

# Совместное использование техники сопряженных уравнений и вариационного усвоения спутниковых измерений в ИК-диапазоне в задаче восстановления профилей температуры и влажности атмосферы

А.А. Соколов<sup>1</sup>, А.И. Чавро<sup>1</sup>, Г.А. Хоменко<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Институт вычислительной математики РАН,  
119991 ГСП-1, Москва, Губкина, 8  
E-mail: [saa@isa.ru](mailto:saa@isa.ru), [chavro@inm.ras.ru](mailto:chavro@inm.ras.ru);*

<sup>2</sup> *Университет Опалового Берега, Лаборатория ELICO CNRS,  
LOCL-MREN, 32 авеню Фош, 62930 Вимёро, Франция  
E-mail: [khomenko@univ-littoral.fr](mailto:khomenko@univ-littoral.fr)*

## Введение

Современные ИК-радиометры позволяют измерять интенсивность излучения атмосферы и подстилающей поверхности с высокой точностью, однако, для восстановления детальных характеристик системы океан-атмосфера требуется создание и применение новых нелинейных методов.

В данной работе предлагается метод решения обратной задачи определения комплекса метеопараметров по спутниковым измерениям в ИК-диапазоне при помощи комбинации двух методов. Вначале используя решение сопряженной задачи [1, 2] рассчитывается линейный оператор, позволяющий при помощи метода статистической редукции получить оценку восстанавливаемых параметров. Затем решение уточняется при помощи вариационного метода, что позволяет учесть нелинейность задачи и уточнить решение. Исследуется чувствительность решения, полученного при помощи такого комбинированного метода к ошибкам измерительной системы.

## Решение прямой задачи

Монохроматическое излучение с частотой  $\nu$ , приходящее на спутник на высоте  $h$  под углом  $\theta$ ,  $\mu = \cos\theta$ , запишется в виде [2]:

$$\begin{aligned} I_\nu(h, \mu > 0) = & I_1 + I_2 + I_3 = \varepsilon_\nu(\mu) B_\nu(T_0) \exp\left(-\frac{1}{\mu} \int_0^h k_\nu(z'') dz''\right) + \\ & + \int_0^h \frac{k_\nu}{\mu} B_\nu(z') \exp\left(-\frac{1}{\mu} \int_{z'}^h k_\nu(z'') dz''\right) dz' + \\ & + a_\nu(\mu) \exp\left(-\frac{1}{\mu} \int_0^h k_\nu(z'') dz''\right) \times \int_{-1}^0 \mu' \int_h^0 \frac{k_\nu(z')}{\mu'} B_\nu(z') \exp\left(\frac{1}{\mu'} \int_{z'}^0 k_\nu(z'') dz''\right) dz' d\mu' \end{aligned} \quad (1)$$

где  $I_1$  - излучение поверхности,  $I_2$  - собственное излучение атмосферы,  $I_3$  - поток отраженного от поверхности излучения атмосферы;  $k_\nu(z)$  - коэффициент поглощения,  $a_\nu(\mu)$  - коэффициент отражения,  $\varepsilon_\nu(\mu')$  - излучательная способность поверхности,  $T_0$  - температура поверхности океана. Функция Планка  $B_\nu(T)$ , входящая в выражение (1) может быть записана:

$$B_\nu(T) = \frac{2\pi h_p \nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp\left(\frac{h_p \nu}{k_B T}\right) - 1}, \quad (2)$$

где  $k_B$  - постоянная Больцмана,  $h_p$  - постоянная Планка,  $c$  - скорость света в вакууме.

При получении выражения (1) ослабление излучения аэрозольными частицами и облаками в атмосфере не учитывается.

Если поверхность океана находится в термодинамическом равновесии с атмосферой, то выполняется закон Киргоффа:

$$\varepsilon_\nu(\mu) + a_\nu(\mu) = 1. \quad (3)$$

Поскольку прибор на спутнике измеряет не монохроматическое излучение в заданном направлении, а поток, и имеет некоторую спектральную характеристику  $\xi_i(\nu)$  и диаграмму направленности  $g_j(\mu)$  то сигнал, регистрируемый спутником на  $i$ -ом измерительном канале в  $j$ -м направлении может быть записан:

$$J_{ij} = \int_0^\infty d\nu \int_0^1 \xi_i(\nu) g_j(\mu) \varphi_\nu(h, \mu) d\mu, \quad (4)$$

где  $I_\nu(h, \mu)$  определяется выражением (1).

Из соотношения (2) видно, что зависимость функции Планка  $B_\nu(T)$  от температуры нелинейная. Зависимость коэффициента поглощения  $k_\nu(z)$  от температуры и концентрации поглощающих субстанций весьма сложная и, также, нелинейная (см., например, работы [2, 4]). Следовательно, зависимость  $I_\nu(h, \mu > 0)$  от температуры и влажности в (4) также будет нелинейной.

Коэффициент поглощения  $k_\nu(z)$  рассчитывался методом полинейного счета с использованием базы данных спектральных линий HITRAN [5].

Особое внимание было уделено выбору частот, на которых моделировались сигналы каналов измерения. Использовались полосы поглощения углекислого газа (CO<sub>2</sub>) и воды (H<sub>2</sub>O). Частоты выбирались так, чтобы весовые функции (см. например работы [2, 4, 6]) были информативными в диапазоне высот от 1000 мбар до 50 мбар. В начале было выбрано 60 частот. Поскольку задача некорректная, и при использовании большого количества каналов точность решения резко снижается, то было оставлено 30 наиболее информативных частот, при которых ошибка восстановления методом редукции минимальная.

## Решение обратной задачи

*Построение линейного оператора прямой задачи с использованием сопряженных уравнений.*

Данный подход был предложен впервые в работе [1], а затем опубликован в несколько модифицированном виде в работе [2].

Задача нахождения излучения на спутнике по состоянию атмосферы (прямая задача) может быть сформулирована в эквивалентном виде [1, 2]:

$$\mu \frac{d\varphi}{dz} + k_\nu \varphi = F, \quad (5)$$

$$\text{где} \begin{cases} F(z, \mu < 0) = k_\nu B_\nu(T) \\ F(z, \mu > 0) = k_\nu B_\nu(T) - \delta(z) \mu \left[ \varepsilon_\nu(\mu) B_\nu(T(z)) + a_\nu(\mu) \int_{-1}^0 d\mu' \mu' \varphi_\nu(z, \mu') \right], \end{cases} \quad (6)$$

а  $B_\nu(T)$  определяется выражением (2). Граничные условия в данном случае запишутся в виде:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_\nu(h, \mu < 0) &= 0 \\ \varphi_\nu(0, \mu > 0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Итак, мы получили задачу с нулевыми граничными условиями. Регистрируемый на спутнике сигнал (4) можно записать в виде функционала:

$$J_p(\varphi) = \int_0^h dz \int_0^\infty d\nu \int_{-1}^1 p_\nu(z, \mu) \varphi_\nu d\mu, \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} p_\nu(z, \mu) &= \tilde{g}(\mu) \xi(\nu) \delta(z - h), \\ \tilde{g}(\mu) &= \begin{cases} g(\mu), & \text{при } \mu > 0, \\ 0, & \text{при } \mu < 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (9)$$

В рассматриваемом фазовом пространстве скалярное произведение может быть определено таким образом:

$$(\varphi_\nu, p) = \int_0^h dz \int_0^\infty d\nu \int_{-1}^1 p \varphi_\nu d\mu, \quad (10)$$

поэтому  $J_p(\varphi) = (\varphi_\nu, p)$ .

Далее оказывается возможным сформулировать и решить сопряженную задачу и найти ее решение:

$$\varphi_p^*(z, \mu > 0) = \begin{cases} \frac{1}{\mu} g(\mu) \xi(\nu) e^{-\frac{1}{\mu} \int_z^h k_\nu(z') dz'} & \text{при } z < h \\ 0, & \text{при } z = h. \end{cases} \quad (11)$$

Функционал  $J_p$  может быть представлен в виде:

$$J_p = (\varphi_p^*, F). \quad (12)$$

Расписав последнее выражение, получим:

$$\begin{aligned} J_p &= \int_0^\infty d\nu \int_0^1 d\mu \left[ \int_0^h \varphi_p^*(z, \mu) k_\nu(z, \mu) B_\nu(T(z)) dz + \right. \\ &\left. + \varphi_p^*(0, \mu) \mu [\varepsilon_\nu(\mu) B_\nu(T_0) + (1 - \varepsilon_\nu(\mu)) U_\nu] \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

$$U_\nu = \int_{-1}^0 d\mu' \mu' \varphi_\nu(z, \mu'), \quad (14)$$

где  $U_\nu$  представляет собой падающий на поверхность Земли поток излучения в ИК-области спектра с верхней полусферы.

Предположим теперь, что функционал (13) соответствует стандартным характеристикам атмосферы.

Из формулы (13) следует что возмущенное состояние системы “подстилающая поверхность-атмосфера” определяется отклонениями от стандартных значений вертикальных профилей температуры  $T(z)$  и коэффициента поглощения  $k_\nu$ , а также температуры  $T_0$ , излучательной способности  $\varepsilon_\nu(\mu)$

подстилающей поверхности и падающего с верхней полусферы потока  $U_v$ . Изменением функции  $\varphi_p^*(z, \mu)$  можно пренебречь.

В функционале (13) это отразится в том, что он несколько изменит свою величину. Выпишем это изменение:

$$\begin{aligned}
 J_p + \delta J_p &= \int_0^\infty d\nu \int_0^1 d\mu \left[ \int_0^h \varphi_p^*(z, \mu)(k_v + \delta k_v) B_v(T + \delta T) dz + \right. \\
 &+ \varphi_p^*(0, \mu) \mu [(\varepsilon_v + \delta \varepsilon_v) B_v(T_0 + \delta T_0) + (1 - (\varepsilon_v + \delta \varepsilon_v))(U_v + \delta U_v)] \left. \right] = \\
 &= \int_0^\infty d\nu \int_0^1 d\mu \left[ \int_0^h \varphi_p^*(z, \mu)(k_v B_v(T) + k_v \delta B_v(T) + B_v(T) \delta k_v + \delta B_v(T) \delta k_v) dz + \right. \\
 &+ \varphi_p^*(0, \mu) \mu [\varepsilon_v B_v(T_0) + \varepsilon_v \delta B_v(T_0) + B_v(T_0) \delta \varepsilon_v + \delta \varepsilon_v \delta B_v(T_0) + \\
 &U_v + \delta U_v - \varepsilon_v U_v - \varepsilon_v \delta U_v - U_v \delta \varepsilon_v - \delta \varepsilon_v \delta U_v] \left. \right], \tag{15}
 \end{aligned}$$

где

$$\left. \begin{aligned}
 \delta B_v(T) &= B_v(T + \delta T) - B_v(T), \\
 \delta k_v(T, q) &= k_v(T + \delta T, q + \delta q) - k_v(T, q), \\
 \delta \varepsilon_v(\mu, V) &= \varepsilon_v(\mu, V + \delta V) - \varepsilon_v(\mu, V), \\
 \delta U_v(T(z), q(z)) &= U_v(T(z) + \delta T(z), q(z) + \delta q(z)) - U_v(T(z), q(z)),
 \end{aligned} \right\} \tag{16}$$

$T(z)$  и  $q(z)$  – вертикальные профили температуры и влажности соответственно.

Проведя линеаризацию функции (16) в окрестности среднего состояния атмосферы и подстилающей поверхности оказывается возможным построить линейный оператор  $A$ , связывающий вариации измеряемых сигналов с вариациями искомым характеристик системы океан-атмосфера:

$$\delta J_p \approx A(\delta T_0, \delta T, \delta q)$$

Построенный таким образом линейный оператор  $A$  может быть использован для решения обратной задачи. В случае наличия данных наблюдений искомым параметров в виде первых и вторых моментов, оператор, построенный с помощью сопряженных уравнений, позволяет решить обратную задачу методом редукции [7-9].

#### Метод редукции.

В работах [7-9] были предложены методы решения обратных задач, когда связь между известным случайным вектором  $y \in \mathfrak{N}^n$  полученным, например, в результате спутникового эксперимента с погрешностью  $\nu \in \mathfrak{N}^n$ , и вектором  $x \in \mathfrak{N}^m$ , для которого необходимо получить оценку  $\mathfrak{X}$ , задается в виде соотношения

$$y = Ax + \nu, \tag{17}$$

где  $A$  – линейный оператор.

Таким образом, в названных работах речь идет о решении класса линейных обратных задач. Решение задач в работах [7-9] сводилось к построению такого линейного оператора  $R$ , действовав которым на уравнение (17), мы получили бы наилучшую в среднеквадратичном оценку  $\mathfrak{X}$  вектора  $x$ . В случае когда  $\langle x \rangle = 0$  и  $\langle \nu \rangle = 0$ , где  $\langle \rangle$  – символ осреднения, и  $\langle x \nu^* \rangle = 0$ , где  $*$  – символ транспонирования, то есть  $x$  и  $\nu$  не коррелированы, оператор  $R$  можно найти из условия минимума соотношения для среднеквадратичной погрешности решения обратной задачи [7-9]

$$\Phi(R) = M \|(RA - I)x - Rv\|^2, \quad (18)$$

где  $M$  – символ математического ожидания. Заметим, что если оператор  $A$  известный, то оператор  $R$  который в дальнейшем в соответствии с работами [8, 9] будем называть оператором редукции, равен

$$R = FA^*Q^{-1}, \quad (19)$$

где  $Q = AFA^* + \Sigma_v$  – ковариационная матрица обобщенной ошибки вектора  $y$ , а  $F = \langle x \ x^* \rangle$  и  $\Sigma_v = \langle v v^* \rangle$  – ковариационные матрицы векторов  $x$  и  $v$ , соответственно. Таким образом, интересующая нас оценка получается из соотношения

$$\hat{x} = R \cdot y. \quad (20)$$

Среднеквадратичная априорная погрешность решения обратной задачи определяется соотношением [8-10]

$$h = \text{tr}(F - FA^*Q^{-1}AF), \quad (21)$$

которое описывает дисперсию вектора погрешности решения обратной задачи.

### *Постановка вариационной задачи.*

Одним из способов решения обратных задач, позволяющим учесть нелинейную связь между предиктором и предиктантом является вариационный метод (см., например, [10]), основанный на минимизации штрафной функции

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} \left\{ (x_a - x)^T S_a^{-1} (x_a - x) + (J_p(x) - y)^T S_m^{-1} (J_p(x) - y) \right\}, \quad (22)$$

где где  $x = (\Delta T_0, \Delta T, \Delta q)^T$ ,  $x_a$  – априорная оценка восстанавливаемых параметров,  $y_m$  – вектор измерений,  $S_a = M((x - x_a)(x - x_a)^T)$  и  $S_m = E((J_p(x) - y)(J_p(x) - y)^T)$  – ковариационные матрицы вектора измерений и ошибок измерений, а  $J_p(x)$  – модель прямой задачи (4). Первое слагаемое функционала гарантирует, что решение будет в окрестности априорной оценки  $x_a$ , а второе обеспечивает близость решения прямой задачи к измерению.

Решением обратной задачи будет то значение вектора  $x$ , которое доставляет минимум функционалу (22).

Этот минимум может быть найден, например, методом Ньютона [11] или модифицированным методом Ньютона [10].

При решении обратной задачи методом вариационного усвоения данных наблюдений важно насколько близко к истинному значению  $x$  выбрано первое приближение  $x_a$ . Обычно в качестве  $x_a$  берут среднее значение  $x$ . Однако среднее значение для некоторых реализаций может находиться далеко от истинного значения. В связи с этим предлагается вначале решить линейную задачу методом редукции с линейным оператором, полученным с использованием сопряженных уравнений, а затем это решение взять в качестве первого приближения, с пересчетом матриц  $S_a$  и  $S_m$ .

### *Статистические данные*

Статистические данные, необходимые для вычисления средних и ковариационных матриц, были взяты из работы [12]. Ансамбль из 6000 мгновенных профилей температуры и влажности и температур поверхности над океаном в средних и экваториальных широтах был разделен на два ансамбля по 3000 векторов – калибровочный и верификационный. По одному ансамблю вычислялись матрицы и средние значения, выбирались информативные частоты, а на другом ансамбле проводилась проверка метода.

Полный вектор  $x$ , размерности 23, содержал температуру поверхности, профиль температуры на 11 уровнях и профиль абсолютной влажности той же размерности. Полный вектор был нормирован так, чтобы

его компоненты имели приблизительно равную дисперсию. В качестве вектора измерений  $J_p$  был взят вектор, компоненты которого определялись моделью прямой задачи (4), моделирующий спутниковый прибор AIRS. Компоненты вектора  $J_p$  случайным образом возмущены для моделирования ошибки прибора. Измерения моделировались при различных частотах и  $\mu = 1$ . Скорость ветра в численных экспериментах была фиксирована и равнялась 10 м/с.

### Результаты решения обратной задачи

Для проверки изложенных выше методов был проведен ряд численных экспериментов. При типичных для современных измерительных систем ошибках измерения  $\sim 0.2$  К метод редукции с оператором, построенным при помощи теории сопряженных уравнений, позволил восстановить вертикальный профиль температуры атмосферы с точностью 1,5 градуса, температуру поверхности океана с точностью 0,8 градуса, а содержание водяного пара с точностью до 1 г/кг.

Применение вариационного метода для уточнения результатов, полученных линейным методом, позволило повысить точность восстановления профиля температуры до 1.2 К, температуры поверхности до 0.3 К, а точность восстановления удельной влажности до 0.9 г/кг.

Поскольку реальная измерительная аппаратура, проводит измерения с ошибками, представляет интерес исследовать, как ошибки аппаратуры будут влиять на погрешность используемых методов. Результаты численных экспериментов представлены на рисунках 1-3. Некоторые результаты приведены также в работах [13, 14].

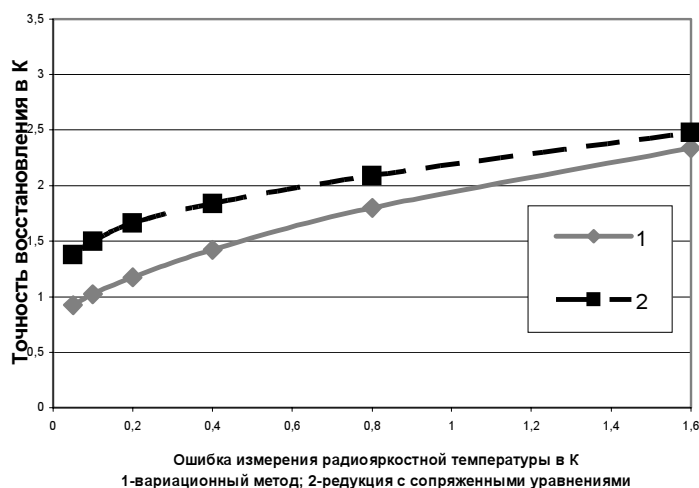


Рис. 1. Точность определения профиля температуры атмосферы  $T(z)$

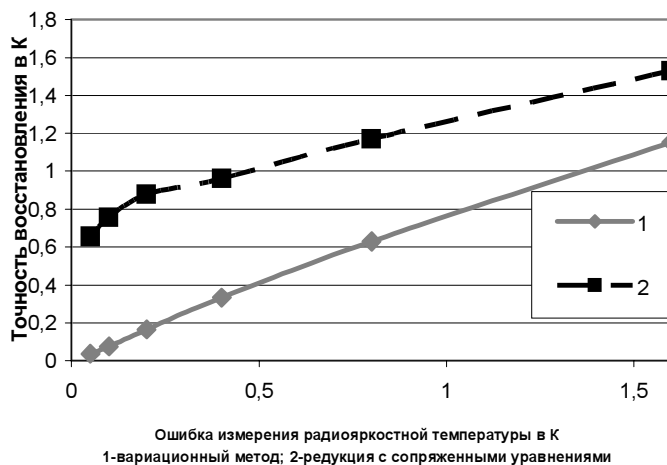


Рис. 2. Точность определения температуры водной поверхности  $T_0$

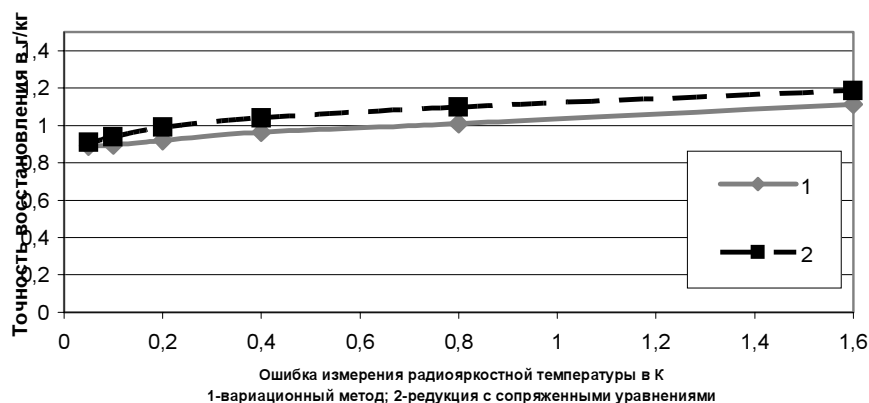


Рис. 3. Точность восстановления профиля влажности атмосферы  $q(z)$

Видно, что использование вариационного метода с начальным приближением, полученным методом редукции, позволяет повысить точность восстановления температуры поверхности и профиля температуры атмосферы на 0.5 К, а профиля влажности атмосферы на 1 г/кг по сравнению с линейной оценкой методом редукции.

### Заключение

Применение вариационного метода усвоения спутниковой информации для решения обратной задачи восстановления профиля температуры атмосферы и температуры поверхности океана, когда в качестве нулевого приближения используется решение линейной задачи с минимальной среднеквадратичной погрешностью с использованием техники сопряженных уравнений позволяет значительно повысить точность восстановления температуры атмосферы и поверхности, а также влажности атмосферы, по сравнению с линейным методом.

Настоящая работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (проект 04-05-64919).

### Литература

1. Марчук Г.И. Уравнение для ценности информации с метеорологических спутников и постановка обратных задач // Космические исследования, 1964. Вып. 3. С.462-477.
2. Marchuk G.I., Chavro A.I. On the statement and solution of inverse problems in satellite meteorology // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling., 1998. Vol.13. No.6. P.501-515.
3. Liou K. N. An Introduction to Atmospheric Radiation. Second Edition // International Geophysics Series, 2002. Vol. 84. 583 p.
4. Тимофеев Ю.М., Васильев А.В. Теоретические основы атмосферной оптики // СПб.: Наука, 2003. 474 с.
5. Rothman L.S. et al. The HITRAN molecular spectroscopic database: edition of 2000 including updates through 2001 // Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer, 2003. №82. P.5-44.
6. W. L. Smith, H. M. Woolf, C. M. Hayden, D. Q. Wark, L. M. McMillin. The TIROS-N Operational Vertical Sounder // Bulletin American Meteorological Society, No.58. October 1979.
7. Успенский А. Б. Обратные задачи математической физики – анализ и планирование экспериментов и математические методы планирования эксперимента // Новосибирск: Наука, 1981. С.199-242.
8. Пытьев Ю. П. Математические методы интерпретации эксперимента. // М.: Высшая школа, 1989. 352с.
9. Пытьев Ю. П. Методы анализа и интерпретации эксперимента // М: Изд-во МГУ, 1990. 288с.
10. А. И. Чавро, В. П. Дымников. Методы математической статистики в задачах физики Атмосферы. Курс лекций // М.: ИВМ РАН, 2000. 210 с.
11. Rodgers C.D. Retrieval of atmospheric temperature and composition from remote measurements of thermal radiation // Rev. Geophys. Space Phys., 1976. 14. P. 609-624.

12. *F. Chevallier* Sampled database of 60-level atmospheric profiles from the ECMWF analyses. //EUMETSAT/ECMWF, SAF programme. Research Report No. 4, 2001.
13. *Соколов А.А.* Сравнение методов решения обратной задачи восстановления характеристик атмосферы по спутниковым измерениям в ИК-диапазоне // Труды международной конференции по измерениям, моделированию и информационным системам для изучения окружающей среды: ENVIROMIS-2004, 17-25 июля 2004. Томск. Россия. С.50.
14. *Чавро А.И., Уваров Н.В., Соколов А.А.* Вариационные методы усвоения спутниковой информации с целью определения метеорологических параметров // География и природные ресурсы. Новосибирск, СО РАН, Специальный выпуск “Труды международной конференции по измерениям, моделированию и информационным системам для изучения окружающей среды: Enviromis 2004”, 2004. С.58-64.