

Нижняя граница облачности

Г.С. Голицын¹, Б.П. Руткевич², П.Б. Руткевич³

¹ *Институт физики атмосферы РАН
119017, Москва, Пыжевский пер., 3
E-mail: mail_adm@ifaran.ru*

² *Радиоастрономический Институт НАН Украины,
ул. Краснознаменная 4, Харьков 61002, Украина*

³ *Институт космических исследований РАН,
117997 Москва, Профсоюзная, 84/32
E-mail: peter@d902.iki.rssi.ru*

В настоящей работе построена аналитическая модель, описывающая формирование нижней границы облачности в стационарной атмосфере. Согласно адиабатическому профилю температуры каждой высоте соответствует определенное давление насыщенного пара. По приведенным расчетам равновесное распределение влаги с высотой спадает медленнее, чем реальное давление насыщенного пара. Таким образом, нижняя граница облака определяется моментом, когда относительная влажность превышает 100 %. В работе рассмотрено влияние параметров атмосферы в приземном слое на высоту образования облаков.

В работе также построена теоретическая модель для описания всех термодинамических параметров в толще облака в стационарном состоянии. Мы предполагаем, что приведенная модель даст ответ на вопрос о положении верхней границы облачности в атмосфере.

Введение

Вопрос о формировании облака играет важную роль в теории циклонов, а также служит предметом изучения в метеорологии и предсказании погоды. Общепринято, что перенос влаги осуществляется из нижних (более теплых и потому с большей абсолютной влажностью) воздушных слоев. Предложен ряд механизмов, среди которых конвекция — доминирующая.

Однако конвекция как таковая в действительности имеет свои недостатки. В предположении, что пар захватывается движущимся вверх потоком воздуха, мы приходим к выводу, что при движении воздуха вниз в пределах конвективной ячейки этот пар (или значительная его часть) будет опускаться. Тем не менее, имеет место перемешивание воздушной массы, что приводит к перераспределению влаги в атмосфере. Поэтому можно сказать, что конвекция лишь ускоряет процесс установления некоторого равновесного распределения влаги, но не является причиной направленного движения пара. Механизмы направленного (одностороннего) движения воздуха (холодный воздух с гор или бриз на границе море – суша), как существенно неравновесные процессы, нами не рассматриваются.

Поэтому возникает вопрос о конечном равновесном распределении влаги по высоте, к которому стремится система (сухой воздух и насыщенный водяной пар). Рассмотрим стационарную задачу о распределении пара в адиабатической атмосфере. Общеизвестно, что температура воздуха в атмосфере уменьшается с высотой. Плотности (или парциальные давления) двух составляющих атмосферы (воздух и пар) также уменьшаются с высотой, но по разным законам. В данной работе мы делаем расчеты в терминах парциального давления пара. Важнейшая характеристика для описания конденсации — давление насыщенного пара — напрямую зависит от распределения температуры в атмосфере. Распределение пара в атмосфере описывается барометрической формулой в соответствии с температурным профилем основной массы воздуха.

Нижняя граница облака определяется высотой, на которой давление пара достигает насыщения при данной температуре. Для определения этой высоты необходимо знать распределение давления насыщения и фактическое распределение ненасыщенного пара. Оказывается, что зачастую давление насыщенного пара

уменьшается быстрее, чем равновесное распределение пара, приводя, таким образом, к образованию облаков.

Конденсация влаги внутри облака создает дефицит парциального давления пара, что приводит к вертикальному потоку пара. Однако термодинамика с учетом конденсации существенно отличается от таковой в подоблачном слое. Вторая часть работы посвящена построению согласованной стационарной модели адиабатического облака. В частности, найдены распределения влажности, температуры и давления в зависимости от высоты.

Постановка задачи. Распределение пара в подоблачной атмосфере

Нижняя граница облака определяется высотой, на которой давление пара достигает насыщения при данной температуре. Для определения этой высоты необходимо знать распределение давления насыщения и закон распределения ненасыщенного пара. Упругость насыщенного пара как функцию температуры можно определить на основе теоретической формулы [1]:

$$E(T) = E_0 \exp\left(\frac{L\mu_w}{R}\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\right)\right). \quad (1)$$

Существуют также эмпирические формулы для определения зависимости упругости насыщенного пара от температуры. Можно воспользоваться, например, выражением из работы [2, 3]:

$$E_S(T) = \exp\left(23,8014 - 4157(T - 33,91)^{-1}\right). \quad (2)$$

Рассмотрим равновесное состояние влажной ненасыщенной атмосферы. В поле силы тяжести воздух распределен согласно барометрической формуле, причем вкладом водяного пара можно пренебречь (в силу малого парциального давления последнего). Отметим, что рассмотрение толщи облака в подобном приближении не применимо, из-за существенного вклада в уравнение теплового баланса энергии, высвобождающейся при конденсации пара.

Как простейший случай рассмотрим адиабатический профиль воздуха. Известно, что профиль температуры в этом случае будет линейным: $T = T_0(1 - \gamma_a z)$ — с величиной градиента

$$\gamma_a = \frac{g}{c_p}, \quad (3)$$

где g — сила тяжести; c_p — теплоемкость воздуха при постоянном давлении.

Пусть давление пара у поверхности равно E_0 , причем это значение ниже давления насыщенного пара в данной точке. Парциальное давление пара пренебрежимо мало, по сравнению с воздухом, поэтому можно воспользоваться профилем температуры пара (1). Считаем водяной пар идеальным газом

$$E_p = \frac{\rho_w RT(z)}{\mu_w}. \quad (4)$$

Уравнение для стационарного распределения давления ненасыщенного водяного пара

$$\frac{\nabla E_p}{\rho_w} = \frac{1}{\rho_w} \frac{dE_p}{dz} = -g\vec{e}_z. \quad (5)$$

Решение этого уравнения с учетом (4) легко находится

$$E_p(z) = E_0 (1 - \gamma_a z)^{\frac{1}{\gamma_a} \frac{g\mu_w}{RT_0}}. \quad (6)$$

Таким образом, равновесное распределение пара с увеличением высоты будет определяться силой тяжести (поскольку воздух находится в гравитационном поле Земли) и профилем температуры. При определенных условиях вычисленная величина давления пара на некоторой высоте достигает давления насыщенного пара на этой высоте и рассматривается как точка пересечения кривых (2) и (6). Начиная с

этой точки начинается конденсация и образуется облако. Ее положение в общем случае зависит от основных параметров атмосферы (профиля температуры, температуры и влажности у поверхности).

На рис. 1 представлен пример профиля упругости насыщенного пара и распределения ненасыщенного пара для относительной влажности воздуха 50 % и температуры 27 °С вблизи подстилающей поверхности. Упругость ненасыщенного пара у поверхности при этом оказывается 1782 Па. Точка пересечения кривых (2) и (6) на графике отвечает началу конденсации пара и, следовательно, формированию облака. Аналогичные графики получаются для других параметров атмосферы. Следует отметить, что для низкой относительной влажности кривые (2) и (6) не пересекаются, и потому формирование облака невозможно.

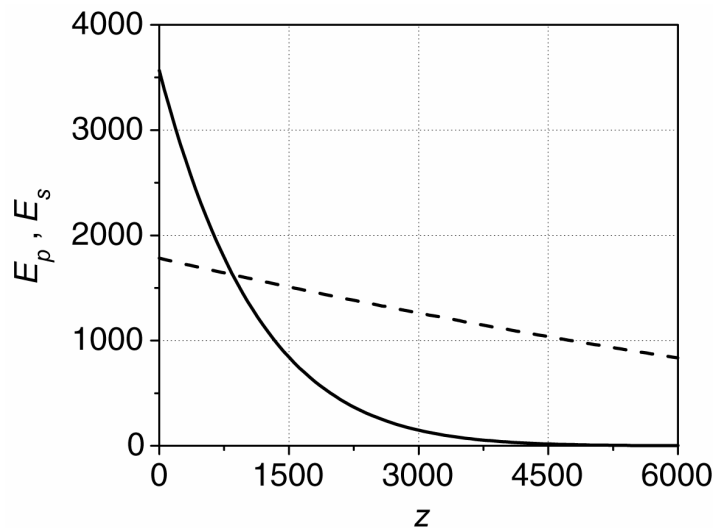


Рис. 1. Давление насыщения пара (2) в атмосфере (сплошная линия) и стационарное распределение пара согласно системе гидродинамических уравнений (3)–(6) (пунктирная линия) для относительной влажности воздуха 50% и температуры 27 °С у поверхности почвы

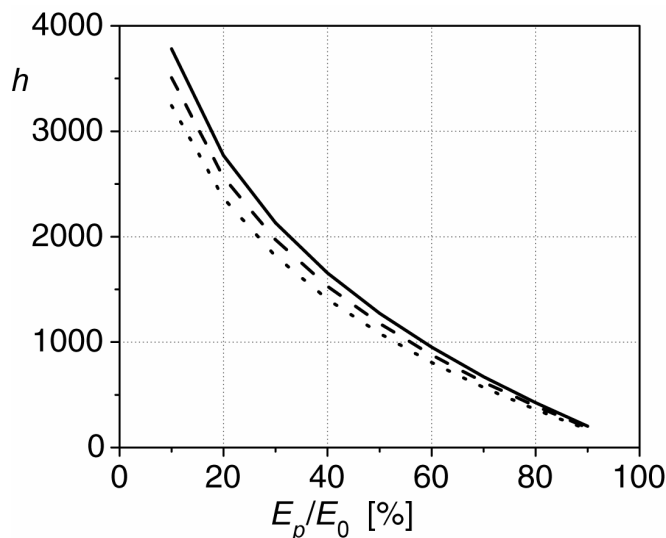


Рис. 2. Высота нижней границы облачности как функция относительной влажности пара вблизи подстилающей поверхности для различных значений температуры поверхности. На графике сплошной линией, пунктиром и точками обозначены зависимости для температур 27, 17 и 7 °С вблизи подстилающей поверхности

Высота нижней границы облачности как функция относительной влажности пара вблизи подстилающей поверхности представлена на рис. 2. Три различные кривые соответствуют различным значениям температуры подстилающей поверхности — 27, 17 и 7 °С. Из графиков видно, что с повышением температуры у поверхности высота образования облачности увеличивается.

Внутренняя структура облака

При построении модели стационарного облака достаточно ограничиться моделью смеси двух идеальных газов, однако необходимо учитывать, что процесс конденсации пара и сопутствующее выделение тепла внутри облака существенно влияют на термодинамические характеристики смеси воздух – пар. Поэтому при определении структуры облака положим, что в его толще термодинамические параметры зачастую имеют адиабатическое распределение, а если это распределение нарушается, то быстро исправляется конвекцией.

Описание двухкомпонентной системы должно содержать в качестве параметров парциальные давления, плотности компонент и температуру смеси. Обозначая давление и плотность сухого воздуха P и ρ , давление пара E , отношение плотности пара к плотности сухого воздуха q , при этом $E \ll P$ и $q \ll 1$. Температуру смеси обозначим через T . Обе компоненты системы считаем идеальными газами, уравнение состояния первой компоненты примем в виде $P = \rho RT$, а для второй компоненты с учетом ее малого парциального давления получим $q = R/R_w \cdot E/P$, где R и R_w — удельные газовые постоянные сухого воздуха и пара, соответственно. Считая выполненными условия межфазного равновесия смеси пара с жидкой и/или кристаллической фазой, примем для нее во внимание уравнение Клапейрона–Клаузиуса $dE = EL/(R_w T^2) dT$, где L — скрытая теплота конденсации или сублимации.

Адиабатические распределения термодинамических параметров по высоте вычисляются на основе термодинамических соотношений [4] для насыщенного влажного воздуха с использованием уравнения статики. Они должны использоваться в качестве основного состояния при исследовании вопросов линейной или нелинейной устойчивости гидродинамических течений в рассматриваемой системе. Так, адиабатические профили вертикального распределения температуры и плотности второй компоненты определяются в результате интегрирования системы следующих дифференциальных уравнений [4]:

$$\gamma_a = \frac{1}{T} \frac{dT}{dz} = -\frac{g}{RT} \frac{\frac{R}{C_p} + \frac{Lq}{C_p T}}{1 + \frac{L^2 q}{C_p R_w T^2}}, \quad (7)$$

$$\gamma_q = \frac{1}{q} \frac{dq}{dz} = -\frac{g}{RT} \frac{\frac{R}{R_w} \frac{L}{C_p T} - 1}{1 + \frac{L^2 q}{C_p R_w T^2}}. \quad (8)$$

Распределения давления и плотности первой газовой компоненты и давления второй компоненты определяются выражениями

$$\gamma_P = -\frac{g}{RT}, \quad \gamma_\rho = -\frac{g}{c^2}, \quad \gamma_E = \frac{L}{R_w T} \gamma_a. \quad (9)$$

Из уравнений (7) и (8), можно получить обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка для определения относительной плотности пара как функции температуры:

$$\frac{dq}{dT} = q \frac{\frac{R}{R_w} \frac{L}{C_p T} - 1}{\frac{R}{C_p} + \frac{Lq}{C_p T}}. \quad (10)$$

Численные значения параметров в уравнении (9) для влажного воздуха определяются табличными величинами и равны, соответственно, $\frac{L}{R_w T} = 16,857$, $\frac{C_p}{R} = 3,502$.

Поскольку в реальной атмосфере температура от нижней границы облака до тропопаузы понижается сравнительно незначительно, введем новые переменные ε_T , ε_q вместо температуры и влажности,

соответственно. Учитывая требование непрерывности распределения параметров на нижней границе облака, получаем

$$T = T_{\text{atm}} (1 - \varepsilon_T), \quad q = q_{\text{atm}} (1 - \varepsilon_q), \quad (11)$$

где T_{atm} и q_{atm} — температура и влажность нижней границы облака. Уравнение (10) можно тогда представить в приближенном виде

$$d\varepsilon_T = - \frac{(1 - \varepsilon_T)^2 + \frac{L}{R T_{\text{atm}}} q (1 - \varepsilon_T)}{\frac{L}{R_W T_{\text{atm}}} - \frac{C_P}{R} (1 - \varepsilon_T)} \frac{dq}{q}. \quad (12)$$

Интегрирование уравнения (12) дает

$$\frac{L}{R_W T_{\text{atm}}} - \frac{L}{R_W T_{\text{atm}}} + \frac{C_P}{R} \ln(1 - \varepsilon_T) = - \left(\ln(1 - \varepsilon_q) + \frac{L(q - q_{\text{atm}})}{R T_{\text{atm}}} \right).$$

Ограничиваясь второй степенью малой величины ε_T , запишем квадратное уравнение для определения этого параметра:

$$\varepsilon_T^2 \left(\frac{L}{R_W T_{\text{atm}}} - \frac{C_P}{2R} \right) + \varepsilon_T \left(\frac{L}{R_W T_{\text{atm}}} - \frac{C_P}{R} \right) + \left(\ln(1 - \varepsilon_q) - \frac{L q_{\text{atm}}}{R T_{\text{atm}}} \varepsilon_q \right) = 0, \quad (13)$$

решение которого, очевидно, имеет вид

$$\varepsilon_T = \frac{- \left(\frac{L}{R_W T_{\text{atm}}} - \frac{C_P}{R} \right) \pm \sqrt{\left(\frac{L}{R_W T_{\text{atm}}} - \frac{C_P}{R} \right)^2 - 4 \left(\frac{L}{R_W T_{\text{atm}}} - \frac{C_P}{2R} \right) \left(\ln(1 - \varepsilon_q) - \frac{L q_{\text{atm}}}{R T_{\text{atm}}} \varepsilon_q \right)}}{2 \left(\frac{L}{R_W T_{\text{atm}}} - \frac{C_P}{2R} \right)}. \quad (14)$$

Дальнейшее построение решения требует численного анализа и граничных значений на нижней границе облака. Примем следующие значения граничных значений параметров, считая, для простоты, что облако касается поверхности воды: $P_a = 1,013 \cdot 10^5$ Па, $\rho_a = 1,177$ кг/м³, $q_0 = 0,03$, $T_0 = 27$ °С, $E_a = 3565$ Па, что имеет место, например, для формирования тумана над поверхностью воды. Для этих значений параметров на рис. 3. приведен график зависимости температуры влажного воздуха в облаке от влажности. Аналогичные вычисления могут быть проведены для любых условий на нижней границе.

Используя вычисленное распределение температуры в облаке (12), определим распределение насыщенной влажности q в облаке с увеличением высоты. Подставляя (11) в (8) и разделяя переменные, получаем следующую зависимость

$$\int_0^{1 - \frac{q}{q_{\text{atm}}}} \left[\frac{1 + \frac{L^2 q_0}{C_P R_W T_{\text{atm}}^2} \frac{(1 - \varepsilon_q)}{(1 - \varepsilon_T)^2} \frac{(1 - \varepsilon_T)}{(1 - \varepsilon_q)}}{\frac{R}{R_W} \frac{L}{C_P T_{\text{atm}}} \frac{1}{(1 - \varepsilon_T)} - 1} \right] d\varepsilon_q = \frac{g}{R T_{\text{atm}}} \int_0^h dz.$$

Таким образом, вертикальное распределение влаги в толще облака выражается в виде квадратуры:

$$h(q) = \frac{R T_{\text{atm}}}{g} \int_0^{1 - \frac{q}{q_{\text{atm}}}} \left[\frac{1 + \frac{L^2 q_0}{C_P R_W T_{\text{atm}}^2} \frac{(1 - \varepsilon_q)}{(1 - \varepsilon_T(\varepsilon_q))^2} \frac{(1 - \varepsilon_T(\varepsilon_q))}{(1 - \varepsilon_q)}}{\frac{R}{R_W} \frac{L}{C_P T_{\text{atm}}} \frac{1}{(1 - \varepsilon_T(\varepsilon_q))} - 1} \right] d\varepsilon_q. \quad (15)$$

Здесь величина q представляет собой значение насыщенной влажности в облаке, а $h(q)$ — высота, отсчитываемая от нижней границы облака. Соответствующие графики, а также зависимость температуры смеси от высоты приведены на рис. 3 сплошной линией. В частности следует отметить, что полученные приближенные формулы (14)–(15) достаточно хорошо описывают вертикальные распределения влажности и температуры в облаке с увеличением высоты, что легко проверяется сравнением вертикальных распределений температуры и влажности с точными численными решениями уравнений (7) и (8), обозначенными на рис. 3 символом ▲.

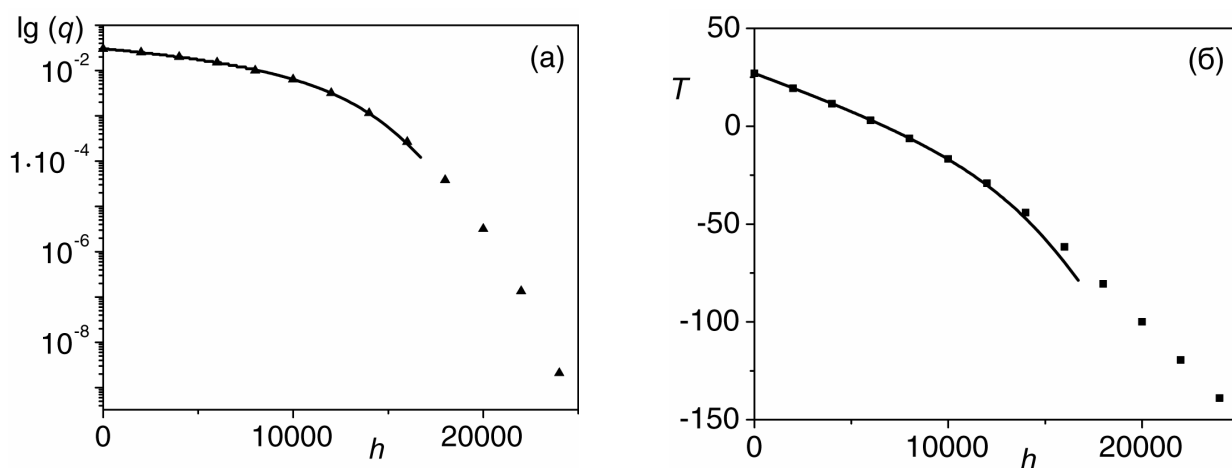


Рис. 3. Вертикальные профили (а) относительной влажности q и (б) температуры смеси T в облаке. Сплошные линии соответствуют приближенным решениям на основе (15); ▲ — численное решение точного уравнения (10)

Выводы

Таким образом, в работе построена модель определения нижней границы облачности в зависимости от основных параметров атмосферы — относительной влажности и температуры вблизи подстилающей поверхности. Рассмотрена стационарная задача о распределении парциального давления пара в адиабатическом слое воздуха и исследовано равновесное распределение влаги по высоте, к которому стремится система при наличии или отсутствии конвекции с учетом естественного понижения температуры воздуха в атмосфере с увеличением высоты. Нижняя граница облака определяется высотой, на которой давление пара достигает насыщения при данной температуре. Для определения этой высоты используются вычисленные распределения давления насыщения и фактическое распределение ненасыщенного пара.

Получено, что температурная зависимость высоты облачности выражена незначительно, это, по-видимому, связано с тем, что отличия приземной температуры воздуха на $20\text{ }^{\circ}\text{C}$ не являются значительными, поскольку относятся к абсолютной шкале температур.

Показано, что относительная влажность воздуха оказывает существенное влияние на распределение облачности в атмосфере. Это связано с тем, что в работе предполагается установившееся равновесное распределение влажности в ненасыщенной атмосфере и этот параметр сильно зависит от приземного состояния воздуха. Отметим, что на графиках явно видно понижение границы облачности с увеличением влажности воздуха, этот случай соответствует штормовым условиям в океане, особенно на низких широтах, когда появляются условия возникновения тайфунов. Как известно, эти явления обычно характеризуются очень низкой и плотной облачностью.

Кроме того, построены теоретические выражения, которые описывают распределения всех термодинамических параметров по высоте (14) и (15). Остальные термодинамические параметры (типа упругости насыщенного пара) легко определяются на основе формул (9), (14) и (15).

Литература

1. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 5. Статистическая физика // М.: Наука, 1976. 583 с.
2. *Goletsyn G.S.* An Analytical Model for Marine Planetary Boundary layer Development with Cloudiness. Surface Fluxes in Climate System (SFINCS), Riss-I-1401(EN), May, 1999.
3. *Hendersonsellers A.* A New Formula for Latent-Heat of Vaporization of Water as a Function of Temperature // Quarterly J. of the Royal Meteorological Society. 1984. V. 110. N° 466. P. 1186–1190.
4. *Rutkevich P.B.* Convective and rotational instability in moist air // Physica A. 2002. V. 315/1-2. P. 215–221.