

Структуры, формирующиеся во вращающемся сферическом слое под влиянием условий, имитирующих глобальные потоки тепла в атмосфере

Н.М. Астафьева

*Институт космических исследований РАН,
117997 Москва, ул. Профсоюзная, 84/32
E-mail: ast@iki.rssi.ru*

Задача о движениях вязкой жидкости во вращающихся сферических слоях при различных динамических и тепловых воздействиях может послужить основой для изучения крупномасштабных термодинамических природных процессов, формирующихся под определяющим влиянием трех основных факторов: сферической геометрии планеты, ее вращения и процессов переноса тепла. Именно при определяющем влиянии этих физических факторов — вращение, тепловой обмен и кривизна поверхности — происходят глобальные и крупномасштабные процессы в атмосфере и океанах. В настоящей работе представлены некоторые результаты численного моделирования движений, формирующихся во вращающихся сферических слоях под влиянием физических факторов, определяющих структуру крупномасштабных термодинамических процессов в системе океан – атмосфера. Численно полуспектральным методом решается задача о движении жидкости (сжимаемой и слабо сжимаемой) во вращающемся сферическом слое. Показано, что система формирующихся крупномасштабных вихревых систем управляет процессами переноса тепла и углового момента в слое жидкости.

Введение

Изучение свойств **сдвиговых течений** вязкой жидкости остается актуальным для развития общей теории гидродинамической устойчивости на протяжении длительного времени [1–3]. Такой интерес к сдвиговым течениям связан и с проблемами общей теории гидродинамической устойчивости и с прикладными геофизическими задачами и определяется, в частности, большой распространенностью этого типа движений в природе и в технологических процессах [4–8]. Именно астро- и геофизическими приложениями стимулировались работы по изучению устойчивости движения жидкости, возникающего из-за наличия горизонтального градиента температуры, во вращающихся кольцевых цилиндрических сосудах (см. обзор [9]). В настоящее время в линейной теории устойчивости наибольший интерес вызывает рассмотрение течений, отличных от стационарных и плоских, а также течений, формирующихся под влиянием нестандартных граничных условий. Нелинейность реальных движений и процессов объясняет постоянный интерес к нелинейной теории.

Наиболее полно изученными сдвиговыми течениями являются классические проблемы Куэтта–Пуазейля (рис. 1) и Тейлора–Куэтта (рис. 2). Несмотря на формальную простоту классических течений (одномерность профиля и зависимость от Re только амплитуды основного течения*) и тот факт, что за более чем полуторавековую историю исследования сдвиговых течений они удостоивались внимания ученых с очень громкими именами, история их изучения далеко не проста.



Рис. 1. Проблема Куэтта–Пуазейля. Вид области течения и профили скорости течений Куэтта, Пуазейля и Куэтта–Пуазейля (слева направо)

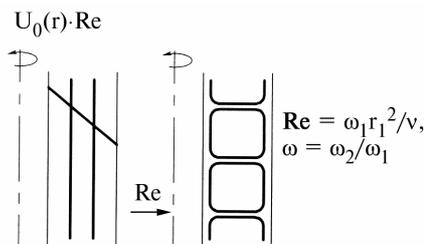


Рис. 2. Проблема Тейлора–Куэтта. Вид области течения, основное (а) и вторичное (б) течение и определяющие параметры задачи

Плоские течения. Плоскопараллельное течение Куэтта с линейным профилем скорости, согласно всем проводившимся вычислениям, линейно устойчиво при любых конечных значениях числа Рейнольдса (формальное доказательство этого факта пока не опубликовано). В то же время, эксперименты выявили неустойчивость этого течения по отношению к конечно-амплитудным возмущениям, что подтверждено также и приближенными вычислениями. Известна линейная устойчивость плоского течения Пуазейля с параболическим профилем в идеальной жидкости. Исследуя устойчивость течения Пуазейля в вязкой жидкости, всемирно известный теперь физик Гейзенберг обнаружил нормальную бифуркацию течения (1924). Этот результат вызвал бурю негодования (может быть, поэтому гидродинамика и потеряла Гейзенберга), поскольку в те времена вязкости полагалось быть сглаживающим фактором и уж никак не дестабилизирующим. Спустя 20 лет также знаменитый теперь Линь Цзя Цзяо численно подтвердил (1945) линейную неустойчивость вязкого течения Пуазейля. Однако их обоих опровергают результаты экспериментальных исследований — потеря устойчивости течения происходит при значениях числа Рейнольдса Re_E , которые значительно ниже критического числа Рейнольдса Re_L линейной теории. Еще через 20 лет неустойчивость течения Пуазейля по отношению к конечно-амплитудным возмущениям была подтверждена и численно.

Цилиндрическое течение Куэтта (сдвиговое течение жидкости в слое между бесконечными коаксиально вращающимися цилиндрами) определяется двумя параметрами подобия (Re , ω) — число Рейнольдса и отношение угловых скоростей вращения граничных цилиндров; основное течение зависит только от радиальной координаты и с ростом Re меняется лишь его амплитуда. Релей (1916) показал, что при выполнении условия $\partial(rU)^2/\partial r < 0$ течение идеальной жидкости между вращающимися цилиндрами становится неустойчивым. В вязкой жидкости цилиндрическое течение Куэтта независимо от толщины слоя δ становится линейно неустойчивым относительно монотонных осесимметричных возмущений (за исключением случая больших отрицательных ω). После потери устойчивости основного течения в результате центробежного механизма неустойчивости и с соблюдением принципа смены устойчивости формируется стационарное осесимметричное вторичное течение в виде бесконечной стопки кольцевых вихрей (см. рис. 2) — тороидальных вихрей, названных именем Тейлора, который первым получил их численно в приближении тонкого слоя (1923). С ростом Re на тороидальных вихрях также в результате нормальной бифуркации Хопфа появляются азимутальные моды; дальнейшее увеличение Re после нескольких переходов (вихри с волной — вихри с двумя независимыми частотами – вихри с двумя зависимыми частотами и т. д.) приводит к турбулентности.

Сферическое течение Куэтта — формирующееся в слое между коаксиальными концентрическими сферами под действием вращения граничных сфер (рис. 3) — более сложное, чем его классические аналоги. В отличие от них сферическое течение Куэтта:

- происходит в естественным образом замкнутой области, а известно, что явления неустойчивости в замкнутых и незамкнутых областях различны;
- топология течения определяется всеми тремя параметрами подобия (это число Рейнольдса Re , толщина слоя жидкости δ и соотношение между угловыми скоростями граничных сфер ω); причем устойчивость течения не только от числа Рейнольдса, но и от двух других параметров, δ и ω , зависит критическим образом;
- уже при малых значениях Re основное течение зависит от двух независимых переменных (радиуса r и широтного угла θ) и имеет все три компоненты скорости; каждая частица жидкости участвует и в меридио-

нальном, и в азимутальном движениях (рис. 4), совершая винтовую намотку на тороподобную «поверхность тока»;

▪ с ростом Re меняется не только амплитуда, но и форма основного течения; этот факт и отсутствие аналитического решения для основного течения заметно усложняют изучение его линейной устойчивости.

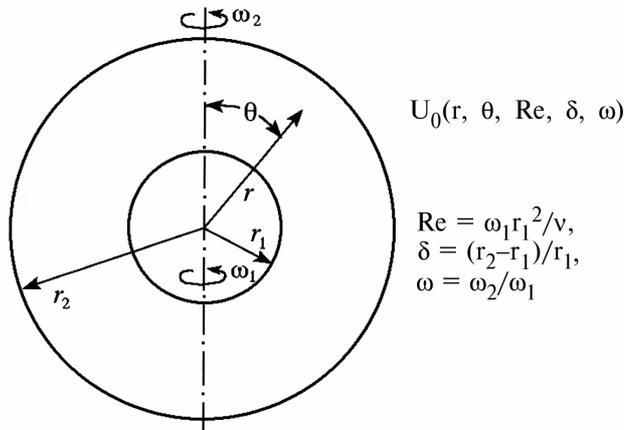


Рис. 3. Вид области течения между вращающимися сферами и определяющие параметры задачи

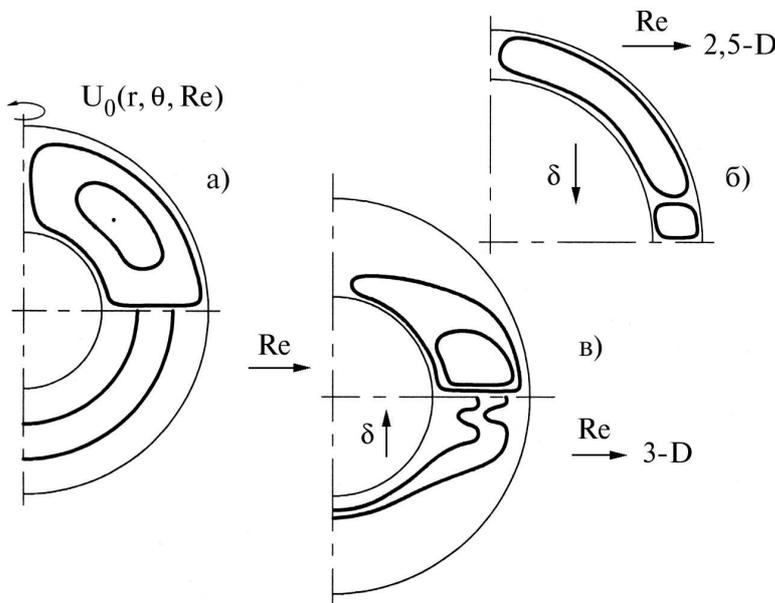


Рис. 4. Линии тока и линии уровня угловой скорости (в нижней полусфере) основного течения (а) при вращении внутренней сферы. Показаны изменения, происходящие с ростом Re : вторичное течение после первой бифуркации в тонком слое (б) и трансформация основного течения в толстом слое (в)

Сложность основного течения приводит к тому, что в сферическом течении Куэтта наблюдается большинство типов движений, вязких слоев (пограничных экмановских и свободных сдвиговых), физических механизмов неустойчивости и сценариев перехода к турбулентности, характерных для вращающейся жидкости. Применение для суждения об устойчивости сферического течения критериев, относящихся к плоскому или цилиндрическому течениям, приводит к качественно неверным выводам. Например, развитие основного течения с ростом Re в сферических слоях зависит от толщины слоя, в результате чего, механизмы неустойчивости и форма вторичного течения в различных в тонких и толстых слоях. Напомним, что ни форма основного течения, ни его устойчивость в плоском и цилиндрическом сдвиговых течениях не зависят от толщины слоя жидкости.

В общем виде проблема сферического течения Куэтта описывается начально-краевой задачей для системы нелинейных нестационарных уравнений Навье–Стокса, решение которой весьма сложно даже при современном уровне вычислительной техники. Вследствие этого долгое время проблема изучалась лишь в

предельных случаях, когда задача имеет малый параметр и можно упростить уравнения. Стокс (1845) первым дал строгую математическую постановку задачи о сферическом течении Куэтта в частном случае медленного вращения сферы в безграничной жидкости и описал структуру течения. Экспериментально и численно эта задача была решена только более 100 лет спустя.

В случае средних значений определяющих параметров, когда нет малого параметра и невозможны асимптотические разложения, для решения задачи использовались численные методы: разностные или спектральные. Все численные методы оказываются достаточно трудоемкими, поскольку течение необходимо описывать с подробной дискретизацией. Это объясняется спецификой задачи, где имеется три или даже более линейных масштаба*, вследствие чего в сферических слоях одновременно могут существовать и нелинейно взаимодействовать движения, очень различающиеся по масштабу и интенсивности. В результате, использование конечно-разностных методов приводит к необходимости подробных пространственных сеток, а использование спектральных или полуспектральных методов — к большому числу базисных функций.

Исследование сферического течения Куэтта в общем случае на основе начально-краевой задачи для системы нелинейных нестационарных уравнений Навье–Стокса было начато в ИКИ в 1970-х гг. по инициативе академика Г.И. Петрова (Н.М. Астафьевой и И.М. Яворской) [10–16]. Проблема привлекала внимание многих исследователей, поскольку по значимости для общей теории гидродинамической устойчивости она стоит в одном ряду с классическими проблемами Релея–Бенара, Куэтта–Пуазейля и Тейлора–Куэтта. Однако наиболее полное и последовательное изучение общих свойств и закономерностей нелинейной динамики и линейной устойчивости течения во вращающемся сферическом слое — осесимметричного (2,5-D) и монотонного, трехмерного (3-D) и нестационарного — с применением методов численного моделирования было проведено в ИКИ (отметим, что примеры численного решения трехмерных задач вообще довольно редки).

Практически все основополагающие результаты в этой проблеме были получены в ИКИ впервые: неустойчивость течения, упорядоченные вторичные режимы, зависимость физического механизма неустойчивости от толщины слоя, сценарии переходов между вторичными режимами и неединственность течения. На редкость удачным обстоятельством явилась возможность постоянного сравнения результатов численного эксперимента с полученными в лабораторном физическом эксперименте, что чрезвычайно важно в такой сложной проблеме, как проблема сферического течения Куэтта. Эта возможность была в течение двух десятилетий работы, благодаря экспериментальным исследованиям Ю.Н. Беляева и И.М. Яворской, проводившимся в Институте механики МГУ им. М.В. Ломоносова вплоть до ухода Ю.Н. Беляева из жизни.

Большой интерес к сферическому течению Куэтта связан не только с фундаментальными проблемами общей теории гидродинамической устойчивости и турбулентности, но и с потребностями изучения и моделирования крупномасштабных термодинамических процессов в астро- и геофизических, а также в технологических объектах. Задача о сферическом течении Куэтта может послужить основой для изучения и прогнозирования любых природных и технологических движений и процессов, форму и устойчивость которых определяют, в основном, два физических фактора: сферическая геометрия области течения и вращение объема.

Физические факторы — сферическая геометрия области течения, вращение объема и тепловой обмен — во взаимодействии

Все природные процессы и явления звездной или планетной термо- гидродинамики предстают в астро- и геофизических объектах не изолированными, а в сложном, как правило, нелинейном взаимодействии друг с другом. Такие физические факторы, как магнитные поля и гравитация, сферическая геометрия объе-

* Это естественные геометрические масштабы области течения: радиус внутренней сферы, толщина слоя жидкости и длина экваториальной окружности, а с ростом числа Рейнольдса формируются экмановские пограничные и свободные сдвиговые вязкие слои со своими толщинами.

ма и вращение, сжимаемость и стратификация плотности, градиенты температуры и процессы выделения, поглощения и переноса тепла и многие другие оказывают влияние на глобальные движения в оболочках и недрах звезд и планет, в частности, в атмосфере, океанах и жидком ядре Земли. Необходимость глубокого понимания взаимодействия этих физических факторов и их влияния на явление в целом вызывала и вызывает к жизни множество моделей, описывающих те или иные стороны астро- и геофизических явлений.

Большой опыт, накопленный в построении моделей, описывающих термодинамические процессы в астро- и геофизических объектах, наряду с достижениями показал и трудности моделирования. Вот всего две из них: ♦ большая сложность и многопараметричность природных процессов, формирующихся в результате множества нелинейных взаимодействий в широком диапазоне интенсивностей и пространственно-временных масштабов, ♦ недостаточная информация о физических условиях, вызывающих происходящие в астро- и геофизических объектах явления, и управляющих ими механизмах. Как правило, для получения согласия результатов моделирования с имеющимися наблюдательными данными, в моделях приходится вводить некий произвол: например, через коэффициенты турбулентной вязкости, переноса тепла, анизотропии свойств и другие. При выборе правильной гипотезы о физических механизмах, вызывающих моделируемые явления и управляющих ими, этот путь приводит к успеху, при выборе неправильной гипотезы может ввести в заблуждение.

Необходимы критерии выбора правильного направления — критерии независимые, полученные в строго контролируемых условиях. Это достижимо путем решения модельных задач, позволяющих выделить некоторые наиболее характерные физические факторы или механизмы и облегчить понимание явления в целом [9]. Моделирование является одним из наиболее удобных инструментов исследования поведения многопараметрических процессов. Представляется разумным искать понимание отдельных явлений и управляющих физических механизмов посредством численного моделирования, которое предоставляет уникальную и очень важную в таких случаях возможность выделить определенные физические факторы и рассмотреть их влияние независимо, в контролируемых условиях, на основе ясной математической постановки и с минимальным числом основополагающих допущений и искомым переменных.

Задача о течениях, формирующихся в сферическом слое вязкой теплопроводной жидкости при подводе тепла и (или) углового момента, может быть использована в качестве модельной для изучения особенностей нелинейного обмена теплом и угловым моментом в специфической геометрии. Эта модельная гидродинамическая задача, учитывает всего три из множества физических факторов — ♦ сферическая геометрия области течения, ♦ вращение объема и ♦ тепловой обмен (например, солнечная радиация и энергообмен между океанами, атмосферой и сушей) — при определяющем влиянии которых происходят глобальные и крупномасштабные процессы в атмосфере и океанах.

Вращение является фактором, необходимым для формирования в атмосфере и океанах циркуляции глобального масштаба и большинства крупно- и мелкомасштабных движений. В сферической геометрии сила Кориолиса неоднородна и зависит от широты, что важно для термодинамических процессов разных масштабов. Кроме того, неоднородность силы Кориолиса приводит к появлению качественно новых эффектов в течениях жидкости. Например, некоторые стационарные в плоском слое течения в сферическом случае приобретают волновую природу (так появляются характерные для атмосфер и океанов волны Россби). Сила Кориолиса создает эффекты нового типа, в частности, эффекты «упругости» жидкости; она меняет направление движения жидкости, не совершая работы; в сферической геометрии она зависит от широты, что принципиально важно для движений разных масштабов. Важное влияние вращения состоит в изменении направления горизонтальной скорости частицы, что вынуждает ее двигаться вправо в Северном полушарии и влево в Южном.

Кривизна поверхности и форма области течения оказываются определяющими для основного глобального и вторичных течений. В динамической метеорологии и океанографии для описания крупномасштабных течений часто используется приближение тонкого слоя жидкости на вращающейся сфере (приближение мелкой воды с учетом изменения толщины слоя за счет смещений дна и свободной поверхности). Завихренность элемента жидкости в этом приближении меняется только вследствие изменения толщины

слоя или широты (поскольку сила Кориолиса во вращающейся сферической системе зависит от широты). Для описания течений, охватывающих малый диапазон широт, выбирают более локальные системы координат, например, используется приближение бета-плоскости, предполагающее малое линейное изменение параметра Кориолиса с широтой. В этом приближении пренебрегают кривизной области течения: движение происходит в плоском слое жидкости с линейно меняющейся в направлении север – юг угловой скоростью. Замена сферической геометрии цилиндрической (в области экватора), плоской (в полярных областях) или приближением бета-плоскости в тех случаях, когда это неоправданно, может приводить не только к количественно, но и качественно неверным выводам.

Перенос тепла в атмосфере и океанах вызывается различными причинами и приводит к динамическим процессам разных масштабов. Разность температуры между экваториальными и полярными областями создает меридиональные градиенты тепла, которые становятся причиной формирования движений глобального масштаба — глобальных циркуляций и зональных потоков. При оценке эффективности переноса тепла в геофизических объектах учет формы области течения и взаимодействия с вращением не менее важен, поскольку вращение приводит к новым неожиданным эффектам. Вязкость, например, играет в возникновении конвекции во вращающихся слоях совсем несвойственную ей роль. Из-за ограничений, накладываемых теоремой Тейлора–Праудмена, вращающаяся идеальная жидкость должна быть конвективно устойчива при любых значениях градиента температуры. И только наличие вязкости жидкости приводит к появлению конвективной неустойчивости. Кроме того, градиент температуры на сфере в невозмущенном состоянии при равномерном распределении источников тепла сферически симметричен. Вращение вводит новую симметрию — относительно оси вращения, а сферическая геометрия области течения приводит к неоднородности в направлении экватор–полюс. В результате эффективность переноса тепла во вращающихся сферических слоях зависит от полярного угла из-за влияния момента количества движения даже при центрально симметричных тепловых потоках. Решение проблемы заметно усложняется, поскольку становится невозможным разделение переменных даже в линейной задаче.

Учет вращения представляется тем более важным, что вместе с вращением в жидкости включается механизм, при помощи которого уже «вторичное» для азимутального вращения меридиональное движение может заметно изменить его путем перераспределения углового момента. «Вторичное» движение воздействует на «первичное» азимутальное течение путем растяжения вихревых линий и перераспределения и сохранения углового момента в жидкости. Это происходит всегда и везде на Земле: при взаимодействии с глобальной циркуляцией атмосферы и великими океаническими и крупномасштабными атмосферными струйными течениями; при взаимодействии с крупномасштабными термодинамическими процессами в системе океан–атмосфера, вызванными явлением Эль-Ниньо или процессом Южное Колебание – Эль-Ниньо; при возникновении, развитии и разрушении тропических тайфунов, циклонов средних широт и полярных ныряющих циклонов; при диссипации урагана над сушей и при формировании и развитии многих и многих процессов с разными временными и пространственными масштабами, происходящих в океанах, атмосфере и недрах Земли.

Нелинейное сдвиговое движение жидкости в слое между вращающимися концентрическими коаксиальными сферами может послужить основой для понимания природы глобальных геофизических процессов. Возможности использования результатов решения задачи в качестве основы для моделирования глобальных геофизических процессов повышаются с учетом таких факторов как сжимаемость жидкости, стратификация плотности, потоки тепла, более свободные динамические условия на границах и других. Характерные для течений во вращающихся сферических слоях физические эффекты, приводящие к неустойчивости, неединственности решений и гистерезису, характерны также и для многих природных процессов.

Воздействие тепловых и динамических граничных условий и свойств жидкости на структуру глобальной циркуляции во вращающихся сферических слоях

Теоретические модели, позволяющие объяснить отдельные аспекты динамических и тепловых процессов, происходящих в атмосферах, океанах и недрах планет, строятся обычно на основе системы термогидродинамических уравнений с учетом соответствующих граничных условий, предположений, упрощений и дополнений. Рассмотрим задачу об осесимметричных движениях вязкой слабо сжимаемой жидкости в покоящемся или однородно вращающемся с постоянной угловой скоростью сферическом слое в присутствии центрально-симметричного гравитационного поля, формирующихся под влиянием тепловых и динамических граничных воздействий. Считается, что неравномерный по меридиональному углу радиационный нагрев от Солнца тонкого поверхностного слоя атмосферы планеты может приводить к возникновению поверхностных напряжений, направленных перпендикулярно меридиональной плоскости, величина которых возрастает к экватору. В представленной постановке сферические границы слоя считаются непроницаемыми, но не жесткими и не свободными от напряжений — на них заданы сдвиговые напряжения, действующие перпендикулярно меридиональной плоскости (от касательных меридиональных напряжений границы считаются свободными). Известно, что общая излучаемая планетой энергия несколько больше поглощаемой ею энергии. Это моделируется заданием потоков тепла, распределенных по внутренней поверхности сферического слоя и направленных по радиусу. Изучается влияние тепловых потоков и сдвиговых напряжений на границе слоя на формирование мезомасштабных и глобального масштаба течений в покоящемся или однородно вращающемся сферическом слое.

Постановка задачи в приближении Буссинеска. Рассматривается задача об осесимметричных ($\partial_\varphi = 0$) движениях вязкой жидкости в приближении Буссинеска в слое между концентрическими сферическими поверхностями ($r_1 \leq r \leq r_2$). Предполагается, что жидкость находится в центрально симметричном гравитационном поле g/r^2 и весь слой вращается с постоянной угловой скоростью Ω вокруг общей вертикальной оси z . Диссипацией энергии в тепло за счет внутреннего трения пренебрегаем. В приближении Буссинеска пренебрегаем зависимостью плотности от давления; изменение плотности за счет температуры учитывается только в уравнении движения как изменение архимедовой (подъемной) силы. Проблема описывается системой нелинейных нестационарных уравнений, состоящей из уравнений движения, неразрывности и уравнения теплопроводности

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{U} + \frac{1}{Pr} (\mathbf{U} \nabla) \mathbf{U} &= -\nabla P + \frac{Ra}{\delta^2} T \frac{\mathbf{e}_r}{r^2} - 2 \operatorname{Re} [\mathbf{e}_z \times \mathbf{U}] + \Delta \mathbf{U}, \\ \operatorname{div} \mathbf{U} &= 0, \\ \partial_t T + \frac{1}{Pr} \mathbf{U} \nabla T &= \frac{1}{Pr} \nabla^2 T, \end{aligned}$$

здесь t — время, \mathbf{U} — вектор скорости с проекциями (u, v, w) на оси координат (r, θ, φ) , соответственно; P — все потенциальные силы (кроме давления сюда входит, например, центробежная сила), T — температура жидкости (добавка к среднему), $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_z$ — единичные векторы; ν, β — коэффициенты кинематической вязкости и теплового расширения. В качестве характерных масштабов задачи выбраны $r_1, r_1^2/\nu, \chi/r_1$ — масштабы длины, времени и скорости, соответственно; ρ_0 — плотность на внутренней границе слоя и давление $p_0 = \rho_0 \nu \chi / r_1^2$.

Обе границы слоя считаются сферическими и непроницаемыми для жидкости, но не свободными от напряжений. На внешней границе слоя заданы симметричные относительно плоскости экватора сдвиговые напряжения $\tau_{r\varphi}$, действующие перпендикулярно меридиональной плоскости; от касательных меридиональных напряжений $\tau_{r\theta}$ граница считается свободной

$$\begin{aligned}\tau_{r\varphi} &= \tau P_1'(\cos \theta), \\ \tau_{r\theta} &= 0.\end{aligned}$$

В слое должно выполняться условие сохранения углового момента относительно оси вращения z . Следовательно, моменты внешних поверхностных сил должны равняться нулю. В рассматриваемой постановке это накладывает ограничение $\int \tau_{r\varphi} r \sin \theta d\sigma = 0$ на задание граничных условий для $\tau_{r\varphi}$ на всей границе слоя $\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2$. Отсюда следует, что при заданных граничных условиях на внешней поверхности внутреннюю сферическую поверхность также нельзя считать свободной от напряжений, на ней необходимо задать действующие перпендикулярно меридиональной плоскости напряжения $\tau_{r\varphi} = \tau (r_2/r_1)^3 P_1'(\cos \theta)$. В дальнейшем будем называть τ параметром сдвига.

Кроме того, заданы поток тепла $\partial_r T = -\nabla T_1$ на внутренней сферической границе (при $r = r_1$) и распределение температуры $T = T_2 = \text{const}$ на внешней сфере (при $r = r_2$). Температура T введена (в размерном виде) по формуле $T_2 + \nabla T_1 r_1 T$.

Таким образом система уравнений решалась со следующими условиями на внутренней и внешней граничных сферах

$$\begin{aligned}u = \partial_r \left(\frac{v}{r} \right) = 0, \quad r \partial_r \left(\frac{w}{r} \right) = \tau (1 + \delta)^3 \sin \theta, \quad \partial_r T = -1 \quad \text{при} \quad r = 1, \\ u = \partial_r \left(\frac{v}{r} \right) = 0, \quad r \partial_r \left(\frac{w}{r} \right) = \tau \sin \theta, \quad T = 0 \quad \text{при} \quad r = 1 + \delta.\end{aligned}$$

Характерные безразмерные параметры задачи в описанной постановке — это построенное по угловой скорости вращения слоя число Рейнольдса $Re = \Omega r_1^2 / \nu$, безразмерная толщина слоя жидкости $\delta = (r_2 - r_1) / r_1$, параметр сдвига τ , число Прандтля $Pr = \nu / \chi$ и число Релея $Ra = g \nabla T_1 \beta (r_2 - r_1)^2 / \nu \chi$. Здесь ν , χ , β — коэффициенты кинематической вязкости, температуропроводности и теплового расширения, постоянные и изотропные, g — гравитационная постоянная.

Задача решалась численно полуспектральным методом в слоях толщины $\delta = 0,19 \div 0,24$, при значениях числа Рейнольдса от $Re = 0$ (слой без вращения) до $5 \cdot 10^3$, при значениях параметра сдвига $\tau = 0 \div 10^4$, $Pr = 1$ и при $Ra = 0$ или при небольших закритических $Ra = 10^4 \div 10^5$. Ниже представлены некоторые из полученных результатов.

Влияние динамических граничных условий на формирование движений в покоящемся или однородно вращающемся сферическом слое. Известно, что передача углового момента в слое существенным образом зависит от типа граничных условий. Так в случае твердых границ кинетическая энергия дифференциального вращения оказывается заметно (в несколько раз) меньшей, чем в случае свободных границ. При свободных границах перенос углового момента осуществляется преимущественно рейнольдсовыми напряжениями и всегда направлен от полюсов к экватору. Ограничение на перенос углового момента, налагаемое действием твердых границ, состоит в том, что при твердых границах основной вклад в перенос углового момента дает сила Кориолиса, действующая на меридиональную циркуляцию. Интенсивность меридиональной циркуляции при твердых границах оказывается значительно большей за счет экмановских пограничных слоев. Меридиональная циркуляция, вообще-то являющаяся вторичной, влияет на азимутальное течение и кинетическая энергия движения в слое перераспределяется не в пользу дифференциального вращения.

В рассмотренном случае имеем два фактора, действующие по-разному — однородное вращение слоя с постоянной угловой скоростью и заданные неоднородные напряжения на границах слоя. В отсутствии вращения угловая скорость на внешней границе убывает в направлении экватора, что объясняется преимуще-

ственным влиянием напряжений, заданных на внутренней границе. Под их воздействием формируется меридиональная циркуляция с направлением вращения против часовой стрелки ($Re = 0$, в верхней части рис. 5), уносящая угловой момент из приэкваториальной области. Ускоряющееся с ростом числа Рейнольдса вращение слоя с постоянной скоростью усиливает влияние внешней границы и приводит к формированию еще одного вихря меридионального течения с направлением циркуляции по часовой стрелке. Меридиональная циркуляция такого направления в сочетании с растущей силой Кориолиса перераспределяет азимутальное течение таким образом, что внешняя часть приэкваториальной области ускоряется (эффект суперротации), а приполярные области замедляются (рис. 5 внизу справа). Отметим, что течение с одновихревой меридиональной циркуляцией более эффективно в передаче момента импульса, чем с двумя кольцевыми вихрями (с расслоением меридиональной циркуляции в радиальном направлении).

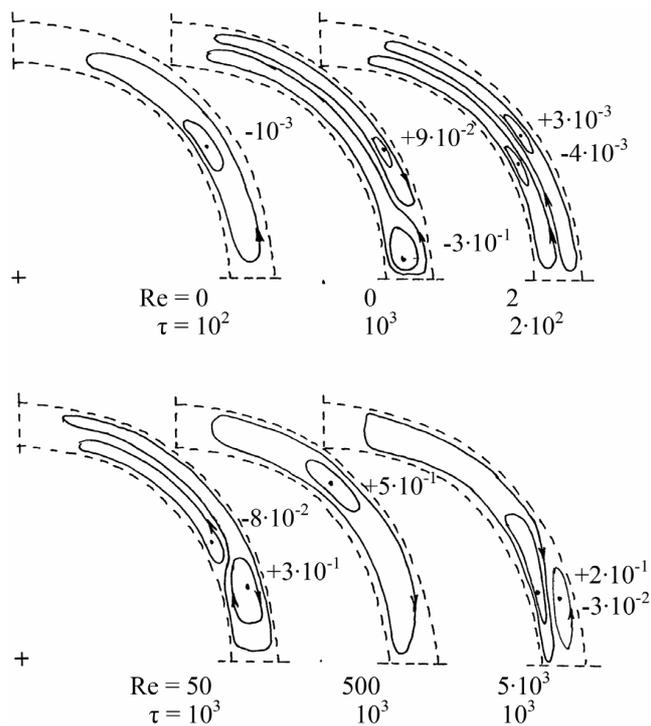


Рис. 5. Основные типы меридиональной циркуляции, формирующейся при $Ra = 0$ и разных значениях параметра τ в слое с вращением ($Re \neq 0$) и без него ($Re = 0$)

Воздействие центрально-симметричного потока тепла изнутри слоя и неоднородных напряжений сдвига на границах. На рис. 6 показана структура меридиональной циркуляции, сформировавшейся в покоящемся сферическом слое под влиянием напряжений сдвига на границах ($\tau = 10^2$), и ее изменение с ростом числа Релея Ra и неизменном τ . В этом случае изначально (при $Ra = 0$) одновихревая циркуляция с ростом числа Релея деформируется. При этом, если рост числа Рейнольдса или сдвиговых напряжений на границах (неоднородный подогрев снаружи слоя) приводит в основном к расслоению меридиональной циркуляции в радиальном направлении, то при увеличении числа Релея (поток тепла изнутри слоя) происходит дробление меридиональной циркуляции в направлении широтного угла θ . Меридиональная циркуляция остается одновихревой, но ее внутренняя структура дробится в направлении экватор–полюс: она становится похожей на стопку торов (с одинаковым направлением, но разной интенсивностью циркуляции), отделенных друг от друга (в направлении широтного угла θ) сепаратрисами.

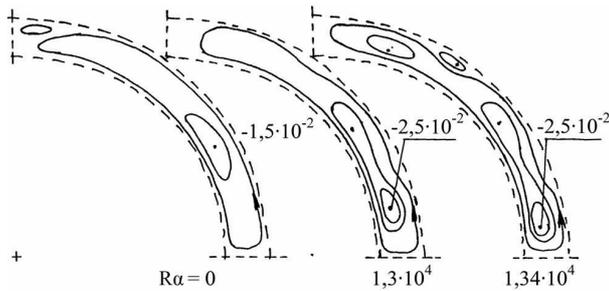


Рис. 6. Изменение структуры меридиональной циркуляции с ростом числа Рейля Ra при $\tau = 10^2$ в невращающемся слое ($Re = 0$)

При более высоких значениях параметра сдвига меридиональная циркуляция при $Ra = 0$ имеет более сложную структуру (см., например, циркуляцию, соответствующую $Re = 0$, $\tau = 10^3$ на рис. 5), однако ее деформации с ростом числа Рейля качественно схожи с описанными выше — дробление в направлении экватор – полюс.

На рис. 7 показаны результаты смешанного влияния динамических и тепловых факторов. Влияние вращения сводится, в основном, к стабилизации конвекции в приэкваториальной области, где оказываются подавленными пульсации скорости и температуры, а также конвективный поток тепла. Таким образом проявляется воздействие радиальной и азимутальной составляющих силы Кориолиса, пропорциональных $\sin\theta$ и дающих наибольший вклад на экваторе. С ростом числа Рейля происходит постепенный рост интенсивности и деформация меридиональной циркуляции с появлением вихрей в приполярной области. Отметим, что чем слабее напряжения на границах, тем более ярко выражена описанная тенденция (вихри в приполярной области начинают формироваться при меньших значениях числа Рейля).

Распределение в слое жидкости потока тепла и угловой скорости дифференциального вращения целиком определяется структурой меридиональной циркуляции — количеством и направлением вращения вихрей и их интенсивностью. Система вихрей формирует в слое жидкости систему ускоренных и замедленных (относительно однородного вращения Ω) зональных потоков — условно назовем их западными и восточными потоками. Сила Кориолиса $\mathbf{F} = 2[\boldsymbol{\Omega} \mathbf{U}]$ стремится изменить компоненту вектора скорости \mathbf{U} в поперечной плоскости (в плоскости нормальной вектору $\boldsymbol{\Omega}$). Ее горизонтальная компонента смещает жидкость из зон западных потоков в сторону экватора, а из зон восточных потоков — в сторону полюсов. Таким образом, сила Кориолиса оказывает определяющее влияние на формирование поля давления в слое жидкости.

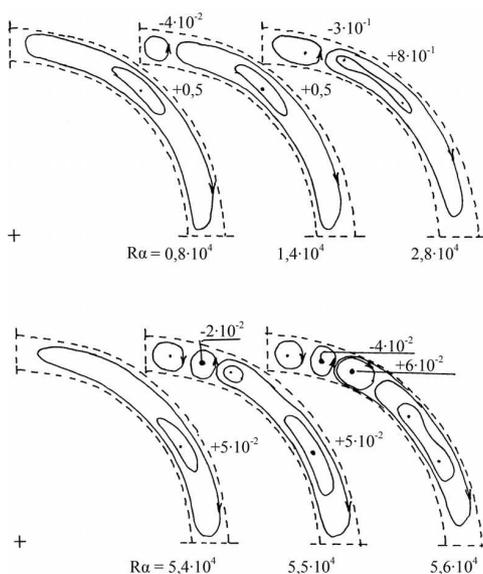


Рис. 7. Изменение структуры меридиональной циркуляции с ростом числа Рейля Ra при $\tau = 10^2$ во вращающемся слое ($Re = 50^\circ$) при $\tau = 10^3$ (вверху) и $\tau = 10^2$ (внизу)

На внешней границе слоя наблюдается дифференциальное вращение. Угловая скорость и поток тепла перераспределяются следующим образом: вихри меридиональной циркуляции с направлением вращения по часовой стрелке переносят тепло (и угловой момент) в направлении полюса, вихри с положительной циркуляцией (с направлением вращения против часовой стрелки) — в направлении экватора. Увеличение параметра сдвига τ (аналогичное усилению широтного градиента тепла на границе, пропорционального $\sin\theta$) ослабляет меридиональные кольцевые вихри в направлении циркуляции по часовой стрелке, т. е. отрицательную циркуляцию, и усиливает вихри с положительной циркуляцией. Таким образом, заданные вязкие напряжения на внешней границе (или ее подогрев) действуют аналогично ее вращению в направлении, противоположном направлению вращения внутренней сферы.

Заключение

Рассмотрено движение во вращающемся с постоянной угловой скоростью сферическом слое жидкости с заданными касательными напряжениями на внешней границе слоя (условия, моделирующие неравномерный по меридиональному углу нагрев от Солнца) и радиальным потоком тепла на внутренней сфере. При $Ra = 0$ (в зависимости от соотношения значений числа Рейнольдса и параметра сдвига) получены практически все типы меридиональной циркуляции, формирующейся в сферическом течении Куэтта при вращении граничных сфер с разными угловыми скоростями в одну или разные стороны. С ростом Ra взаимодействие потока тепла с однородным вращением слоя и заданными напряжениями на границах приводит к деформациям меридиональной циркуляции. Система формирующихся в слое вихрей управляет переносом углового момента и тепла в слое. В результате можно наблюдать дифференциальное вращение жидкости (в частности, с экваториальным ускорением, эффект суперротации) и полосатую структуру (скорости и температуры) на внешней границе слоя.

В заключение автор благодарит Наталию Юрьевну Комарову за помощь в работе над статьей и оформление иллюстративного материала.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 06-05-64276-а.

Литература

1. *Stokes G.G.* On the theories of the internal friction of fluid in motion and of the equilibrium and motion of the elastic solids // *Trans. Camb. Phil. Soc.*, 1845. V. 8. N° 2. P. 287.
2. *Rayleigh* On the dynamics of revolving fluids // *Sci. Pappers. Cambridge: Univ. Press*, 1916. V. 6. P. 447–453.
3. *Taylor G.I.* Stability of viscous liquid contained between rotating cylinders // *Phil. Trans. Roy. Soc. L.*, 1923. V. A223. P. 289–343.
4. *Бэтчелор Дж.* Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973.
5. *Гринспен Х.* Теория вращающихся жидкостей. Л.: Гидрометеиздат, 1975.
6. *Джозеф Д.* Устойчивость движений жидкости. М.: Мир, 1981.
7. *Монин А.С.* О природе турбулентности // *Успехи физических наук*, 1978. Т. 125. С. 97–122.
8. *Монин А.С.* Гидродинамическая неустойчивость // *Успехи физических наук*, 1986. Т. 150. С. 61.
9. *Должанский Ф.В., Голицын Г.С.* Лабораторное моделирование глобальных геофизических течений Куэтта // *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана*, 1977. Т. 13. № 8. С. 795–819.
10. *Астафьева Н.М., Браиловская И.Ю., Яворская И.М.* Нестационарное движение сжимаемой вязкой жидкости в шаровом слое // *Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа*. 1972. № 3. С. 4–10.
11. *Яворская И.М., Астафьева Н.М., Введенская Н.Д.* Об устойчивости и неединственности течений вязкой жидкости во вращающихся сферических слоях // *Докл. АН СССР*. 1978. Т. 241. № 1. С. 52–55.
12. *Астафьева Н.М.* Численное моделирование несимметричного относительно плоскости экватора сферического течения Куэтта // *Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа*. 1985. № 3. С. 56–67.

13. *Астафьева Н.М.* Анализ устойчивости течений во вращающихся сферических слоях (линейная теория, трехмерные возмущения) // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1997. № 6. С. 66–76.
14. *Астафьева Н.М.* Нелинейное сдвиговое течение во вращающихся сферических слоях и моделирование глобальных атмосферных движений // Изв. ВУЗов. Прикладная нелинейная динамика, 1997. Т. 5. № 5. С. 3–30.
15. *Астафьева Н.М.* Устойчивость и неединственность осесимметричных течений во вращающихся сферических слоях (нелинейная теория) // Изв. РАН. Механика жидкости и газа, 1998. № 1. С. 75–86.
16. *Астафьева Н.М.* Глобальная циркуляция во вращающихся сферических слоях (геофизические приложения) // Тез. докл. Международ. конф. «Потоки и структуры в жидкостях». МГУ им. М.В. Ломоносова. Москва, 20–23 июня 2005. М.: ИПМ РАН, 2005. С. 174–176.