Конвективная неустойчивость в свободной атмосфере

П.Б. Руткевич[1], П.П. Руткевич[2]

[1] *Институт космических исследований РАН,*
117997 Москва, Профсоюзная, 84/32
E-mail: peter@d902.iki.rssi.ru
[2] *Plasma sources and Applications Center, NIE*
Nanyang Technological University
1 Nanyang Walk, Singapore 637616

В работе построена теоретическая модель конвекции в свободной атмосфере. В отличие от существующих теорий, где порог конвекции в большой степени определяется размером рассматриваемой области, конвективная неустойчивость в данной модели не зависит от толщины атмосферы и определяется такими естественными параметрами, как сила тяжести, скорость звука, турбулентная вязкость и градиент температуры. Получены характерные размеры и временные характеристики конвективной неустойчивости.

Введение

Изучение конвективной устойчивости, как хорошо известно, восходит к экспериментам Бенара [1, 2], исследовавшего возникновение ячеистой конвекции в тонких слоях вязкой жидкости. Несколько позднее Рэлей [3] рассмотрел задачу об устойчивости равновесия слоя со свободными границами. Таким образом, была сформулирована теория конвекции в горизонтальном слое жидкости, описывающая порог неустойчивости и начало процесса конвекции. Систематическое изучение конвекции в областях другой формы было положено работами Г.А. Остроумова [4, 5], в которых определены условия возникновения конвекции в вертикальных круговых каналах. В настоящее время по теории конвекции существует обширная литература (см., например, [6–12]), описывающая движения в условиях не только подогрева снизу, но и подогрева сверху. Отметим, что важное предположение, используемое в теориях конвекции — малость инкремента.

Теория классической (бенаровской) конвекции используется для исследования многих прикладных задач, в том числе для описания конвективных процессов в атмосфере [13–17], однако применение этой теории конвекции для отображения таких процессов наталкивается на определенные трудности. Жидкости, используемые при лабораторном моделировании конвекции, обычно характеризуются достаточно большими значениями коэффициентов вязкости и температуропроводности, в то время как в реальной атмосфере значения диссипативных коэффициентов воздуха существенно меньше. Кроме того, конвекция в толще атмосферы обычно протекает в пространстве, вертикальные и горизонтальные размеры которого никак не фиксированы. Поэтому попытка вычисления параметров конвективной неустойчивости на основе теории лабораторной конвекции, где в качестве слоя выбрана атмосфера в целом, приводит к неестественно большим значениям числа Рэлея.

Согласно теории бенаровской конвекции, большие числа Рэлея соответствуют очень сильному подогреву снизу, система должна разбиваться на дополнительные горизонтальные слои и, в конце концов, становиться турбулентной. Действительно, в реальной атмосфере воздух сильно турбулизуется, значения его турбулентных диссипативных коэффициентов возрастают на несколько порядков по сравнению с ламинарным случаем. Число Рэлея, вычисленное для турбулентной атмосферы, значительно уменьшается, однако все равно остается существенно выше условия применимости теории бенаровской конвекции.

Таким образом, описание процессов конвективного характера в свободной атмосфере требует построения новой теоретической модели, не использующей приближение малости инкремента. Атмосферная конвекция, следовательно, должна изучаться с учетом старших производных по времени.

Определение параметров реальной атмосферной конвекции должно проводиться на основе поиска максимума инкремента как функции горизонтального волнового числа, а не минимума числа Рэлея, как это принято для бенаровской конвекции со слабым подогревом.

В настоящей работе рассмотрена задача о конвекции с сильным подогревом, соответствующая большим инкрементам. Задача о конвекции ставится для области, бесконечной в вертикальном и горизонтальном направлениях. Параметрам реально протекающего процесса такой конвекции соответствует значение максимума инкремента как функции горизонтального волнового числа.

Постановка задачи

Рассмотрим задачу о конвекции воздуха в безграничной атмосфере. Полная система уравнений, описывающих конвективную неустойчивость в таких условиях, может быть представлена следующим образом:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} - \nu\Delta\vec{v} + \frac{\nabla p}{\rho} + g\vec{e} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \quad div\,\vec{v} = 0, \tag{2}$$

$$\frac{dp}{dt} - \nu\Delta p = c^2\left(\frac{d\rho}{dt} - \nu\Delta\rho\right). \tag{3}$$

Здесь Δ — оператор Лапласа, ν — коэффициент вязкости воздуха. Коэффициент температуропроводности в (3) положен равным коэффициенту вязкости, что при исследовании движения атмосферного воздуха (больших масштабов) представляется разумным упрощением, поскольку оба эти фактора диссипации обусловливаются естественной турбулентностью атмосферы. Введем обозначения [18]:

$$\bar{\rho}u = \frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial y},\ \bar{\rho}v = \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial x},\ \bar{\rho}w = \chi, \tag{4}$$

где u, v, w – компоненты поля скорости среды, соответствующие декартовым координатам x, y, z (ось z направлена вертикально вверх). В таких обозначениях величина $\chi(x, y, z, t)$ принимает смысл вертикального потока массы газов системы. Стационарные термодинамические поля основного состояния, согласно монографии [18], обозначены чертой над соответствующим символом, а символы без черты описывают линейные поправки к соответствующим стационарным полям. Обозначим адиабатическое распределение температуры через γ_a, тогда параметр состояния теплового режима γ описывает некоторое отличие фактического профиля температуры $\gamma_т$ от адиабатического $\gamma_т = \gamma_a + \gamma$. Формирование конвекции соответствует условию $\gamma < 0$, и система уравнений принимает вид

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \nu\Delta\varphi = -p, \tag{5}$$

$$\frac{\partial\chi}{\partial t} - \nu\Delta\chi = -\left(\frac{\partial p}{\partial z} + g\rho\right), \tag{6}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\Delta_\perp\varphi - \frac{\partial\chi}{\partial z}, \tag{7}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} - \nu\Delta p = -\gamma c^2\chi + c^2\left(\frac{\partial\rho}{\partial t} - \nu\Delta\rho\right). \tag{8}$$

Введем обозначение Γ для инкремента конвективной неустойчивости, κ — для вертикального и k — горизонтального волновых чисел. Дисперсионное уравнение для конвективной неустойчивости в атмосфере принимает вид

$$\Gamma^4 + A_3 \cdot \Gamma^3 + A_2 \cdot \Gamma^3 + A_1 \cdot \Gamma + A_0 = 0\,, \qquad (9)$$

где

$$A_0 = \left[\left(\kappa^2 + k^2 + \lambda^2\right) \nu^2 \left(\kappa^2 + k^2\right)^2 + g\gamma k^2 \right] c^2,$$

$$A_1 = \left(2k^2 + 2\lambda^2 + \gamma\lambda + 2\kappa^2\right) \nu \left(\kappa^2 + k^2\right) c^2 + \nu^3 \left(\kappa^2 + k^2\right)^3,$$

$$A_2 = \left(\gamma\lambda + \frac{1}{4}\gamma^2 + k^2 + \kappa^2 + \lambda^2\right) c^2 + 3\nu^2 \left(\kappa^2 + k^2\right)^2,$$

$$A_3 = 3\nu\left(\kappa^2 + k^2\right),$$

и введено обозначение $\lambda = g/2c^2$, как параметр естественной вертикальной характеристики атмосферы. Дисперсионное уравнение (9), полученное из полной системы (5)–(8) — основное для описания процессов в вязкой среде.

Анализ дисперсионного уравнения

Интересно рассмотреть предельный переход от общего уравнения (9) к классической конвекции. Конвективная неустойчивость в случае отрицательных значений параметра γ описывается положительным корнем дисперсионного уравнения (9). Характерные размеры лаборатории можно считать (в атмосферном смысле) малыми, и таким образом инкремент обычной лабораторной конвекции получается в пределе очень малых размеров конвективного слоя, то есть в случае достаточно больших вертикальных и горизонтальных волновых чисел. В такой постановке предполагается, что само значение инкремента также достаточно мало, так, чтобы можно было не учитывать старшие степени инкремента в дисперсионном уравнении и ограничиться для его вычисления линейным слагаемым и свободным членом:

$$\Gamma = \frac{\left[\left(\kappa^2 + k^2 + \lambda^2\right) \nu^2 \left(\kappa^2 + k^2\right)^2 + g_1\gamma k^2 \right]}{\left[\left(\kappa^2 + 2\lambda^2 + \gamma\lambda + 2\kappa^2\right) \nu \left(\kappa^2 + k^2\right) + \nu^3 c^{-2} \left(\kappa^2 + k^2\right)^3 \right]}\,.$$

Легко видеть, что при устремлении параметра атмосферы λ к нулю и пренебрежении кубом вязкости в знаменателе выражение для инкремента принимает привычный для лабораторной конвекции вид:

$$\Gamma = \frac{g|\gamma| k^2 - \nu^2 \left(\kappa^2 + k^2\right)^3}{2\nu\left(\kappa^2 + k^2\right)^2}\,. \qquad (10)$$

Примечательно, что параметры κ и k в этом уравнении не могут обращаться в нуль. Другими словами, ограничение горизонтального (или вертикального) размера в лабораторной конвекции — шаг в смысле постановки задачи вынужденный.

Положительный корень Γ в уравнении (10) описывает конвективную неустойчивость только при условии достаточно малого превышения параметрами системы их порогового значения, поскольку в противном случае принятое приближение теряет смысл. Поэтому можно говорить о пороговых или критических значениях числа Рэлея и горизонтального размера ячеек лабораторной конвекции, которые получаем при решении соответствующей краевой задачи как предельный случай нулевого инкремента:

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2\right)^3 \varphi - \frac{g|\gamma| k^2}{\nu^2} \varphi = 0\,. \qquad (11)$$

Для различных постановок краевой задачи о конвекции имеем различные пороговые параметры. При этом можно говорить лишь о небольшом превышении, например, градиентом температуры соответствующего критического значения, то есть о «слабой надкритичности» конвективной неустойчивости. Поэтому на практике формула (10) применяется только для определения критического числа Рэлея. Кроме того, число Рэлея, как известно, пропорционально четвертой степени толщины конвективного слоя, что, в условиях нефиксированной толщины атмосферы, приводит к огромному произволу.

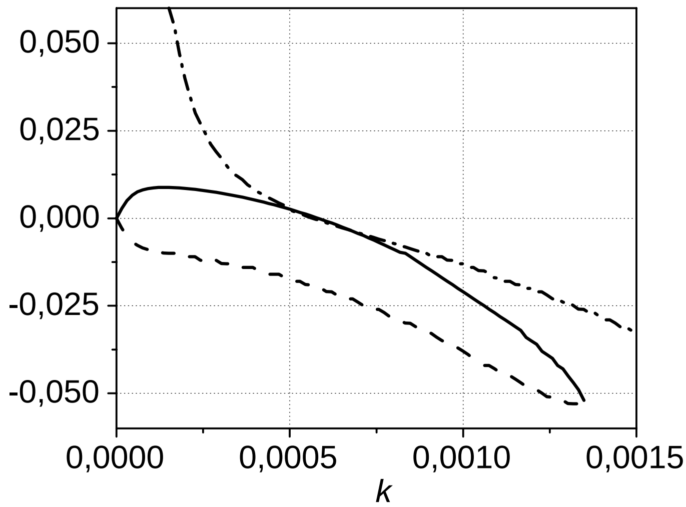
Понятно, что для немалых значений инкремента неустойчивости нужно просто использовать другой предельный случай больших размеров и малых волновых чисел. Формально этот случай будет иметь место при удержании в дисперсионном соотношении (9) трех младших членов:

$$A_2\Gamma^2 + A_1\Gamma + A_0 = 0\,. \tag{12}$$

Решение этого уравнения, для случая малых значений диссипативных коэффициентов, характерных для условий атмосферы, очевидно, имеет вид

$$\Gamma = -\gamma\left(\kappa^2 + k^2\right) + \sqrt{\frac{-g\gamma k^2}{\kappa^2 + k^2 + \lambda^2}}\,. \tag{13}$$

Здесь мы пренебрегли старшими степенями вязкости ν, и выбран знак «+» при решении квадратного уравнения. Заметим, что знак «–» перед корнем в (13) не приводит к неустойчивости (см. рисунок).



Величина инкремента как функция горизонтального волнового числа k. Сплошная и пунктирная линии соответствуют двум веткам решения квадратного уравнения (12), отвечающего конвекции в реальной атмосфере. Штрихпунктирной линией показано решение (10) линейной части уравнения (12)

В отличие от (10), эта формула может описывать конвективные слои произвольной толщины. В предельном переходе очень большой толщины слоя вклад параметра толщины исчезает (κ = 0), и его место занимает параметр λ. При этом уравнение (13) показывает связь между инкрементом и горизонтальным масштабом сформировавшихся движений. Среди возможных решений уравнения (13) в реальной системе будут развиваться движения со значением $k = k_{\max}$, соответствующие максимуму инкремента Γ. Анализ уравнения (13) на экстремум дает приближенное решение в виде

$$k_{\max} = \sqrt{\lambda}\,\sqrt[8]{\frac{g|\gamma|}{4\nu^2}}\,. \tag{14}$$

Соотношение (14) показывает, что горизонтальный размер конвективной ячейки в свободной атмосфере пропорционален $\sqrt{\lambda}$. Таким образом, классическая конвекция (10), не учитывающая эту характеристику атмосферы, может быть сформулирована только в предположении конечной в горизонтальном направлении геометрии. С другой стороны, учет параметра λ, то есть переход к реальным атмосферным условиям, позволяет установить наличие естественного горизонтального размера конвективной ячейки в свободной атмосфере (14) вне зависимости от внешних геометрических ограничений. С учетом явного выражения для параметра λ перепишем формулу (14) в терминах физических атмосферных параметров:

$$k_{\max} = \frac{1}{c}\sqrt[8]{\frac{g^5|\gamma|}{2^6\nu^2}}, \tag{15}$$

и максимум инкремента конвективной неустойчивости в свободной атмосфере принимает вид

$$\Gamma_{\max} = \sqrt{g|\gamma|}\left(1 - \frac{1}{c^2}\sqrt{\frac{\nu}{8}}\sqrt[4]{\frac{g^3}{|\gamma|}}\right). \tag{16}$$

Согласно (15), наиболее быстро будут развиваться моды с волновым числом $k_{\max}$, которое возрастает с уменьшением вязкости. Оценим характерные параметры атмосферной конвекции. Выбирая ускорение силы тяжести $g = 10$ м·с$^{-2}$, скорость звука $c = 300$ м·с$^{-1}$, модуль неустойчивого градиента температуры $\gamma = 10^{-5}$ м$^{-1}$ и коэффициент турбулентной вязкости $\nu = 100$ м^2·с$^{-1}$, получим для горизонтального размера конвективной ячейки величину порядка одного километра. Инкремент конвективной неустойчивости в атмосфере при этих параметрах, как и следовало ожидать, имеет порядок частоты внутренней волны при аналогичных значениях градиента устойчивого профиля температуры $\Gamma_{\max} = 0{,}01$ с$^{-1}$. Таким образом, формулы (15)–(16) достаточно хорошо описывают наблюдаемый процесс атмосферной конвекции. Действительно, хорошо известно, что такие наиболее заметные конвективные процессы в атмосфере, как грозовые башни, имеют ярко выраженную вытянутую в вертикальном направлении форму с горизонтальным размером порядка одного километра.

Таким образом, попытка применения теории лабораторной конвекции к неограниченной атмосфере несостоятельна. Более того, можно показать, что учет параметра атмосферы λ применительно к лабораторной конвекции также имеет ограниченную область применения. Действительно, сравнительная характеристика решений (10) и (13) приведена на рисунке. Сплошная линия, отвечающая за значения инкремента в реальной атмосфере (13), имеет максимум, физически отвечающий за формирование конвективной ячейки. Пунктирная линия, соответствующая минусу перед корнем в выражении (13), всегда отрицательна и не описывает неустойчивость в данной задаче. В то же время попытка применения бенаровской конвекции к бесконечной атмосфере (штрихпунктирная линия, полученная из (9) в линейном приближении по инкременту неустойчивости, то есть в приближении бенаровской конвекции) совпадает с настоящим решением только в окрестности $\Gamma = 0$. Таким образом, классическая конвекция в силу своей постановки описывает порог формирования конвекции, однако не применима для стационарного движения в атмосфере.

Выводы

Таким образом, в настоящей работе из полной системы гидродинамических уравнений выделены основные слагаемые, ответственные за структуру конвекции в атмосфере. Проведен анализ полученных уравнений и выведены формулы для основных параметров конвекции. Применение этих формул для оценок характерных размеров и инкремента конвективных ячеек в неограниченной среде оказывается свободным от трудностей, возникающих при попытках использования для этих целей формул теории лабораторной конвекции. Согласно формулам настоящей работы, конвективные процессы в свободной атмосфере практически не зависят от толщины конвективного слоя, в то время как построение лабораторной конвекции невозможно без этого параметра. Получено, что определяющую роль в атмосферной конвекции играют такие естественные для атмосферы факторы как скорость звука, турбулентная вязкость и градиент температуры.

Литература

1. *Benard H*. Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide // Revue generale des Sciences, pures et appliqués. 1990. V. 12. N° 1261. P. 1309.
2. *Benard H*. Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide transportant de la chaleur par convection en regime permanent // Ann, Chim. Phys. 1901 (7). V. 23. P. 62.
3. *Rayleigh*. On convection currents in a horzontal layer of fluid, whin the higher temperature is on the under side // Phil. Mag. 1916 (6). V. 32. P. 529.
4. *Остроумов Г.А*. Естественная конвективная теплопередача в замкнутых вертикальных трубах // Изв. ЕНИ при Пермск. ун-те. 1947. Т. 12. № 4. С. 113.
5. *Остроумов Г.А*. Математическая теория конвективного теплообмена в замкнутых вертикальных скважинах // Изв. ЕНИ при Пермск. ун-те. 1949. Т. 12. № 9. С. 385.
6. *Гершуни Г.З*., *Жуховицкий Е.М*. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1971. С. 320.
7. *Ландау Л.Д*., *Лифшиц Е.М*. Гидродинамика. М.: Наука, 1988. С. 99.
8. *Голицын Г.С*. Введение в динамику планетных атмосфер. Л.: Гидрометеоиздат, 1973. 104 с.
9. *Гилл А*. Динамика атмосферы и океана. М.: Мир, 1986. Т. 1. 399 с.; Т. 2. 416 с.
10. *Госсард Э*., *Хук У*. Волны в атмосфере. М.: Мир, 1978. 532 с.
11. *Лоренц Э.Н*. Природа и теория общей циркуляции атмосферы. Л.: Гидрометеоиздат, 1970. 260 с.
12. *Монин А.С*. Теоретические основы геофизической гидродинамики. Л.: Гидрометеоиздат, 1988. 424 с.
13. *Emanuel*, *Kerry A*., *Marina Zivkovic-Rothman*. Development and Evaluation of a Convection Scheme for Use in Climate Models // J. of the Atmospheric Sciences. 1999. V. 56. N° 11. P. 1766–1782.
14. *Zehnder J.A*. A Comparison of Convergence- and Surface-Flux-Based Convective Parameterizations with Applications to Tropical Cyclogenesis // J. of the Atmospheric Sciences. 2001. V. 58. N° 3. P. 283–301.
15. *Grabowski W.W*. Coupling Cloud Processes with the Large-Scale Dynamics Using the Cloud-Resolving Convection Parameterization (CRCP) // J. of the Atmospheric Sciences. 2001. V. 58. N° 9. P. 978–997.
16. *Majda A.J*., *Shefter M.G*. Waves and Instabilities for Model Tropical Convective Parameterizations // J. of the Atmospheric Sciences. 2001. V. 58. N° 8. P. 896–914.
17. *Gluhovsky A*., *Tong C*., *Agee E*. Selection of Modes in Convective Low-Order Models // J. of the Atmospheric Sciences. 2002. V. 59. N° 8. P. 1383–1393.
18. *Обухов А.М*. Турбулентность и динамика атмосферы. Л.: Гидрометеоиздат, 1988. С. 178.