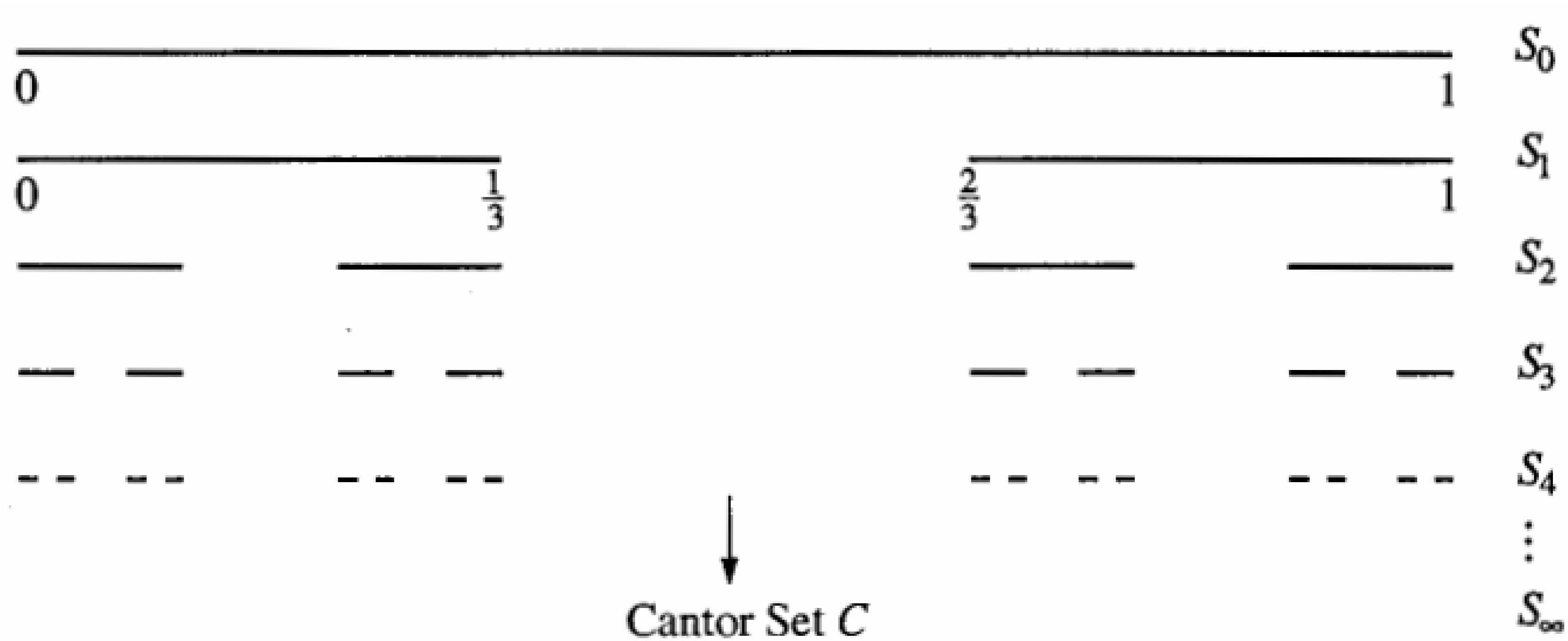
Лекция 10. Фракталы и хаотическая динамика.

1. Понятие фрактального множества. Фрактальная размерность.
2. Геометрия странных аттракторов.
3. Мультифрактальные спектры.

1. Понятие фрактального множества. Фактальная размерность.

Фракталами называют геометрические объекты, имеющие сложную структуру на произвольно малых масштабах. Часто фракталы обладают свойством самоподобия.

1.1 *Канторово множество*



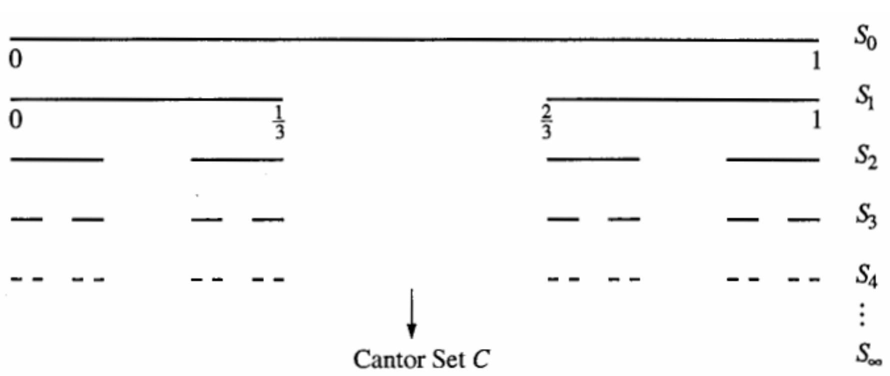
Свойства множества *C*:

1. *C* обладает структурой на произвольно малых масштабах.
2. Самоподобие: например, часть *C*, заключенная в замкнутом интервале [0, 1/3], переходит в *C* при $x \to 3x$.
3. Множество *C* имеет дробную размерность (см. ниже).

4. Мера *C* равна нулю. Действительно, множество S_n покрывает все множества S_m с $m > n$. Следовательно, $C = S_\infty$ покрывается каждым из множеств S_n , и его длина меньше, чем длина L_n любого S_n . Имеем:

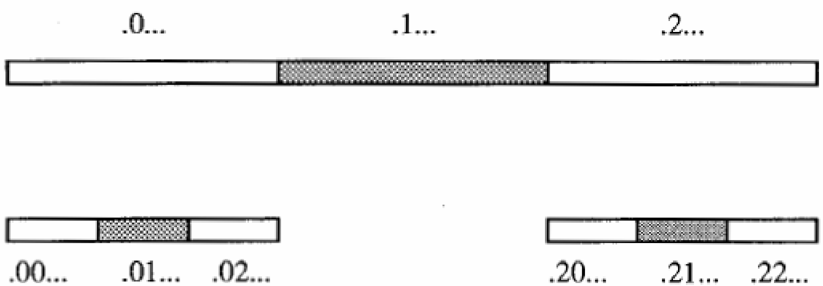
$$L_0 = 1,\ L_1 = \tfrac{2}{3},\ L_2 = \left(\tfrac{2}{3}\right)\left(\tfrac{2}{3}\right) = \left(\tfrac{2}{3}\right)^2,\ \dots\quad L_n = \left(\tfrac{2}{3}\right)^n.$$

Т.о., $L_n \to 0$ при $n \to \infty$, и, следовательно, длина *C* равна нулю.



5. *C* содержит несчетное множество точек.
Будем записывать числа отрезка [0, 1] в троичной системе.

Пусть $x \in [0,1]$, $x = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \frac{a_3}{3^3} + \cdots,$ тогда в троичной системе записи $x = .a_1 a_2 a_3 \ \ldots$



Из рисунка понятно, что *C* состоит из всех точек, в троичной записи которых отсутствует цифра 1. Предположим, что *C* – счетное множество. Тогда все его точки можно записать в виде списка:

$$x_1 = 0.x_{11}x_{12}x_{13}x_{14}\cdots$$
$$x_2 = 0.x_{21}x_{22}x_{23}x_{24}\cdots$$
$$x_3 = 0.x_{31}x_{32}x_{33}x_{34}\cdots$$
$$\vdots$$

Здесь x_{ij} равно нулю или двум. Построим число: первая цифра равна нулю, если $x_{11} = 2$, и двум, если $x_{11} = 0$; вторая цифра равна нулю, если $x_{22} = 2$, и двум, если $x_{22} = 0$; и т.д. Это число отсутствует в списке. Значит, *C* – несчетное множество.

Пример 1. Другое канторово множество.

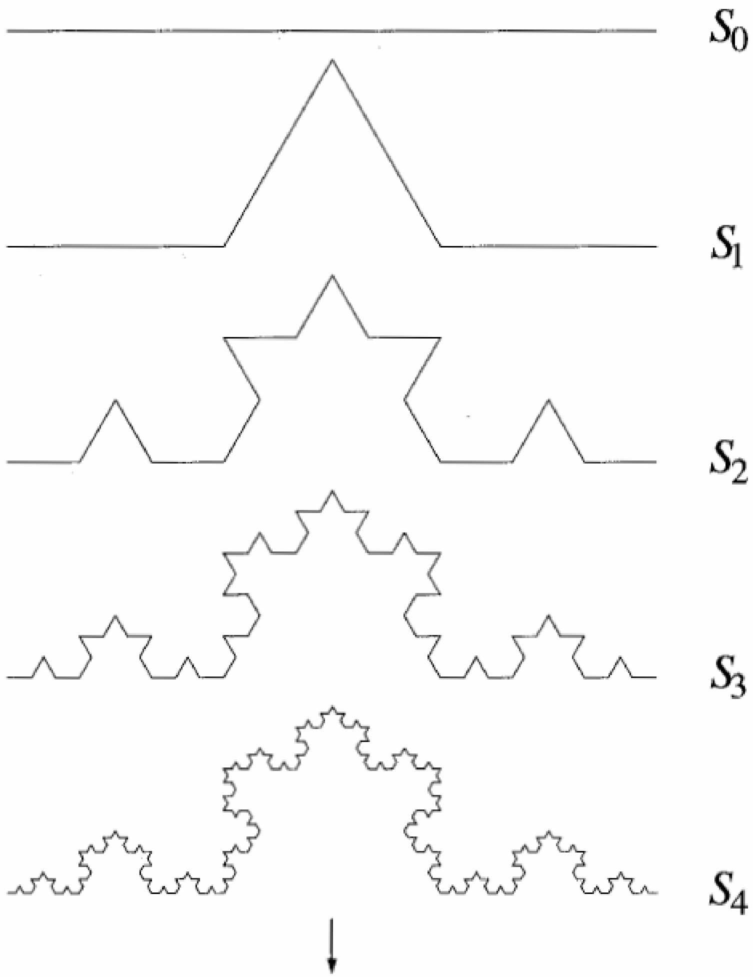
Определение *топологического канторова множества*:

1. Нигде не связное.
2. Не содержит изолированных точек: в сколь угодно малой окрестности любой точки множества содержится другая точка множества.

Заметим, что про самоподобие тут ничего не сказано.

1.2 *Размерность фрактальных множеств*

У гладкой кривой размерность 1, у поверхности – 2, и т. д. Может быть, размерность – это число координат, значения которых необходимо задать, чтобы указать точку на множестве?

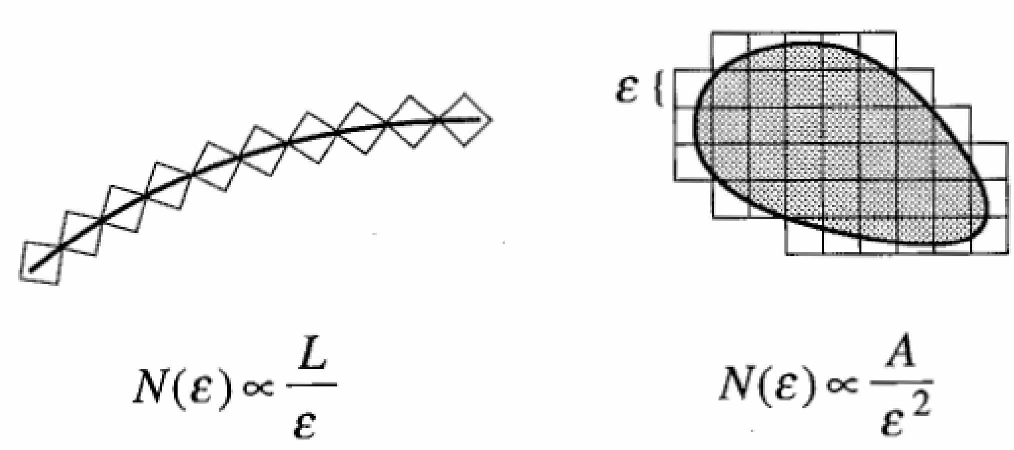


von Koch curve K

Пример 2. Кривая Коха.
Пусть длина S_0 равна L_0, тогда

$L_1 = \frac{4}{3} L_0$, и $L_n = (\frac{4}{3})^n L_0 \to \infty$ при $n \to \infty$. Таким образом, кривая Коха имеет бесконечную длину. Более того, длина участка кривой между любыми ее заданными двумя точками бесконечна. Поэтому положение точки не может быть задано одним числом – длиной, отделяющей ее от фиксированной точки.

Введем понятие *фрактальной (хаусдорфовой) размерности*:



N(ε) – минимальное число кубиков со стороной ε, необходимое, чтобы покрыть все множество.

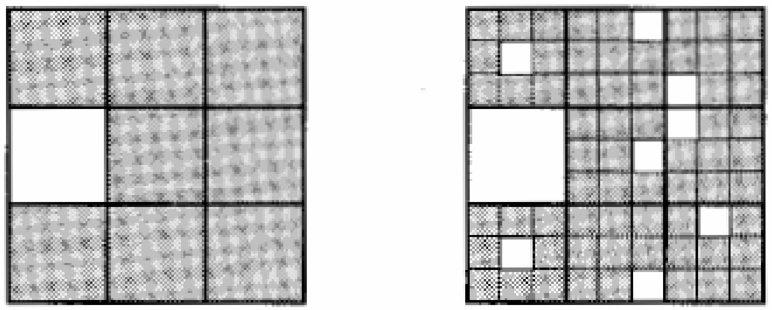
Размерность определяется как показатель *d* в $N(\varepsilon) \propto 1/\varepsilon^d$.

$$\boxed{d = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)}},$$ если предел существует.

Пример 3. Размерность канторова множества *C*.
C покрывается любым из множеств S_n. Каждое из этих множеств состоит из 2^n отрезков длины $(1/3)^n$. Возьмем $\varepsilon = (1/3)^n$, тогда $N = 2^n$.

$$d = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)} = \frac{\ln(2^n)}{\ln(3^n)} = \frac{n \ln 2}{n \ln 3} = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0.63.$$

Пример 4. Несамоподобный фрактал.



S_1 S_2

$$\varepsilon = \left(\tfrac{1}{3}\right)^n \quad , \quad N = 8^n$$

$$d = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)} = \frac{\ln(8^n)}{\ln(3^n)} = \frac{n \ln 8}{n \ln 3} = \frac{\ln 8}{\ln 3}$$

Пример 5. Береговая линия.

Будем измерять длину береговой линии линейкой длины l . Тогда измеренная длина $L = \Lambda\, l^{-\alpha}$, $\Lambda = const$. Для Великобритании $\alpha \approx 0{,}3$. Число раз N, которое линейка укладывается вдоль побережья, равно $N = \dfrac{L}{l} = \Lambda l^{-(1+\alpha)}$. Следовательно, фрактальная размерность $D = 1 + \alpha \approx 1{,}3$

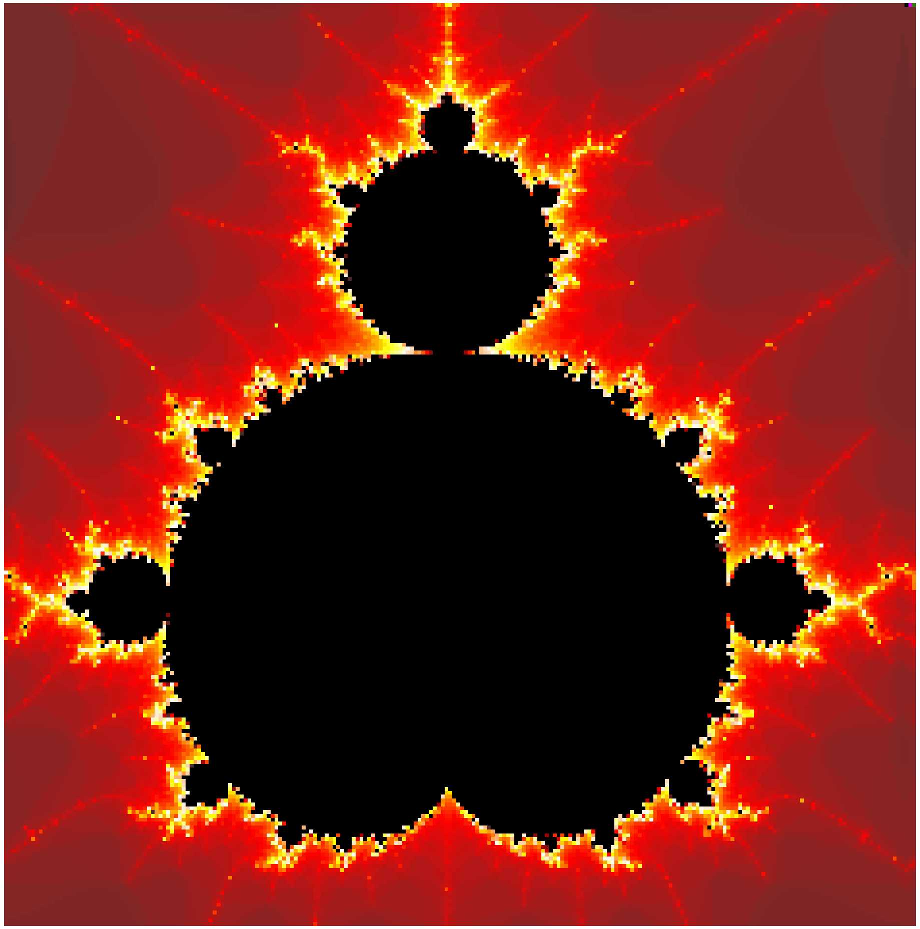
Множество Мандельброта.

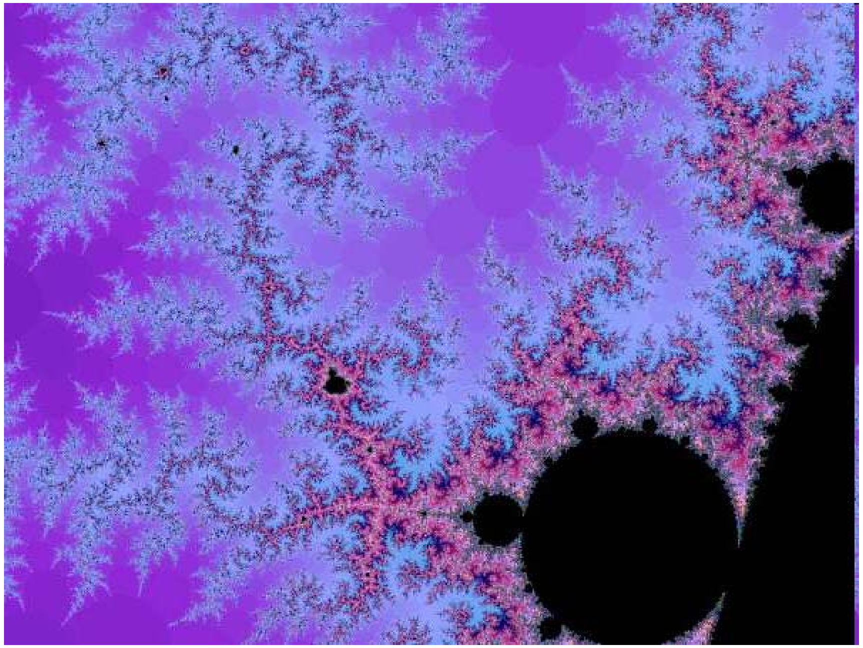
Рассмотрим последовательность комплексных чисел:

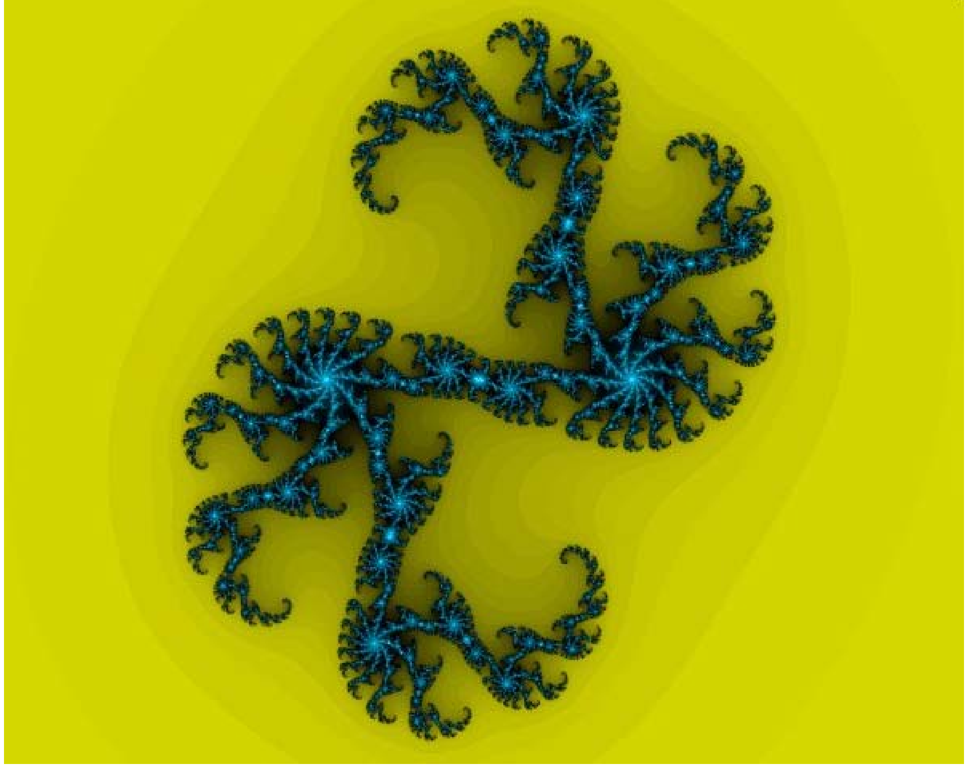
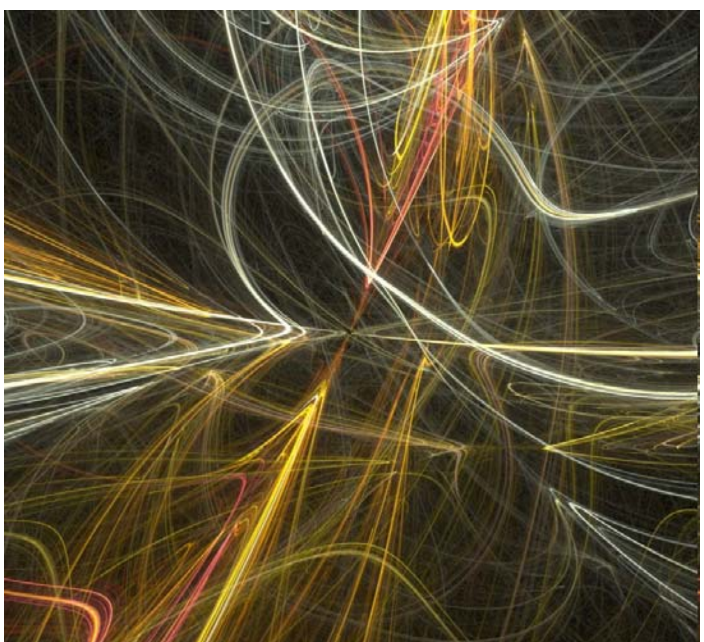
$$z_0, z_1 = F(z_0), z_2 = F(z_1), z_3 = F(z_2), \ldots$$

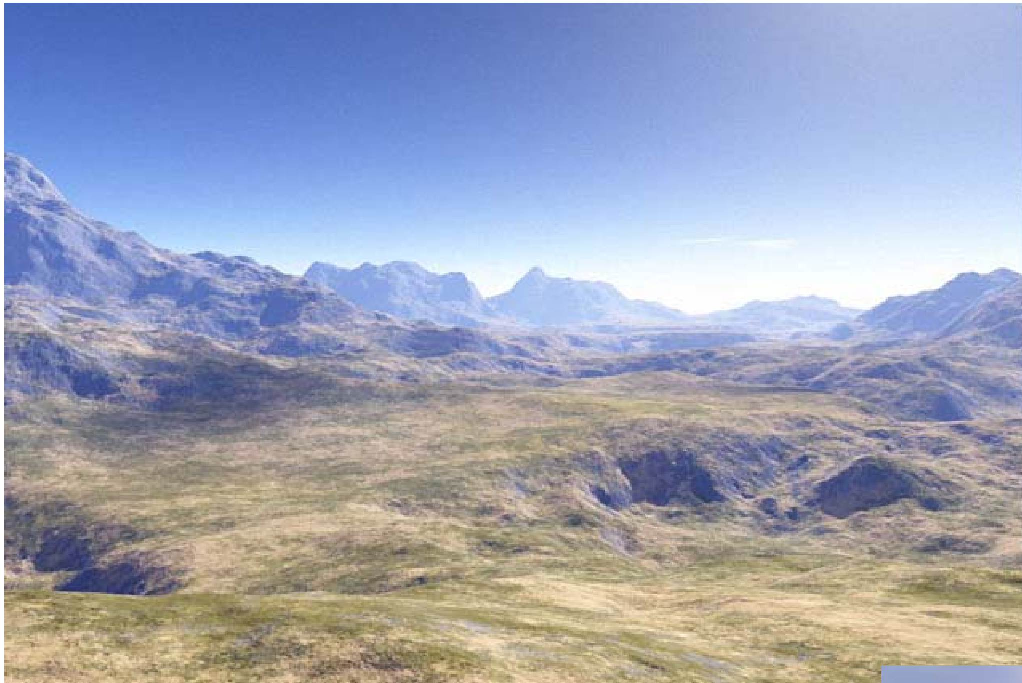
Пусть $F(z) = z^2 + c, \quad z_0 = 0$

Множество Мандельброта – множество всех комплексных c таких, что $|z_n|$ не стремится к бесконечности.





http://www.miqel.com/images_1/fractal_math_patterns

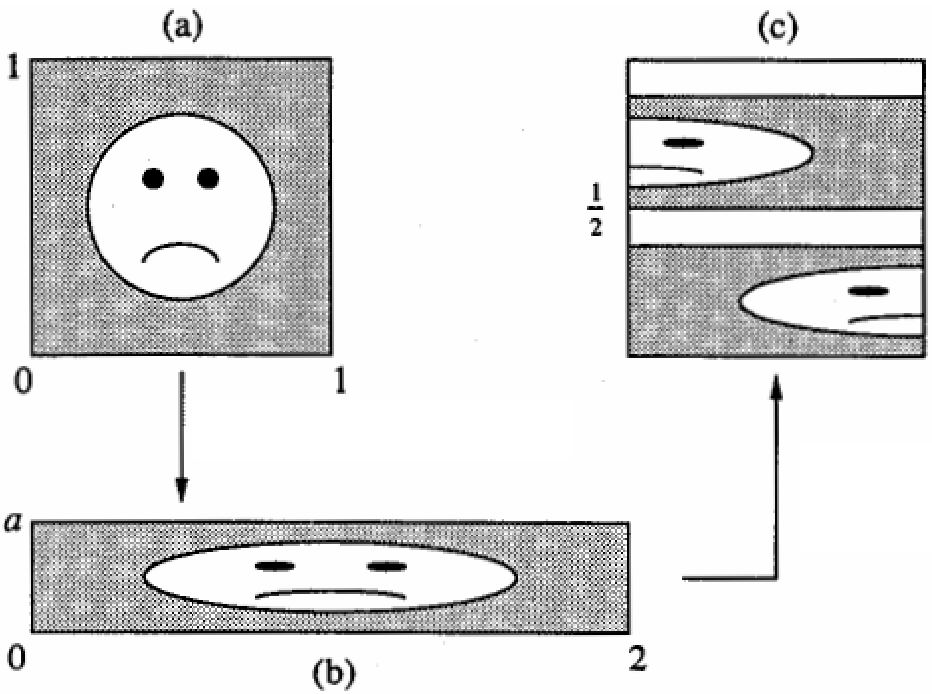
http://www.fractal-landscapes.co.uk

2. Геометрия странных аттракторов.

2.1. *Преобразование пекаря*.

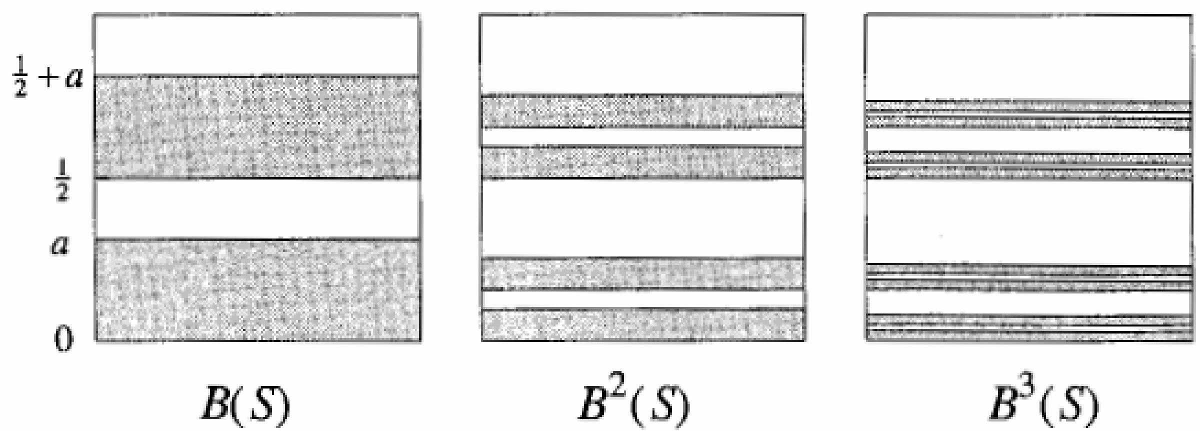
Отображение квадрата $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1$ в себя:

$$(x_{n+1}, y_{n+1}) = \begin{cases} (2x_n,\ ay_n) & , \quad 0 \le x_n < \frac{1}{2} \\ (2x_n - 1,\ ay_n + \frac{1}{2}) & , \quad \frac{1}{2} \le x_n \le 1 \end{cases} \qquad 0 < a \le \frac{1}{2}.$$



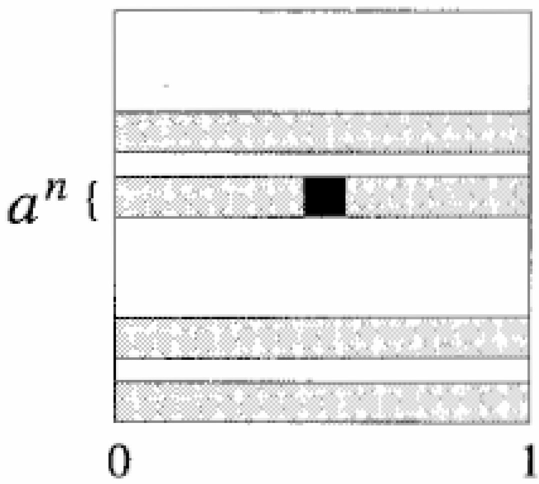
Благодаря растяжению в x-направлении, имеется экспоненциальное разбегание траекторий. Система обладает свойством перемешивания. Преобразование пекаря имеет несчетное множество хаотических траекторий.

Если $a < \frac{1}{2}$, преобразование пекаря *B* имеет притягивающее множество (аттрактор) *A*. Пусть *S* – единичный квадрат.



Видим, что $B^n(S)$ состоит из 2^n горизонтальных полосок ширины a^n. Предельное множество $A = B^\infty(S)$ имеет структуру топологического канторова множества. Оно непусто как пересечение счетного числа вложенных компактных множеств. Для любой начальной точки (x_0, y_0) ее образ $B^n(x_0, y_0)$ лежит в одной из полосок, составляющих $B^n(S)$, т.е. находится на расстоянии не большем, чем a^n, от множества *A*. Значит, с ростом *n* все траектории действительно притягиваются к *A*.

Найдем фрактальную размерность множества *A*. Оно по-



крывается множеством $B^n(S)$, состоящим из 2^n полосок длины 1 и ширины a^n. Покроем его квадратиками со стороной $\varepsilon = a^n$. Их потребуется $N \approx a^{-n} \times 2^n = (a/2)^{-n}$. Размерность:

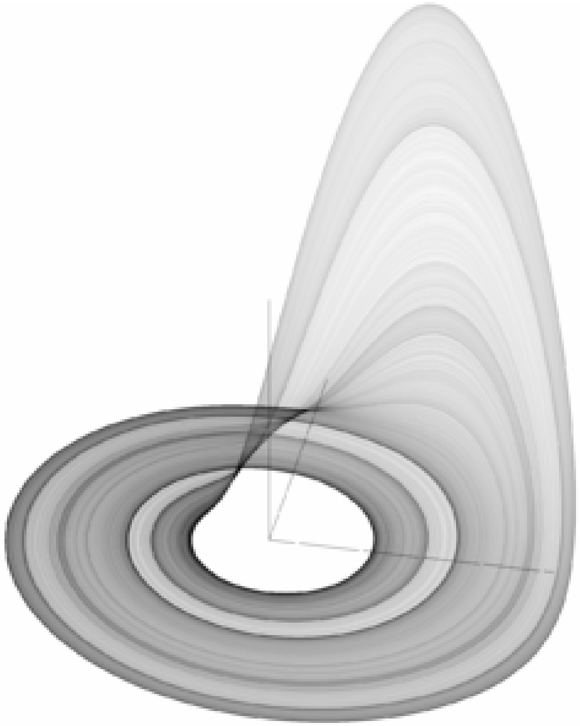
$$d = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\ln N}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left[(a/2)^{-n}\right]}{\ln(a^{-n})} = 1 + \frac{\ln \frac{1}{2}}{\ln a}$$

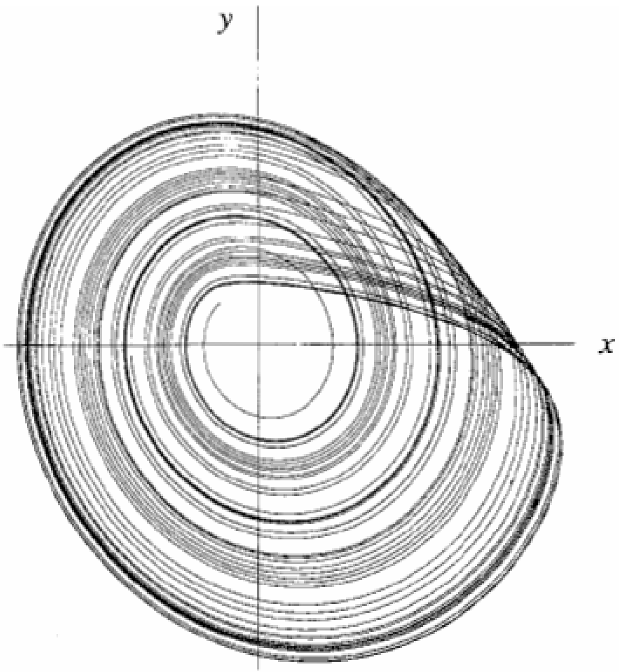
2.2 *Аттрактор Рёсслера*

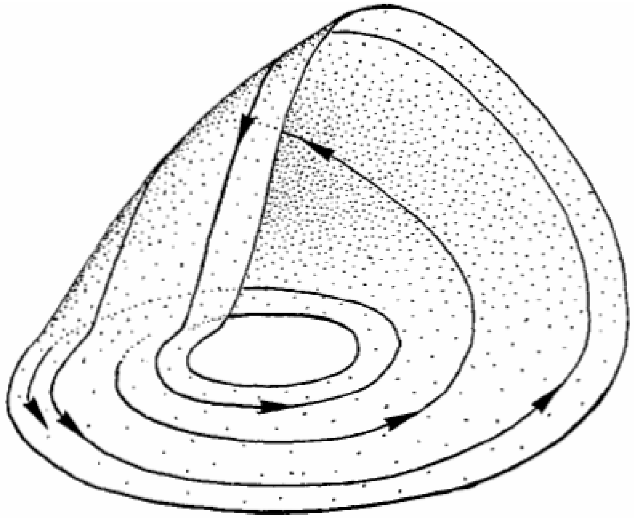
$$\dot{x} = -y - z \qquad a = b = 0.2$$

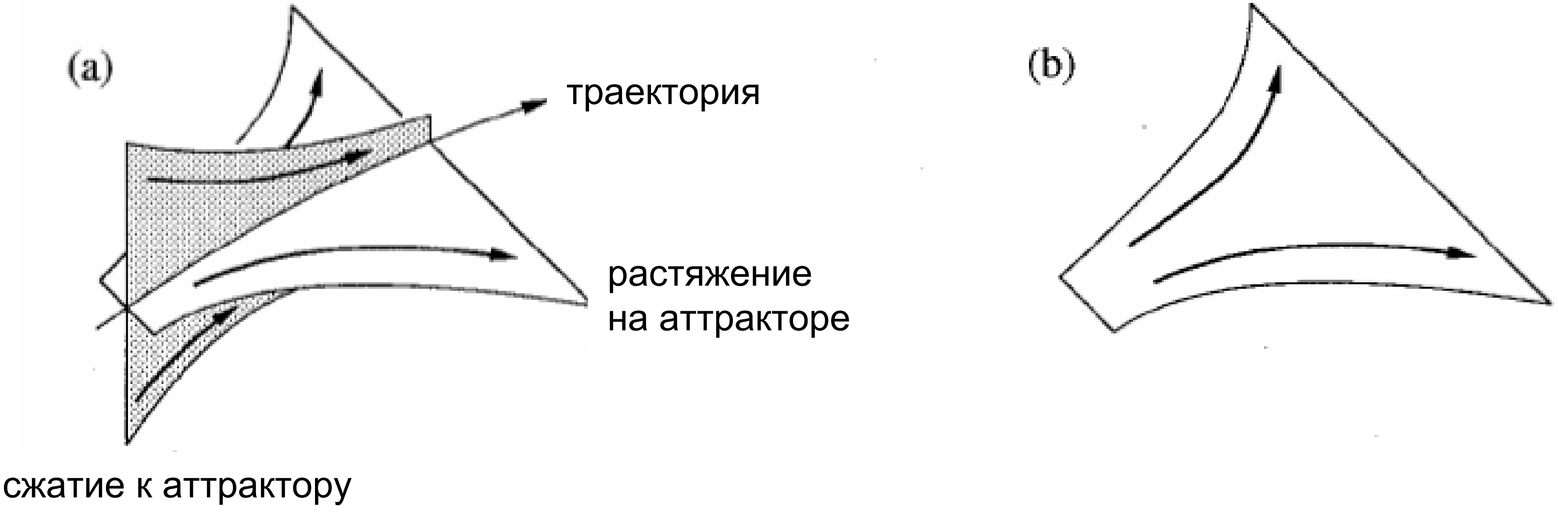
$$\dot{y} = x + ay \qquad c = 5.7$$

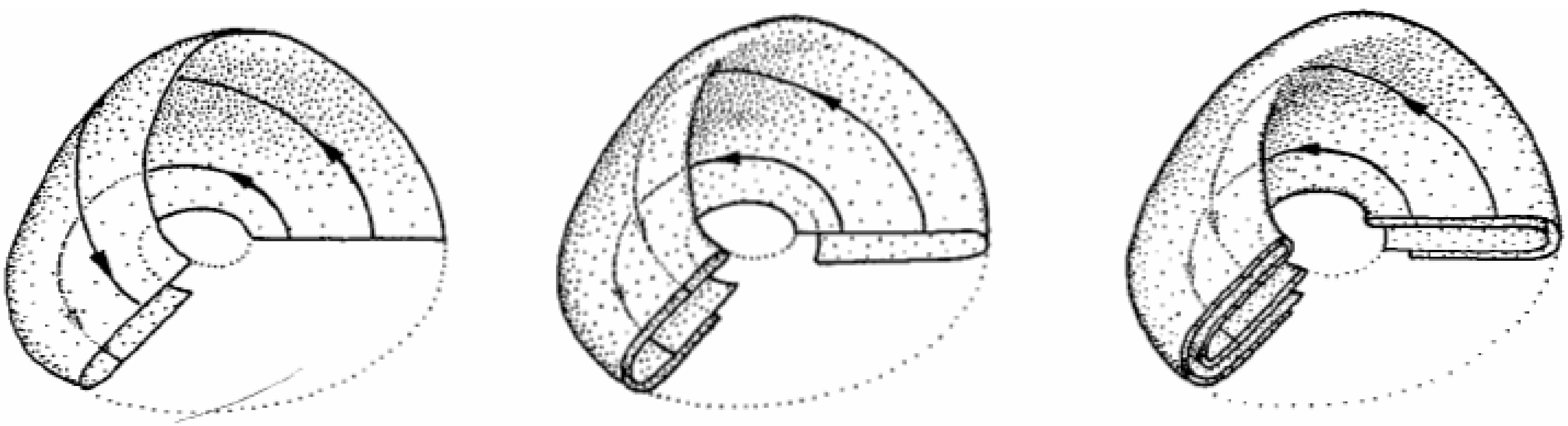
$$\dot{z} = b + z(x - c)$$





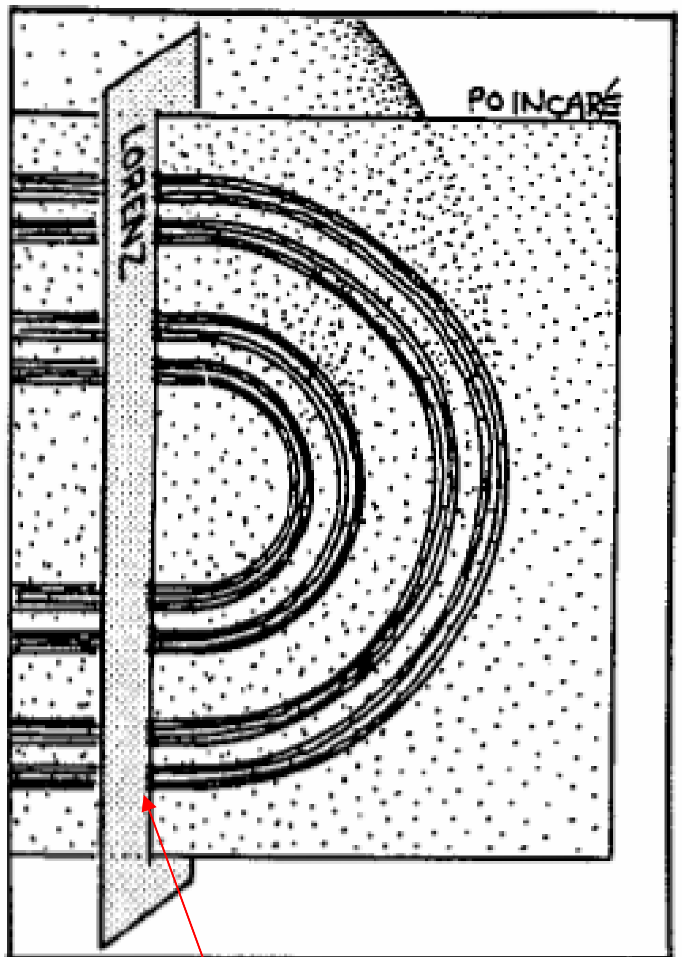






Геометрия аттрактора Рёсслера (Abraham and Shaw, 1983)

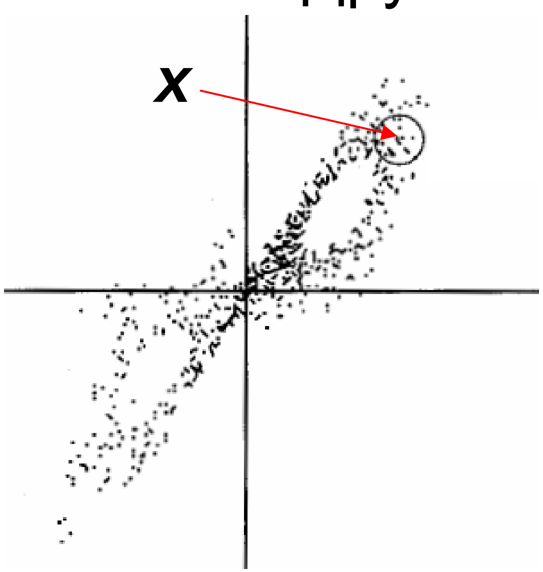
Сечение Пуанкаре и «сечение Лоренца» для аттрактора Рёсслера.



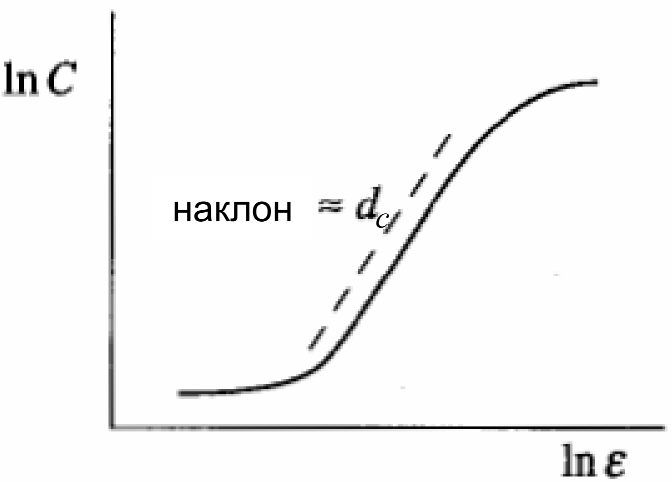
топологическое канторово множество

3. Мультифрактальные спектры.

3.1. *Поточечная и корреляционная размерность*. Как на практике оценить размерность построенного численно или полученного экспериментально фрактального множества (например, странного аттрактора)? Пусть $\{\mathbf{x}_i\,,\ i=1,\ldots,n\}$ - множество точек, лежащих на аттракторе *A*. Можно посчитать фрактальную размерность, разбивая пространство на ячейки, считая число ячеек, в которые попадают точки ***x*$_\mathbf{i}$**, при разном размере ячеек, и определяя скейлинг. Другой способ: зафиксируем ***x***. Пусть $N_{\mathbf{x}}(\varepsilon)$ - число точек ***x*$_\mathbf{i}$**, попадающих внутрь шара радиуса ε с центром в ***x***. Будем изменять ε. Как правило, $N_{\mathbf{x}}(\varepsilon)\propto\varepsilon^{d}$, где *d* называется *поточечной* размерностью в точке ***x***.



Усредним $N_{\mathbf{x}}(\varepsilon)$ по большому числу точек $\mathbf{x_i}$. Получим величину $C(\varepsilon)$, которая. как показывает опыт, зависит степенным образом от ε: $C(\varepsilon) \propto \varepsilon^{d_c}$. Величина d_c называет-ся *корреляционной* размерностью. Вообще говоря, $d_c \le d_f$, но обычно они очень близки.

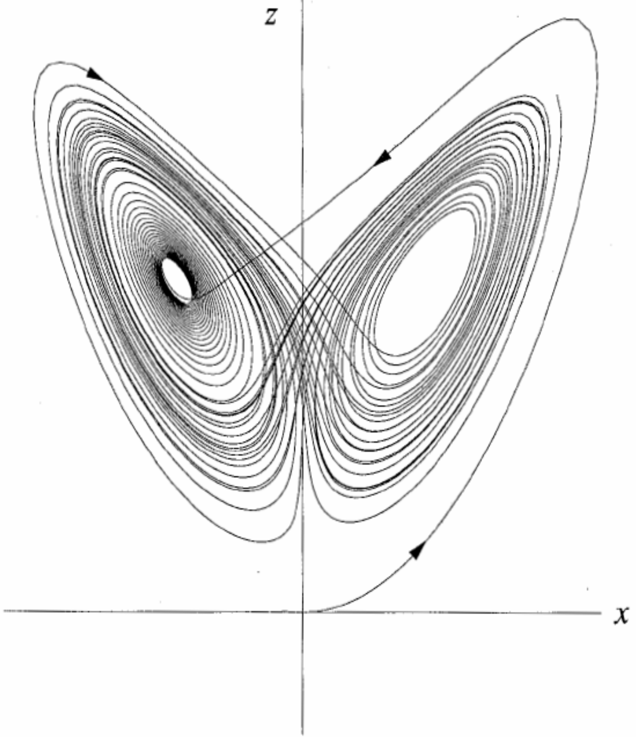


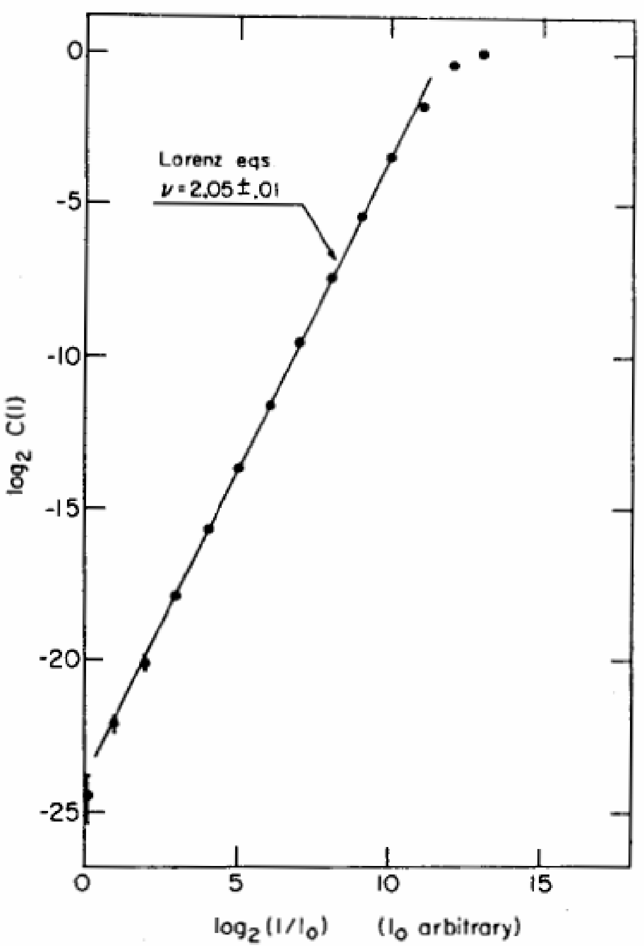
Чтобы найти d_c, строится график $\log C(\varepsilon)$ от $\log \varepsilon$. Он имеет линейный участок при значениях ε, для которых (мин. расст. между точками) << ε<< <<(размер аттрактора).

Пример 6. Аттрактор Лоренца

$$\dot{x} = \sigma(y - x)$$
$$\dot{y} = rx - y - xz$$
$$\dot{z} = xy - bz\,.$$

$$r = 28,\ \sigma = 10,\ b = \tfrac{8}{3}$$



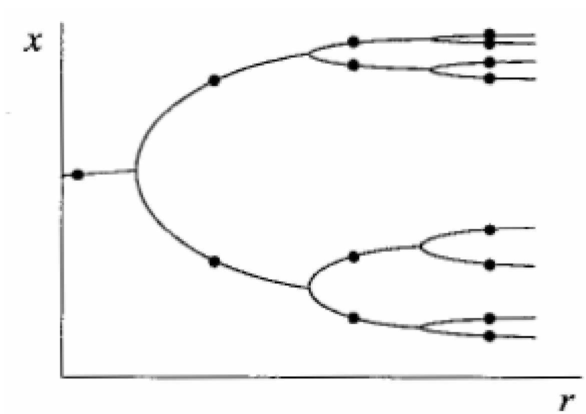


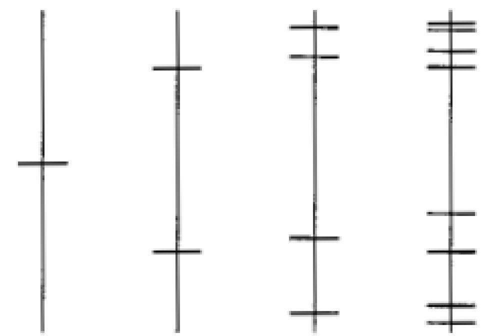
$$d_{corr} = 2.05 \pm 0.01$$

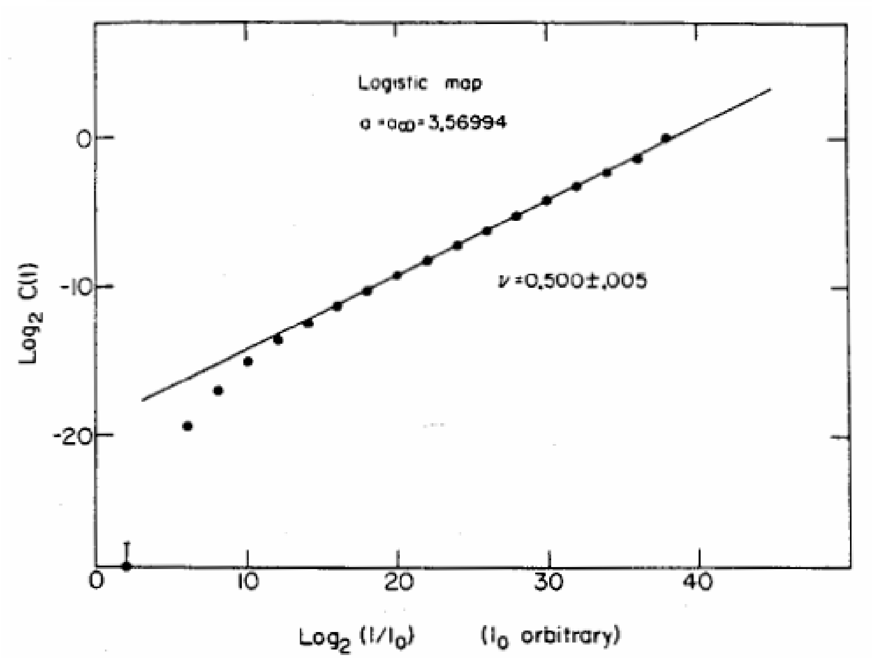
(Grassberger, Procaccia, 1983)

Пример 7. Размерность аттрактора логистического отображения.

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) \qquad r = r_\infty = 3.5699456...$$



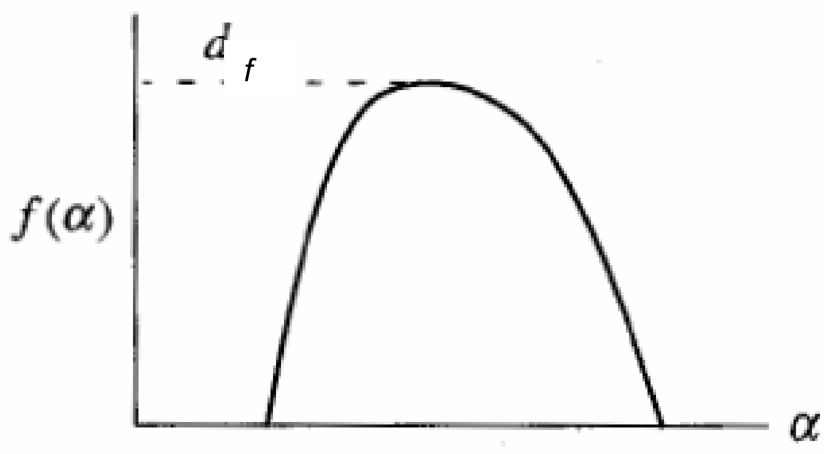




$$d_{\text{corr}} = 0.500 \pm 0.005$$

(Grassberger, Procaccia, 1983)

3.2. *Мультифракталы*

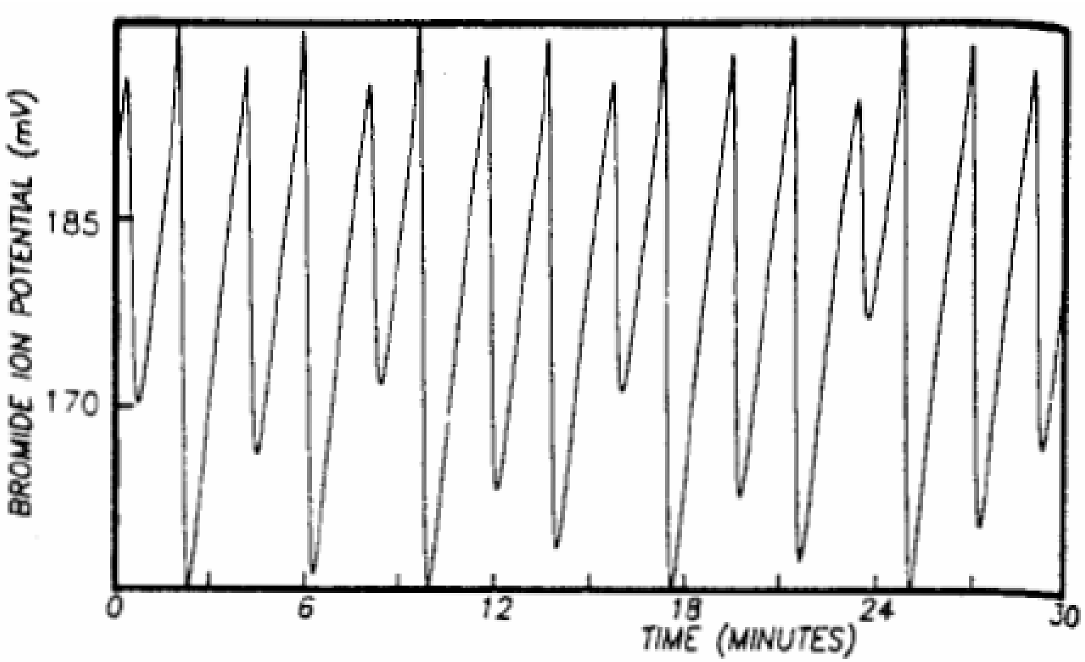


Пусть у множества *A* поточечная размерность зависит от точки. Пусть S(α) – подмножество, на котором поточечная размерность равна α. Оно само представляет собой фрактал. Пусть *f*(α) – размерность S(α).

Функция *f* (α) называется *мультифрактальным спектром* множества *A.* Оказывается, ее максимум равен фрактальной размерности *A*.

Бонус: *Восстановление аттрактора по набору данных.*

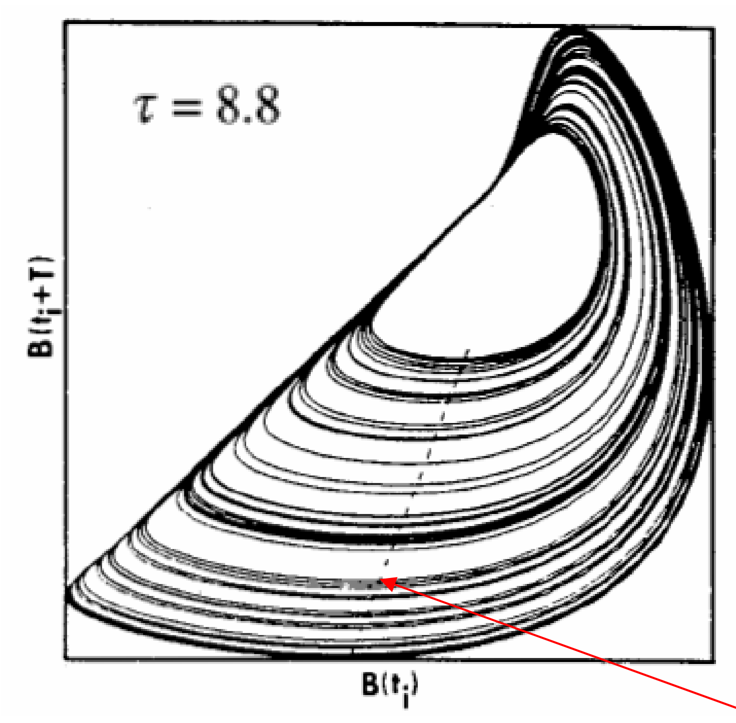
Реакция Белоусова-Жаботинского: окисление лимонной кислоты броматом калия в кислотной среде в присутствии катализатора — ионов церия Ce+3 демонстрирует автоколебания. Течение реакции меняется со временем, что проявляется периодическим изменением цвета раствора от бесцветного (Ce+3) к жёлтому (Ce+4) и обратно. «Химический хаос»:



Что это – динамический хаос или случайный процесс?

(Roux et al., 1983)

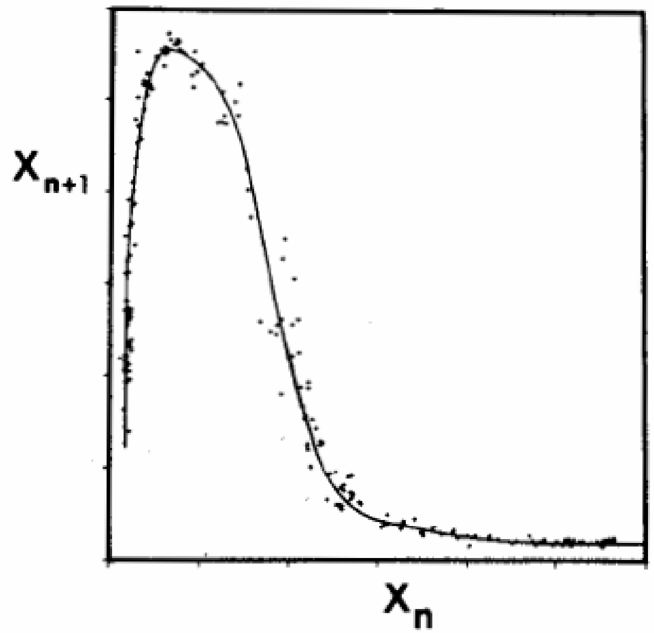
Требуется продемонстрировать, что измеренный сигнал $B(t)$ является реализацией движения на странном аттракторе (в пространстве неизвестной размерности). Определим вектор $\mathbf{x}(t) = \big(B(t),\, B(t+\tau)\big)$, $\tau > 0.$ Сигнал



генерирует траекторию $\mathbf{x}(t)$ на плоскости. Видна структура, напоминающая аттрактор Рёсслера (!) Можно построить $\mathbf{x}(t) = \big(B(t),\, B(t+\tau),\, B(t+2\tau)\big)$.

Получается квази-двумерный объект, его сечение Пуанкаре квази-одномерно.

Пусть $X_1,\, X_2,\, \ldots,\, X_n,\, X_{n+1},\, \ldots$ - после-довательные значения $B(t+\tau)$ в точках, где $\mathbf{x}(t)$ пересекает пунктирную линию. Построим график X_{n+1} от X_n .



Получили унимодальное отображение. В системе есть каскады удвоения периода, универсальность Фейгенбаума, и т.д.

Если сигнал генерируется динамикой на аттракторе, при увеличении размерности вектора $\mathbf{x}(t)$ корреляционная размерность должна выходить на константу. Если же это настоящий случайный сигнал (шум), этого не происходит. Можно ли таким образом определить размерность аттрактора, например, для поведения фондового рынка и разбогатеть?