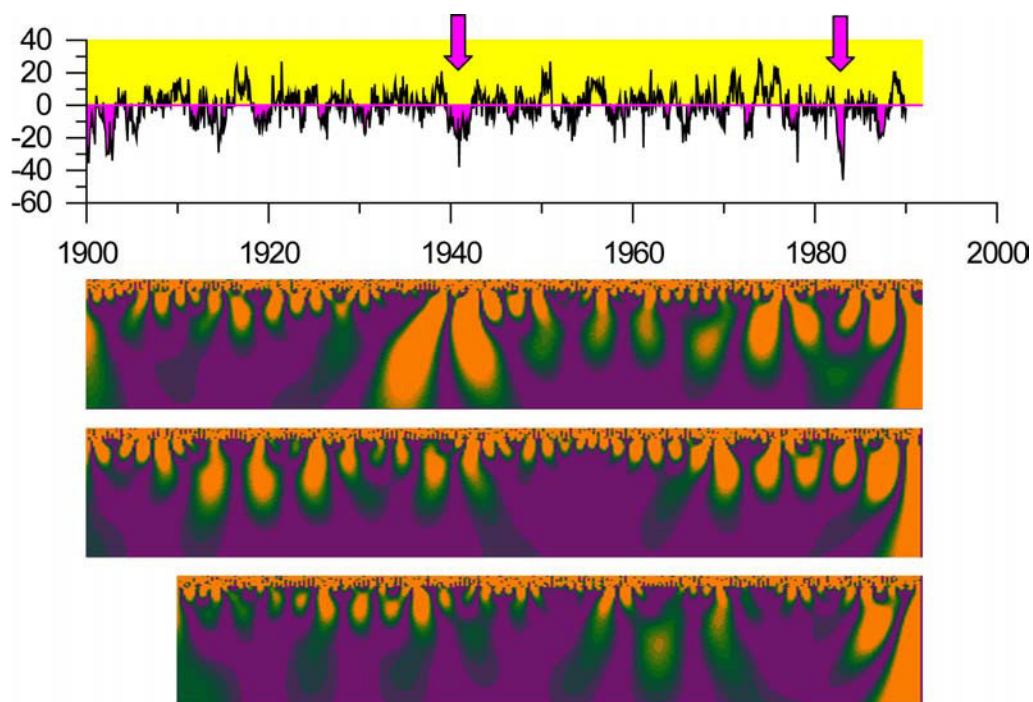


Рис. 7. Изменение значений индекса Южного Колебания и вейвлет-спектры мощности $E_w(a,b)$ приповерхностной температуры воздуха в Петербурге, Оренбурге и Иркутске (сверху вниз) чисел Вольфа