Нелинейная динамика и хаос. Вводный курс.

Литература:

- Г.М.Заславский, Р.З.Сагдеев, «Введение в нелинейную физику», Москва «Наука», 1988.
- Г.Шустер, «Детерминированный хаос. Введение», Москва Мир, 1988.
- М.Табор, «Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике», Москва УРСС, 2001.
- В.И.Арнольд, В.В.Козлов, А.И.Нейштадт, «Математические аспекты классической и небесной механики», Москва УРСС, 2002.
- Г.М.Заславский, «Физика хаоса в гамильтоновых системах», Москва-Ижевск, 2004.
- S.H.Strogatz, “Nonlinear Dynamics and Chaos”, Perseus books, 1994.

Лекция 1.

1. Основные понятия
2. Характеристики динамического хаоса
3. Примеры

1. Динамическая система, фазовое пространство, фазовая траектория.

Динамическая система:

- фазовое пространство *M*, элементы которого представляют собой возможные состояния системы
- время – непрерывное или дискретное
- закон эволюции системы φ_t – правило, позволяющее определять все будущие (для обратимых систем и все прошлые) состояния системы по состоянию в заданный момент времени.

$$\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$$

Если *M* – область евклидового пространства, а *t* - непрерывно меняющийся параметр, эволюцию можно задать с помощью системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

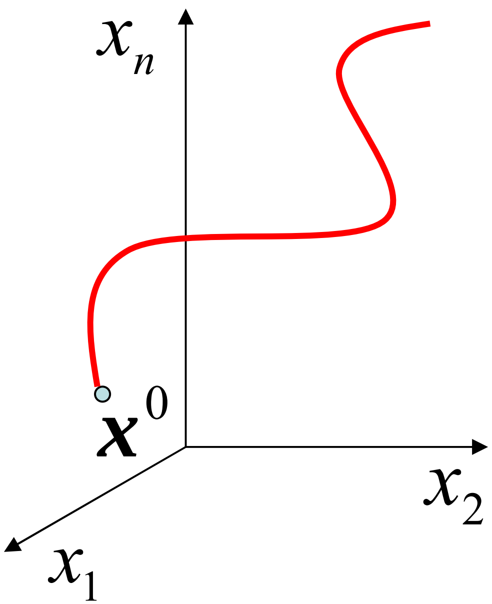
$x_1, x_2, \ldots, x_n$ - определяют состояние некоторой системы в каждый момент времени. Изменение состояния системы с течением времени может быть описано системой ОДУ:

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, \ldots, x_n)$$

$$\ldots\ldots$$

$$\dot{x}_n = f_n(x_1, \ldots, x_n)$$

$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ - *фазовое пространство*



Пусть при $t = 0$ $\quad x_1 = x_1^{\,0}, \ldots, x_n = x_n^{\,0}$

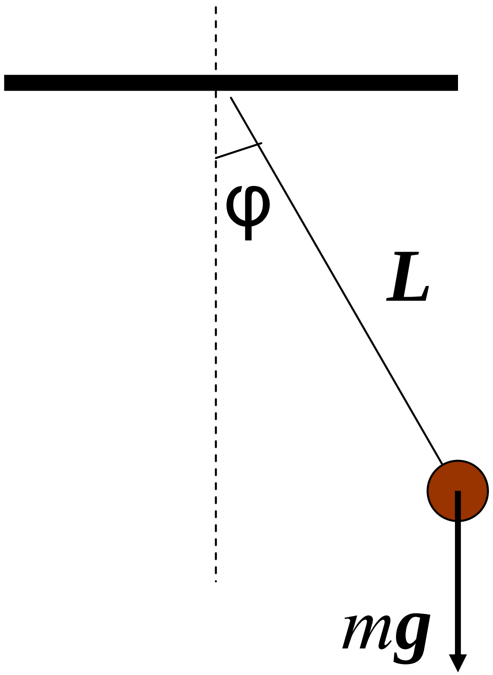
Решение системы с таким начальным условием может быть представлено в виде кривой в фазовом пространстве, проходящей через точку $\boldsymbol{x}^0$.

Эта кривая называется *фазовой траекторией*.

Будем использовать обозначение $\varphi_t \boldsymbol{x}^0$ для образа точки $\boldsymbol{x}^0$ по прошествии времени $\boldsymbol{t}$:

$$\varphi_t \boldsymbol{x}^0 = x(x^0, t)$$

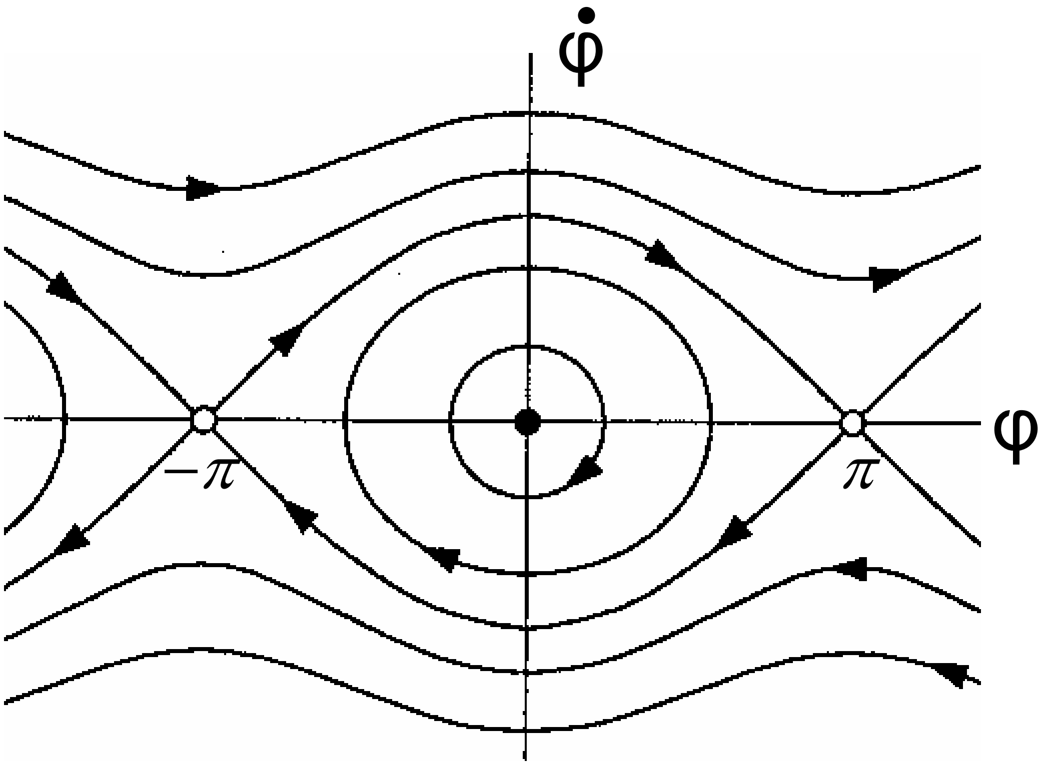
Пример. Нелинейный маятник.



$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{L}\sin\varphi = 0$$

$$x_1 = \varphi, \quad x_2 = \dot{\varphi} = \dot{x}_1$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{g}{L}\sin x_1 \end{cases}$$



Теория ОДУ – по начальным условиям можно построить единственное решение ⟹ детерминизм.

Пьер-Симон Лаплас (1812):

Мы можем рассматривать настоящее состояние Вселенной как следствие его прошлого и причину его будущего. Разум, которому в каждый определенный момент времени были бы известны все силы, приводящие природу в движение и положение всех тел, из которых она состоит, будь он также достаточно обширен, чтобы подвергнуть эти данные анализу, смог бы объять единым законом движение величайших тел Вселенной и мельчайшего атома; для такого разума ничего не было бы неясного и будущее существовало бы в его глазах точно так же, как прошлое.

Анри Пуанкаре (1908):

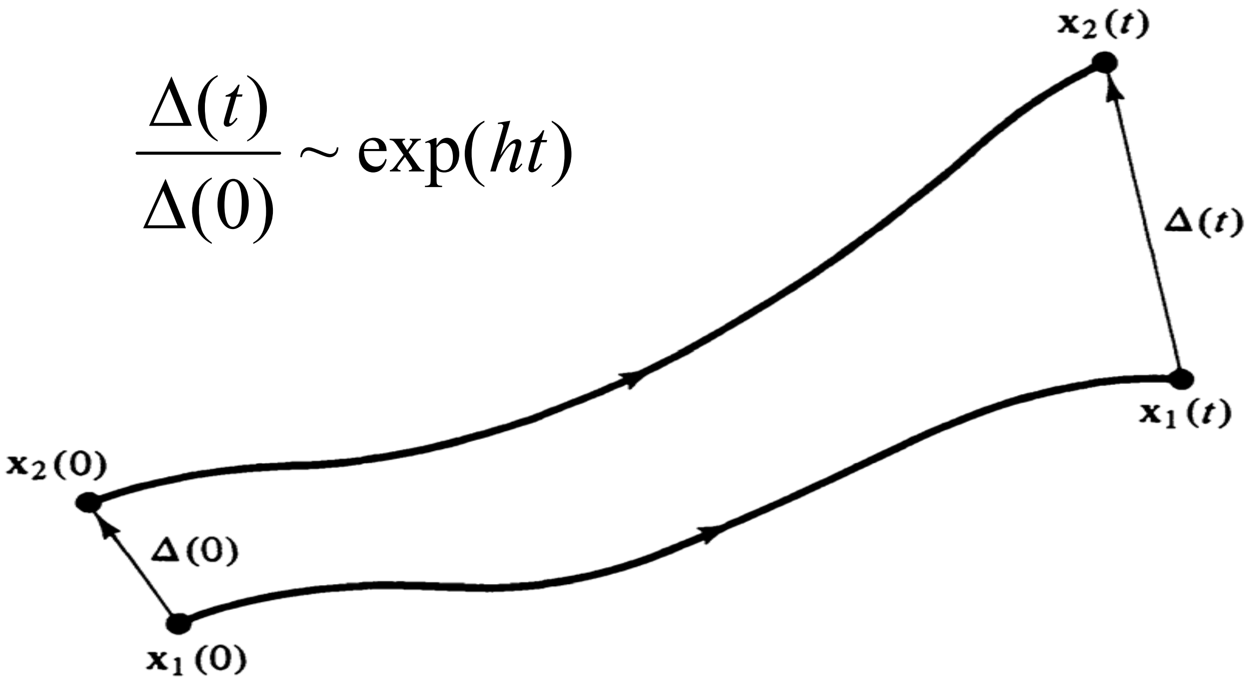
Если бы мы знали точно законы природы и состояние Вселенной в начальный момент, то мы могли бы точно предсказать состояние Вселенной в любой последующий момент. Но даже и в том случае, если бы законы природы не представляли собой никакой тайны, мы могли бы знать первоначальное состояние только приближенно. Если это нам позволяет предвидеть дальнейшее ее состояние с тем же приближением, то это все, что нам нужно ... Но дело не всегда обстоит так; иногда небольшая разница в первоначальном состоянии вызывает большое различие в окончательном явлении. Небольшая погрешность в первом вызвала бы огромную ошибку в последнем. Предсказание становится невозможным, мы имеем перед собой явление случайное.

2. Характеристики динамического хаоса

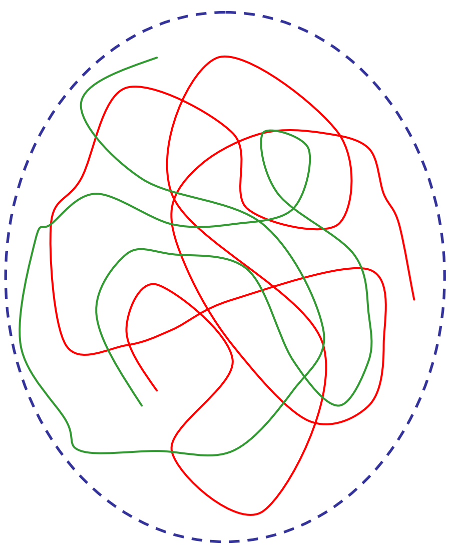
2.1 *Экспоненциальное разбегание фазовых траекторий*

Рассмотрим две фазовых точки, расстояние между которыми в начальный момент времени Δ(0) мало. В момент времени t оно равно Δ(t):

$$\frac{\Delta(t)}{\Delta(0)} \sim \exp(ht)$$



В ограниченном фазовом объеме экспоненциальное разбегание приводит к «запутыванию» траекторий.



2.2 *Непредсказуемость*

Предположим, что точность определения начальных условий $\Delta \ll 1$, т.е. две фазовые точки, расстояние между которыми равно или меньше Δ, мы различить не можем. Пусть вся эволюция происходит в конечной области фазового пространства с характерным размером R ~ 1. За время

$$T_1 \sim \frac{1}{h} \ln \frac{R}{\Delta}$$

траектории разойдутся на расстояние порядка размера системы, т.е. предсказать уже ничего нельзя. Чтобы увеличить время прогноза вдвое, нужна точность

$$\Delta_2 \sim \exp(-2hT_1) \sim \Delta^2$$

Т.е. точность должна вырасти экспоненциально.

2.3 *Эргодичность*

(M,μ,φ_t) – динамическая система, μ *–мера,* $\mu(M)=1$.
Временным средним функции f на M называется величина (зависящая, вообще говоря, от начального условия x_0):

$$\overline{f}(x_0)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(\varphi_t x_0)dt$$

Пространственное среднее:

$$\langle f\rangle=\int_M f(x)d\mu$$

Система называется *эргодичной*, если $\overline{f}(x)=\langle f\rangle$ почти для всех x.

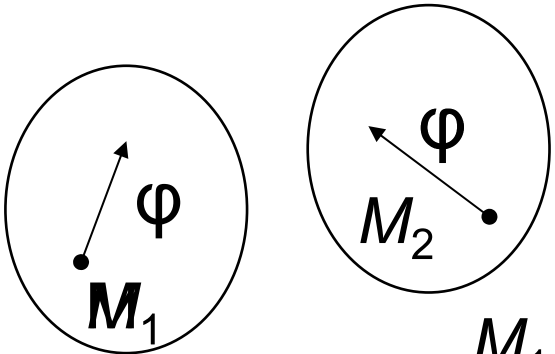
(Временное среднее не зависит от начальной точки.)

Если система эргодична на M, то относительное время, которое фазовая траектория проводит в некотором подмножестве $\Delta \subset M$, равно мере этого подмножества.

Действительно, достаточно рассмотреть

$$f(x) = \chi(\Delta) = \begin{cases} 1, & x \in \Delta \\ 0, & x \notin \Delta \end{cases}$$

Пример. Разложимая система:



$$M = M_1 \bigcup M_2, \quad M_1 \bigcap M_2 = \varnothing,$$

$$\mu(M_1) > 0, \quad \mu(M_2) > 0$$

M_1, M_2 – инвариантны: $\varphi(M_1) = M_1$, $\varphi(M_2) = M_2$.

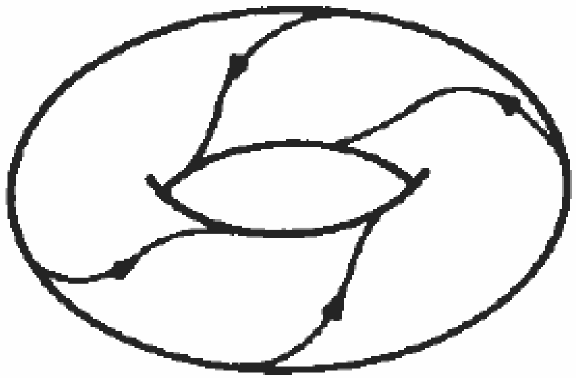
Такая система не эргодична: рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1, & при \quad x \in M_1 \\ 0, & при \quad x \in M_2 \end{cases}$$

Её временное среднее зависит от x.

Верно и обратное: если система не эргодична, она разложима. Эргодичность $\Longleftrightarrow$ неразложимость, т.е. все инвариантные измеримые множества имеют меру 1 или 0.

Пример. Движение на торе.



$$\theta_1(t) = \theta_1^{\ 0} + \omega_1 t, \quad \theta_2(t) = \theta_2^{\ 0} + \omega_2 t$$

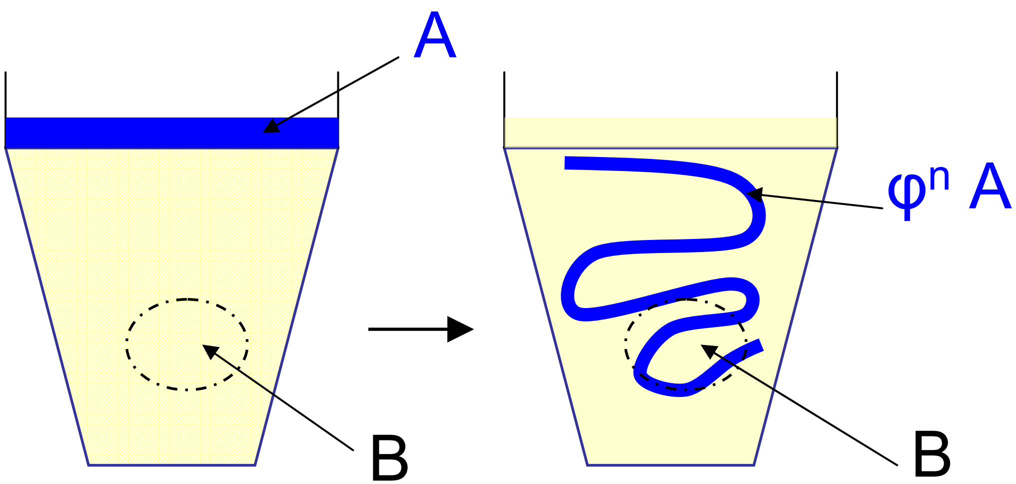
1) $\alpha = \omega_1 / \omega_2 = \dfrac{p}{q}$ - рациональное

Траектория замкнута, следовательно, система не эргодична.

2) $\alpha = \omega_1 / \omega_2$ -иррациональное число. Траектория заполняет тор всюду плотно. Можно доказать, что в этом случае система эргодична.

Но никакой непредсказуемости в этом случае нет.

2.4 *Перемешивание*



Приготовление коктейля: 10% синего, 90% жёлтого. Доля синего в произвольном объеме B шейкера после n встряхиваний φ равна:

$$\frac{\mu(\varphi^n A \bigcap B)}{\mu(B)}$$

После достаточно большого числа встряхиваний (n→∞) эта доля близка к 10%, т.е. к $\mu(A)$.

Динамическая система обладает свойством перемешивания, если для любых измеримых A и B

$$\lim_{t\to\infty} \mu(\varphi_t A \bigcap B) = \mu(A)\cdot\mu(B)$$

Динамическая система с перемешиванием эргодична.

Возьмем инвариантное и измеримое A (φ_t A = A). Пусть B=M \ A.

$$\varphi_t A \bigcap B = A \bigcap B = \varnothing$$

$$\Rightarrow \mu(A) \cdot \mu(B) = 0 \Rightarrow \mu(A) = 0 \quad \text{\textit{или}} \quad 1$$

Следовательно, система эргодична. Обратное неверно: например, движение на торе с иррациональным α эргодично, но не перемешивает.

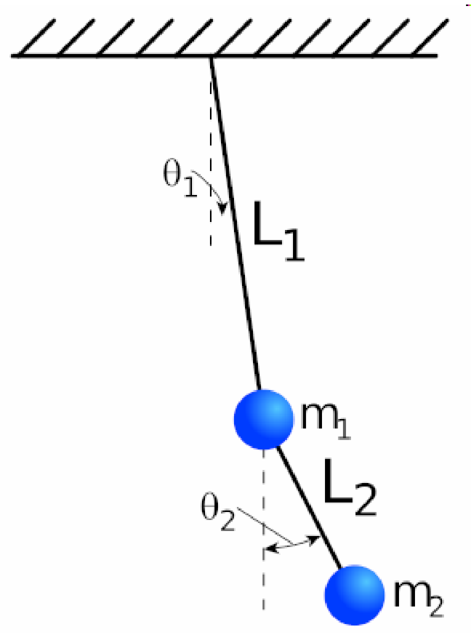
3. Примеры

3.1 Двойной маятник

$$L = \frac{1}{6}m\ell^2\left[\dot\theta_2^2 + 4\dot\theta_1^2 + 3\dot\theta_1\dot\theta_2\cos(\theta_1 - \theta_2)\right] + \frac{1}{2}mg\ell\left(3\cos\theta_1 + \cos\theta_2\right).$$

$$p_{\theta_1} = \frac{\partial L}{\partial\dot\theta_1} = \frac{1}{6}m\ell^2\left[8\dot\theta_1 + 3\dot\theta_2\cos(\theta_1 - \theta_2)\right]$$

$$p_{\theta_2} = \frac{\partial L}{\partial\dot\theta_2} = \frac{1}{6}m\ell^2\left[2\dot\theta_2 + 3\dot\theta_1\cos(\theta_1 - \theta_2)\right].$$



$$\dot\theta_1 = \frac{6}{m\ell^2}\frac{2p_{\theta_1} - 3\cos(\theta_1 - \theta_2)p_{\theta_2}}{16 - 9\cos^2(\theta_1 - \theta_2)}$$

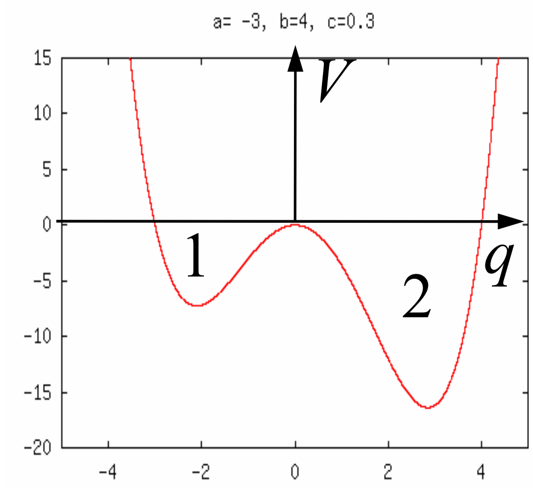
$$\dot\theta_2 = \frac{6}{m\ell^2}\frac{8p_{\theta_2} - 3\cos(\theta_1 - \theta_2)p_{\theta_1}}{16 - 9\cos^2(\theta_1 - \theta_2)}.$$

$$\dot p_{\theta_1} = \frac{\partial L}{\partial\theta_1} = -\frac{1}{2}m\ell^2\left[\dot\theta_1\dot\theta_2\sin(\theta_1 - \theta_2) + 3\frac{g}{\ell}\sin\theta_1\right]$$

$$\dot p_{\theta_2} = \frac{\partial L}{\partial\theta_2} = -\frac{1}{2}m\ell^2\left[-\dot\theta_1\dot\theta_2\sin(\theta_1 - \theta_2) + \frac{g}{\ell}\sin\theta_2\right].$$

3.2 Движение в двойной потенциальной яме при малом трении.

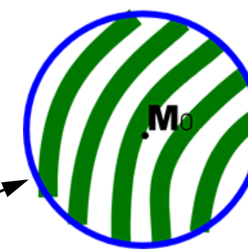
(В.И.Арнольд, 1963)



$+$ **малое трение** $\varepsilon f(q,\dot q)$

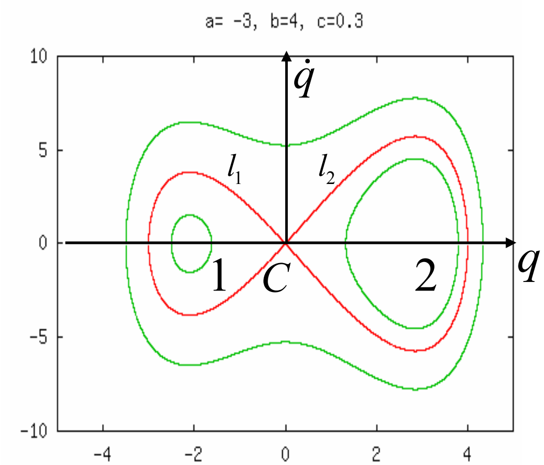
$$\ddot q + \frac{\partial V(q)}{\partial q} = -\varepsilon f(q,\dot q)$$

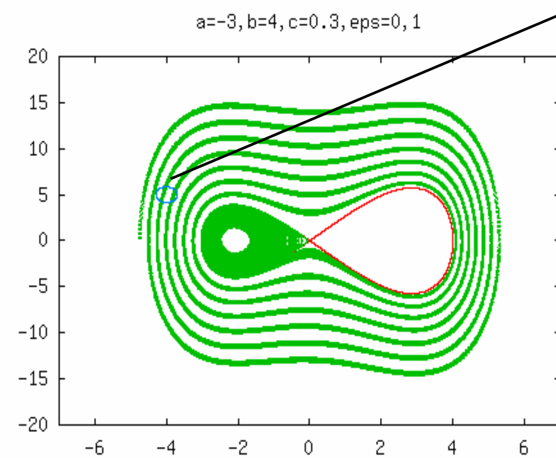
Фазовые портреты:



при $\varepsilon = 0$

при $\varepsilon \neq 0$





$$U^{\delta} = U_1^{\delta,\varepsilon} \cup U_2^{\delta,\varepsilon} \cup v$$

$\downarrow$ (1) $\qquad \downarrow$ (2)

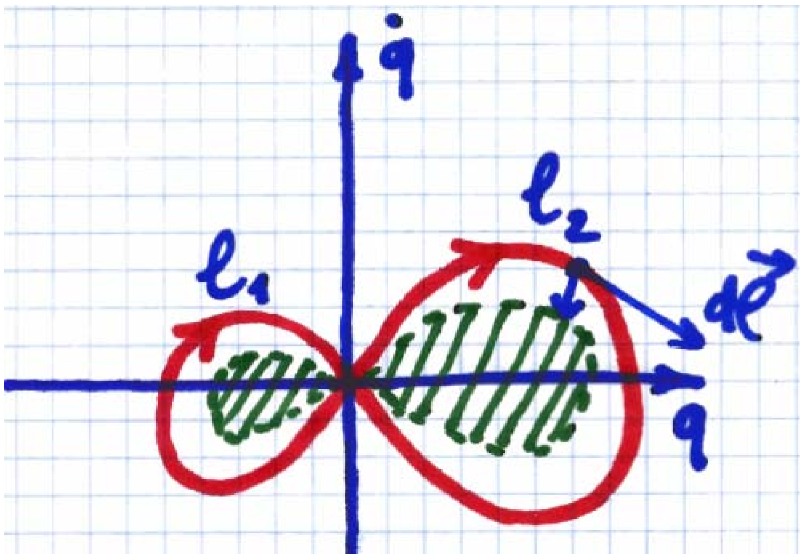
Определение. Вероятность захвата точки M_0 в яму «1» есть

$$P_1(M_0) = \lim_{\delta \to 0} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\mathrm{mes}\, U_1^{\delta,\varepsilon}}{\mathrm{mes}\, U^{\delta}}$$

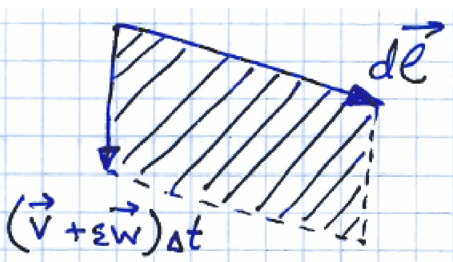
Теорема. (В.И.Арнольд)

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\oint_{l_1} \boldsymbol{f}\, \mathrm{d}\boldsymbol{q}}{\oint_{l_2} \boldsymbol{f}\, \mathrm{d}\boldsymbol{q}}, \quad P_1 + P_2 = 1$$

«Доказательство»



Рассмотрим все точки внутри сепаратрисы в какой-то момент времени. За малый интервал времени Δt они «опустятся» вглубь ям и займут заштрихованные области. В пояски вокруг этих областей войдут новые точки. Поэтому отношение вероятностей = отношению площадей поясков.



$$\Delta S = (\vec v + \varepsilon \vec w)\Delta t \times d\vec\ell = \varepsilon \Delta t (\vec w \times d\vec\ell)$$

$$(d\vec\ell \parallel \vec v)$$

$$\begin{cases} \dot q = p \\ \dot p = -\dfrac{\partial V}{\partial q} - \varepsilon f \end{cases}$$

$$\vec v = \left(\dot q, -\frac{\partial V}{\partial q}\right)$$

$$\vec w = (0, f)$$

$$\frac{P_1(M_0)}{P_2(M_0)} = \frac{\oint_{\ell_1} \vec w \times d\vec\ell}{\oint_{\ell_2} \vec w \times d\vec\ell} = \frac{\oint_{\ell_1} \vec w \times \vec v \, dt}{\oint_{\ell_2} \vec w \times \vec v \, dt} =$$

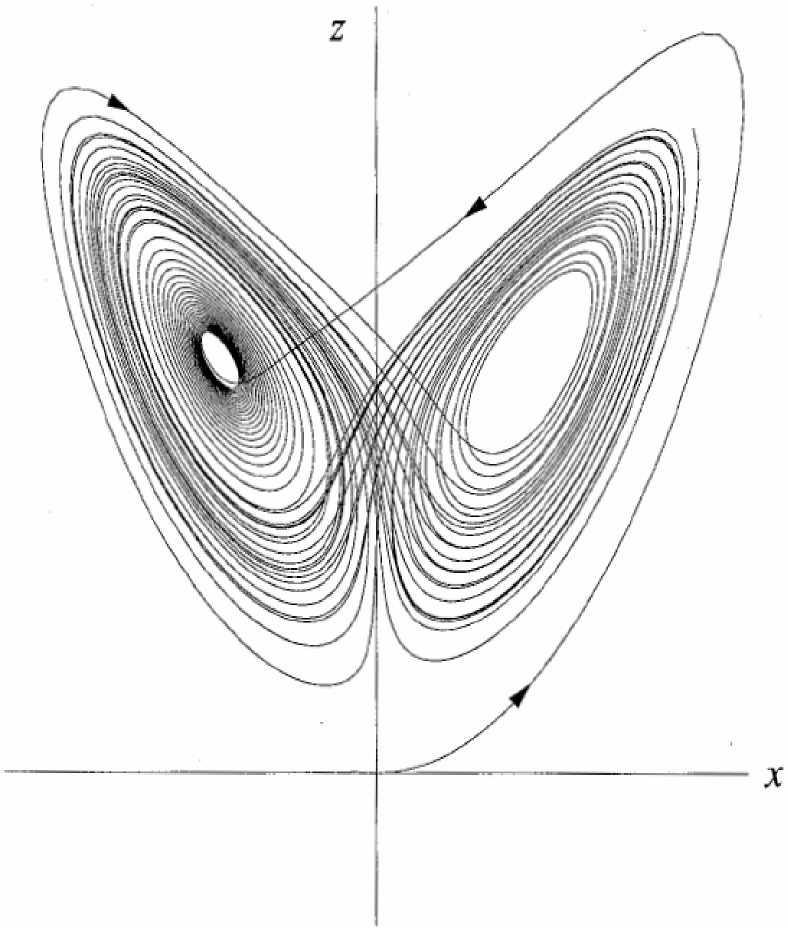
$$= \frac{\oint_{\ell_1} f \dot q \, dt}{\oint_{\ell_2} f \dot q \, dt} = \frac{\oint_{\ell_1} f \, dq}{\oint_{\ell_2} f \, dq}$$

3.3 Аттрактор Лоренца (E. Lorenz, 1963).

$$\frac{dx}{dt} = \sigma(y - x)$$

$$\frac{dy}{dt} = x(\rho - z) - y$$

$$\frac{dz}{dt} = xy - \beta z$$

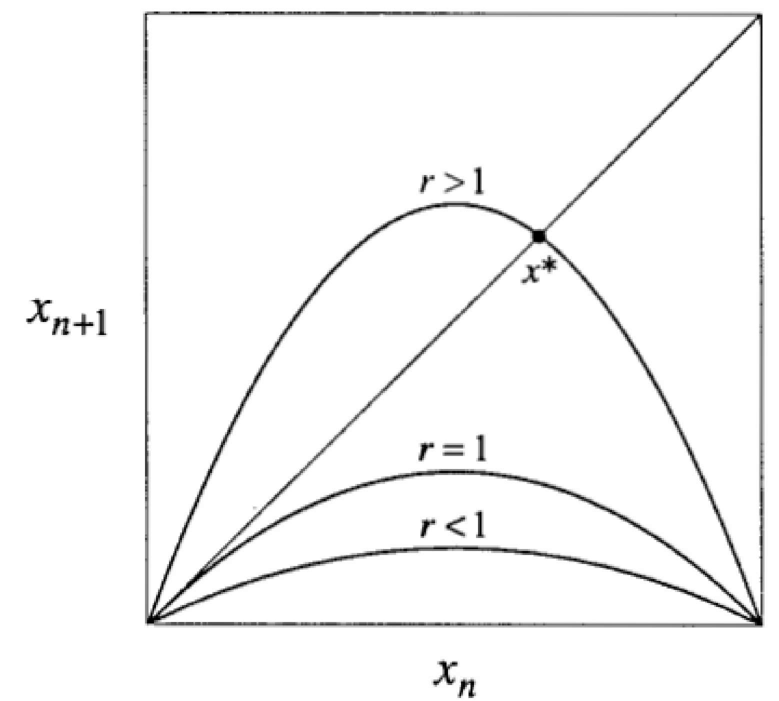


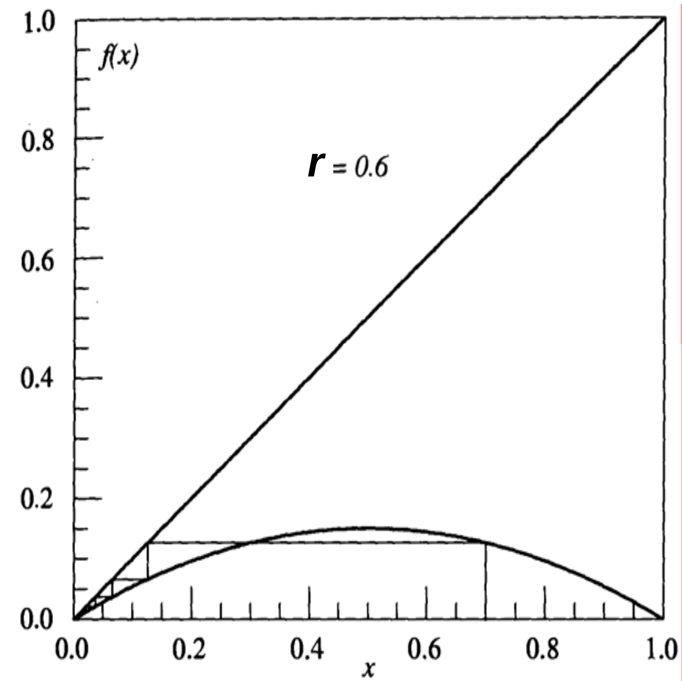
Система диссипативная: фазовый объем сжимается со скоростью σ+β+1. Зафиксируем σ=10, β=8/3. При ρ > 24.06 возникает «странный аттрактор» с хаотическим движением.

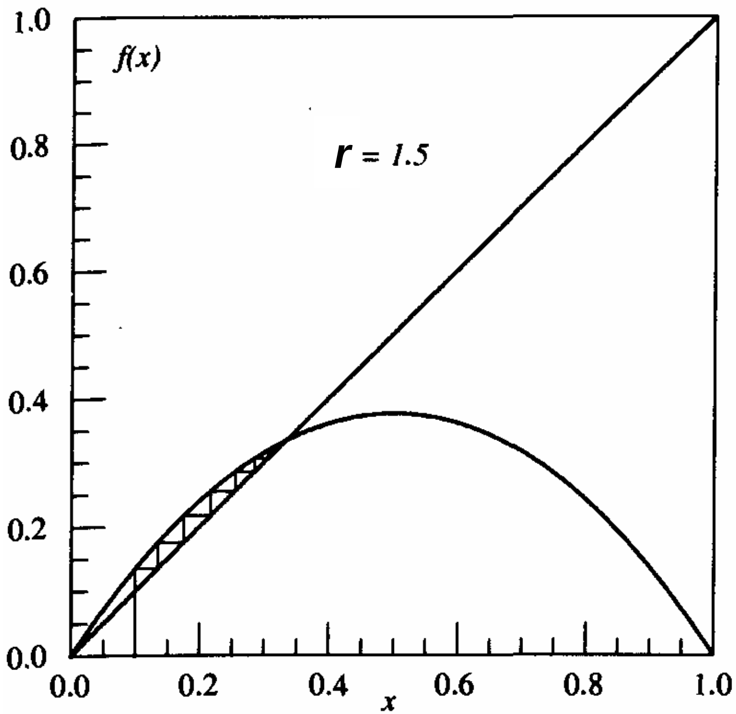
http://www.cmp.caltech.edu/~mcc/chaos_new/Lorenz.html

3.4 Логистическое отображение

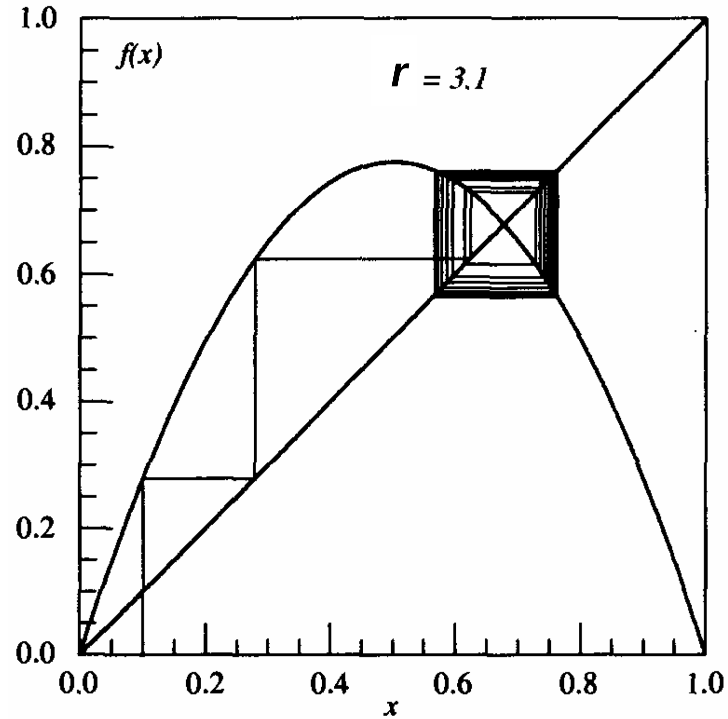
$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n), \quad 0 \le x_n \le 1, \quad 0 \le r \le 4$$



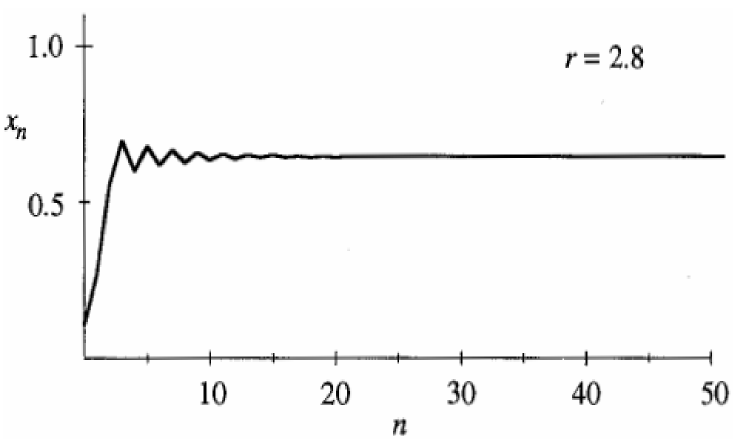




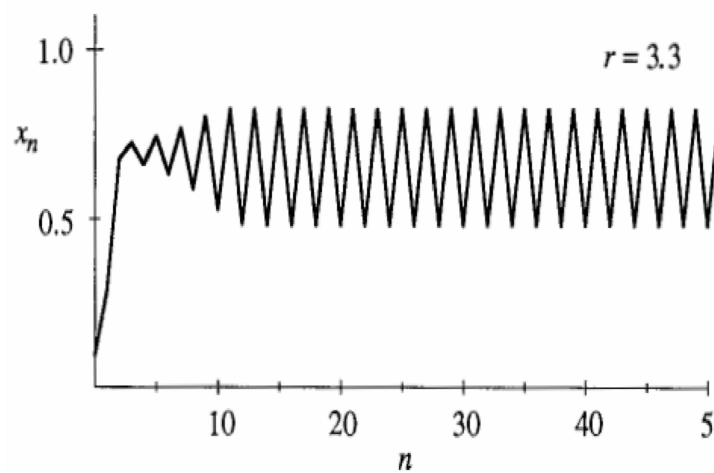
f(x)
r = 1.5
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
x



f(x)
r = 3.1
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
x



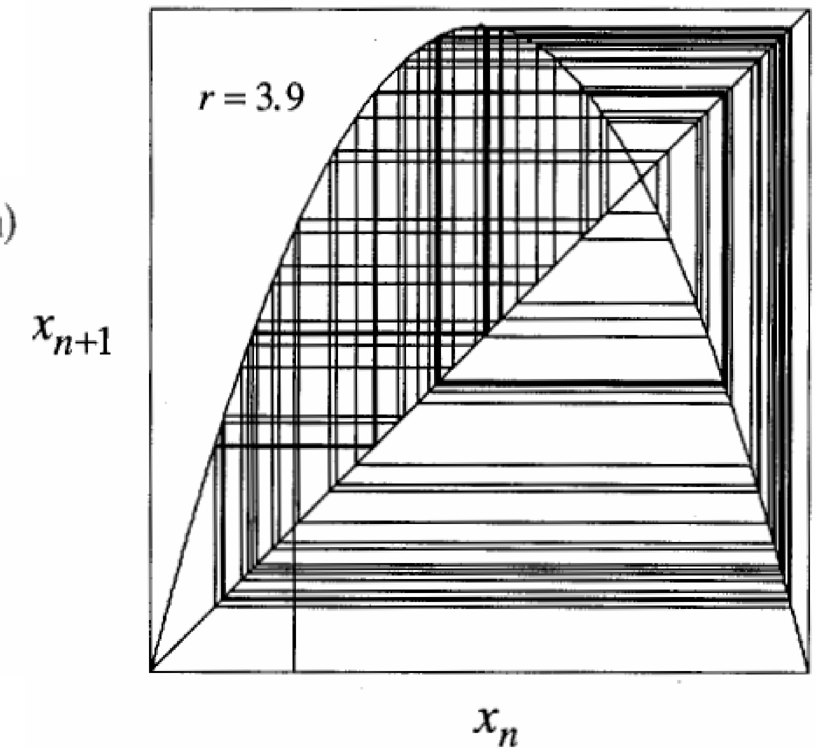
r = 2.8
1.0
x_n
0.5
10
20
30
40
50
n



r = 3.3
1.0
x_n
0.5
10
20
30
40
50
n

Каскад бифуркаций удвоения периода предельных циклов:

$r_1 = 3$	(period 2 is born)
$r_2 = 3.449...$	4
$r_3 = 3.54409...$	8
$r_4 = 3.5644...$	16
$r_5 = 3.568759...$	32
$\vdots$	$\vdots$
$r_\infty = 3.569946...$	∞



Что происходит при $r > r_\infty$?