Лекция 2.

1. Фазовые потоки на прямой.
2. Бифуркации фазовых потоков на прямой.

1. Фазовые потоки на прямой.

1.1 *Геометрическое представление решений ОДУ*

В первой лекции мы говорили о системах вида:

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, \ldots, x_n)$$

$$\ldots\ldots$$

$$\dot{x}_n = f_n(x_1, \ldots, x_n)$$

Теперь перейдем к одномерным системам:

$$\dot{x} = f(x)$$

Здесь $x(t)$, $f(x)$ – действительные функции.

Пример 1.

$$\dot{x} = \sin x$$

Это уравнение можно решить в явном виде:

$$dt = \frac{dx}{\sin x}, \qquad t = \int \frac{dx}{\sin x} = -\ln|\csc x + \cot x| + C$$

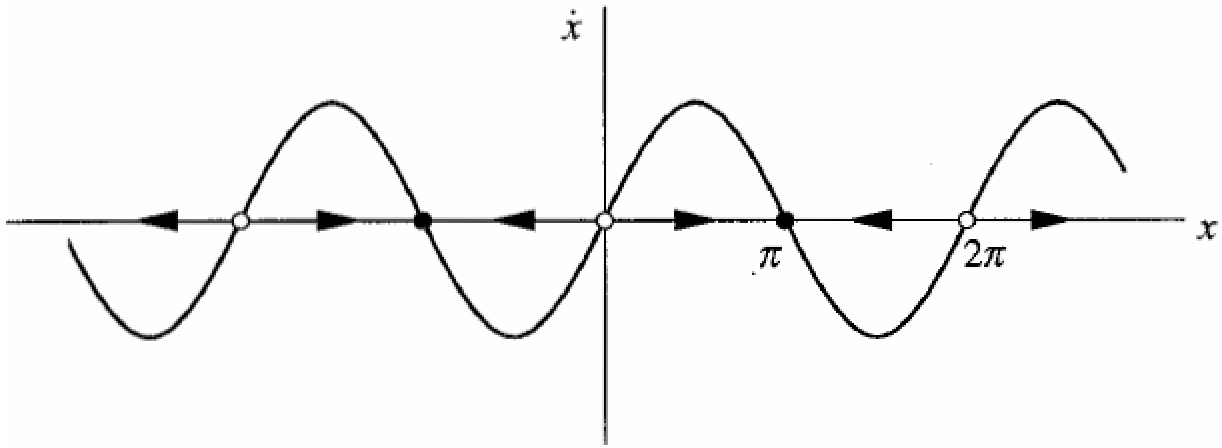
Н.у. : $x(0) = x_0$, следовательно,

$$C = \ln|\csc x_0 + \cot x_0| \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{t = \ln\left|\frac{\csc x_0 + \cot x_0}{\csc x + \cot x}\right|}$$

Это точное решение, однако оно с трудом поддается интерпретации. Вот два простых вопроса:

- пусть $x_0 = \pi/4$. Каково поведение решения при всех $t>0$, в частности, при $t\to\infty$?
- каково поведение решения при $t\to\infty$ для произвольного н.у.?

Геометрическое представление:

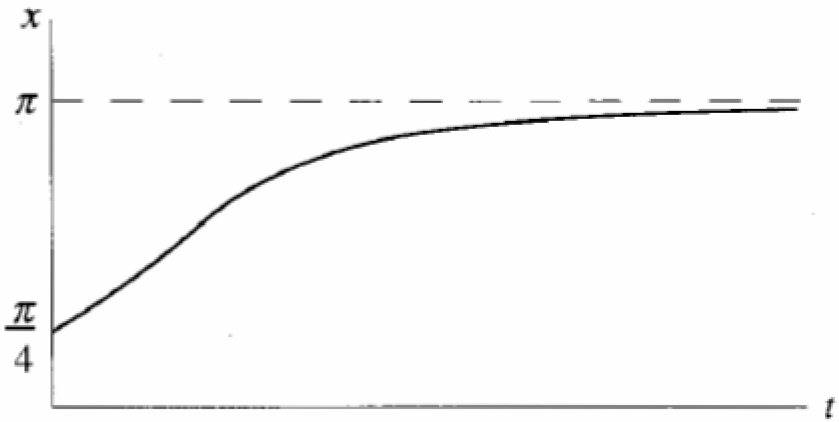


Уравнение $\dot{x} = \sin x$ задает *векторное поле* на прямой:

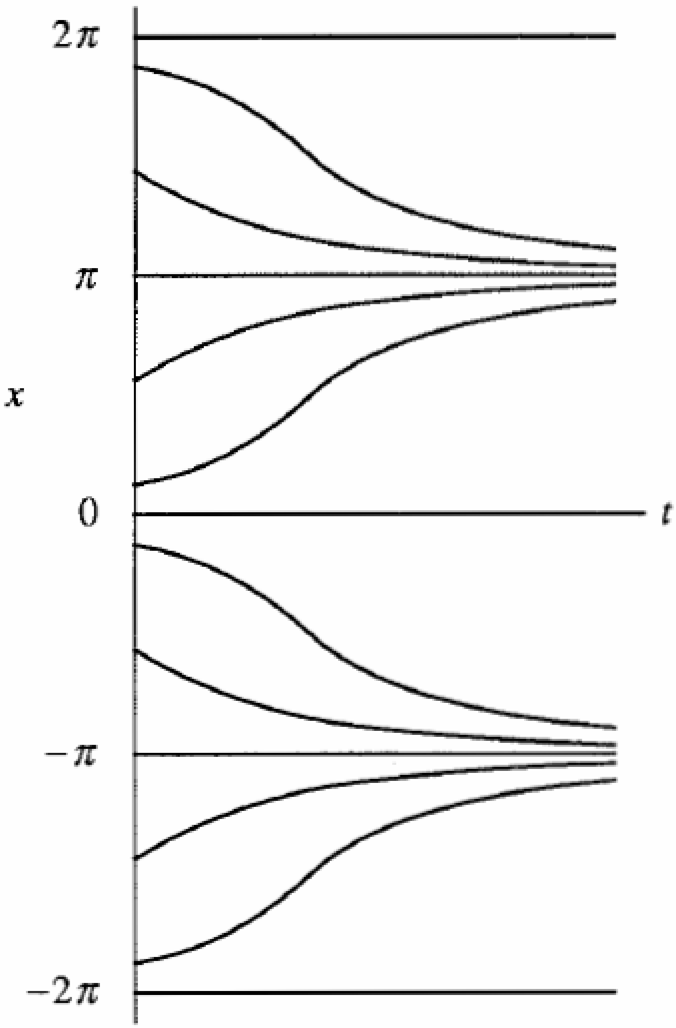
оно определяет вектор скорости $\dot{x}$ в каждой точке $\boldsymbol{x}$.

Вектор скорости направлен направо там, где $\dot{x} > 0,$
и налево там, где $\dot{x} < 0.$ Неподвижные точки определяются условием $\dot{x} = 0.$

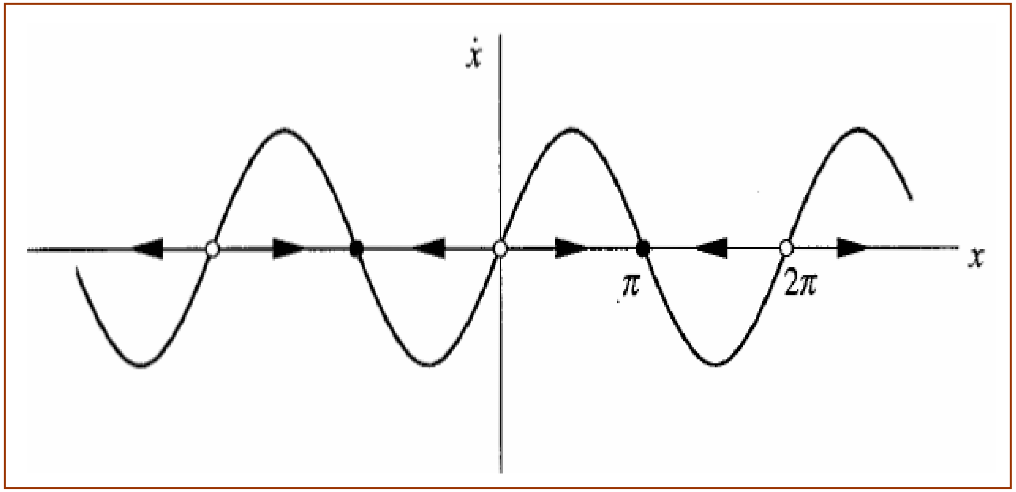
Теперь легко ответить на поставленные вопросы.



x
π
$\frac{\pi}{4}$
t



2π
π
x
0
t
$-\pi$
-2π

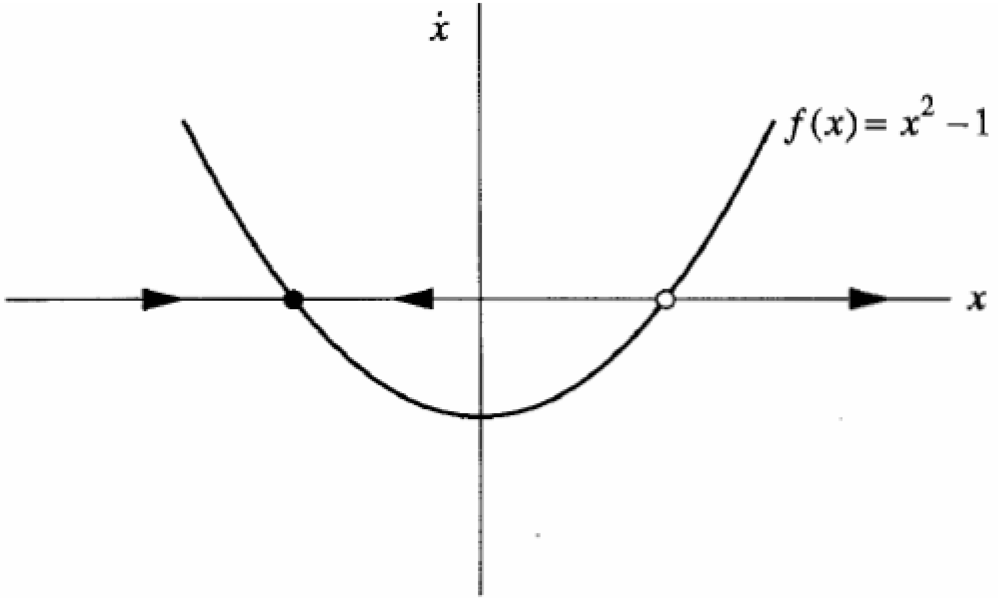


$\dot{x}$
π
2π
x

Пример 2.

$$\dot{x} = x^2 - 1$$

Найти все неподвижные точки и определить их устойчивость.

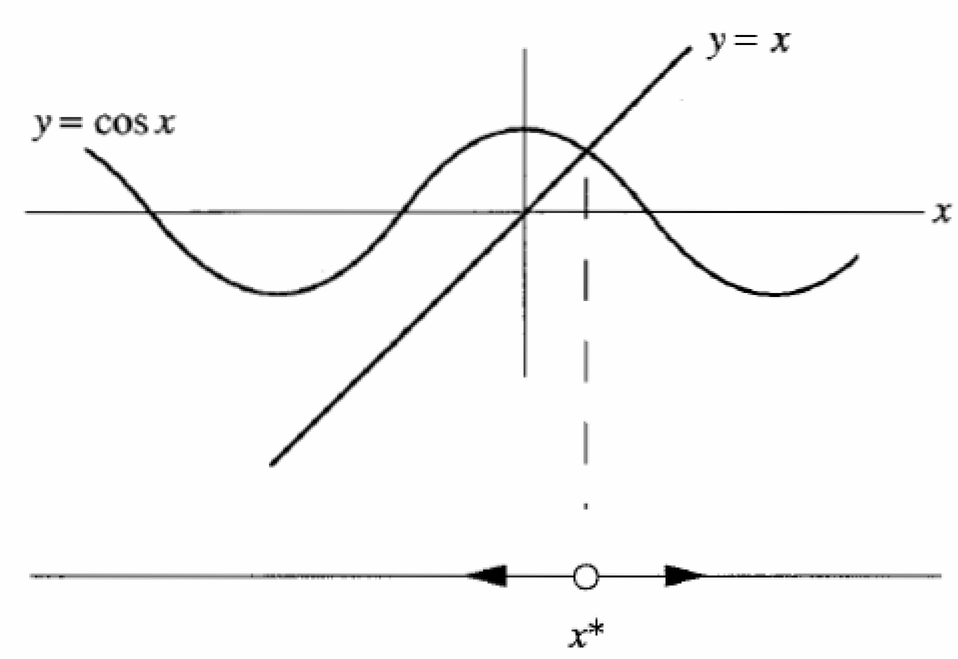


Точка $x = -1$ устойчива *локально*, но не *глобально*.

Пример 3.

$$\dot{x} = x - \cos x$$

Найти все неподвижные точки и определить их устойчивость.



Удается определить устойчивость x^* даже несмотря на то, что у нас нет формулы для x^* !

1.2 *Линеаризация вблизи неподвижной точки.*

Пусть x^* - неподвижная точка, $\xi(t) = x(t) - x^*$ - малое возмущение. Тогда

$$\dot{\xi} = \xi \cdot f'(x^*) + O(\xi^2)$$

Если $f'(x^*) \neq 0$. получаем линеаризованное уравнение:

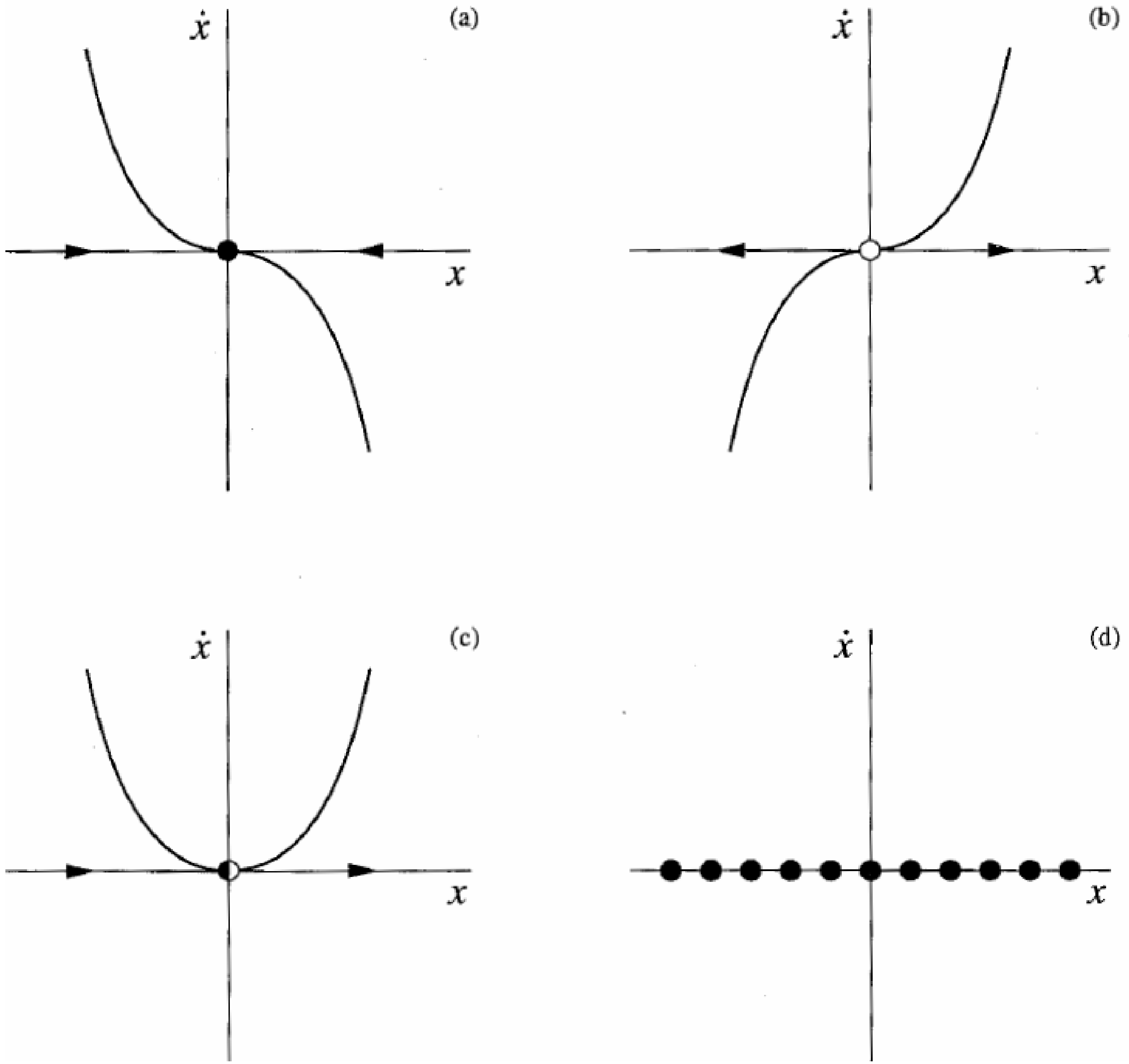
$$\dot{\xi} = \xi \cdot f'(x^*)$$

Вблизи неподвижной точки возмущение растет или уменьшается экспоненциально с показателем $f'(x^*)$.

Что можно сказать про устойчивость неподвижной точки, если $f'(x^*) = 0$?

Пример 4.

(a) $\dot{x} = -x^3$ (b) $\dot{x} = x^3$ (c) $\dot{x} = x^2$ (d) $\dot{x} = 0$



1.3 *Существование и единственность*

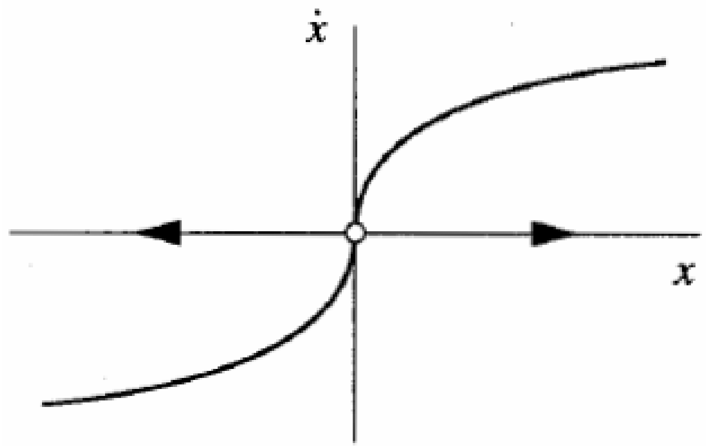
Пример 5.

$$\dot{x} = x^{1/3}, \qquad x_0 = 0$$

x = 0 - неподвижная точка, поэтому решением, очевидно, является x(t) = 0 при всех t. Это решение, оказывается, не единственно:

$$\int x^{-1/3} dx = \int dt \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{2} x^{2/3} = t + C \quad \Rightarrow \quad x = \left(\tfrac{2}{3} t\right)^{3/2}$$

На самом деле, имеется бесконечно много решений, удовлетворяющих этому начальному условию.



Теорема. Рассмотрим задачу на начальные значения:

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = x_0.$$

Пусть $f(x)$ и $f'(x)$ непрерывны на открытом интервале Δ, $x_0 \in \Delta$. Тогда на некотором интервале времени *(-τ,τ)* решение существует и единственно.

Т.е., если функция $f(x)$ достаточно гладкая, решение существует и единственно. Но даже в этом случае нет гарантии, что оно существует *при всех t*.

Пример 6.

$$\dot{x} = x^2 + 1, \qquad x(0) = 0$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + 1} = \int dt \quad \Rightarrow \quad \arctan x = t + C$$

Из начальных условий получаем C=0. Решение $x = \tan t$ существует только при $-\pi/2 < t < \pi/2$.

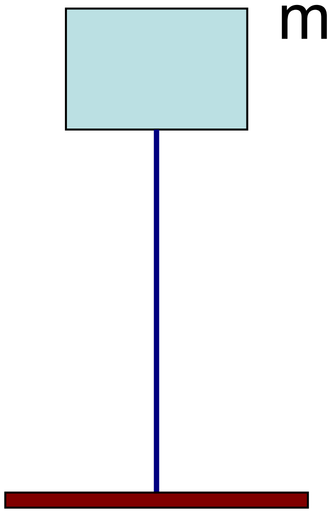
Вне этого интервала времени решение задачи с начальным условием *x(0)=0* не существует.

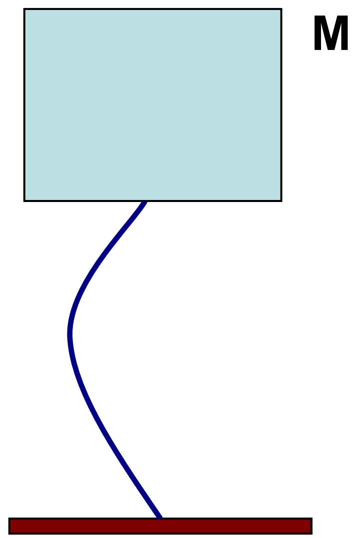
Динамика одномерной системы определяется в значительной степени неподвижными точками. Фазовые траектории либо притягиваются к неподвижным точкам, либо уходят на бесконечность. При этом $x(t)$ всегда монотонна, т.е. осцилляции невозможны и периодические решения отсутствуют.

Динамика очень простая. Однако...

2. Бифуркации фазовых потоков на прямой.

Качественное изменение структуры фазового потока при изменении параметров системы.

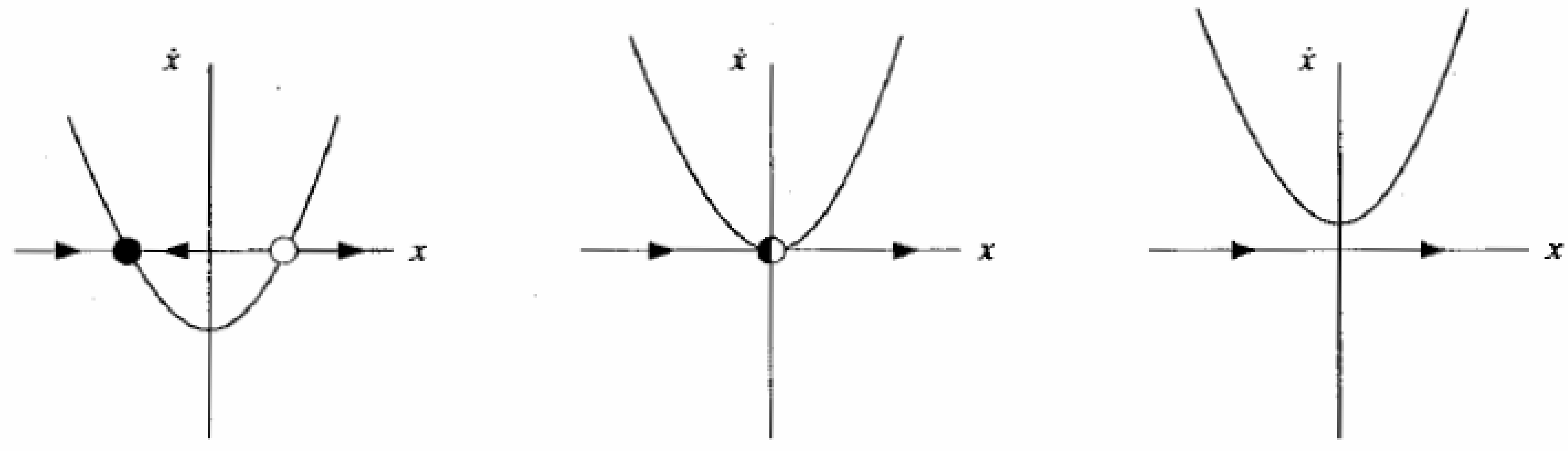




При некотором достаточно большом значении нагрузки вертикальное положение стержня теряет устойчивость.

2.1 *Бифуркация «седло-узел»*

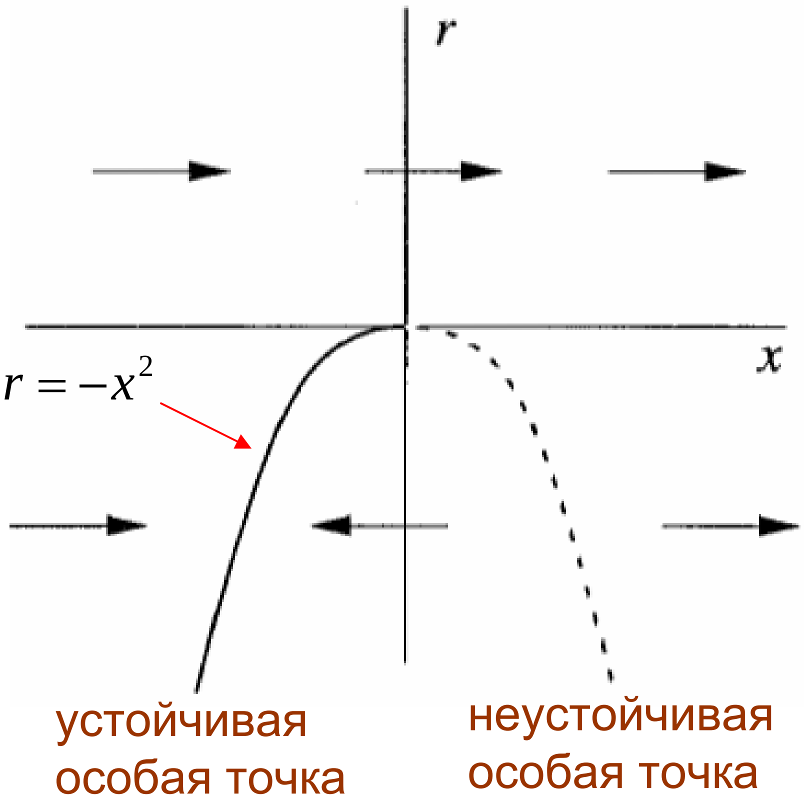
$$\dot{x} = r + x^2$$

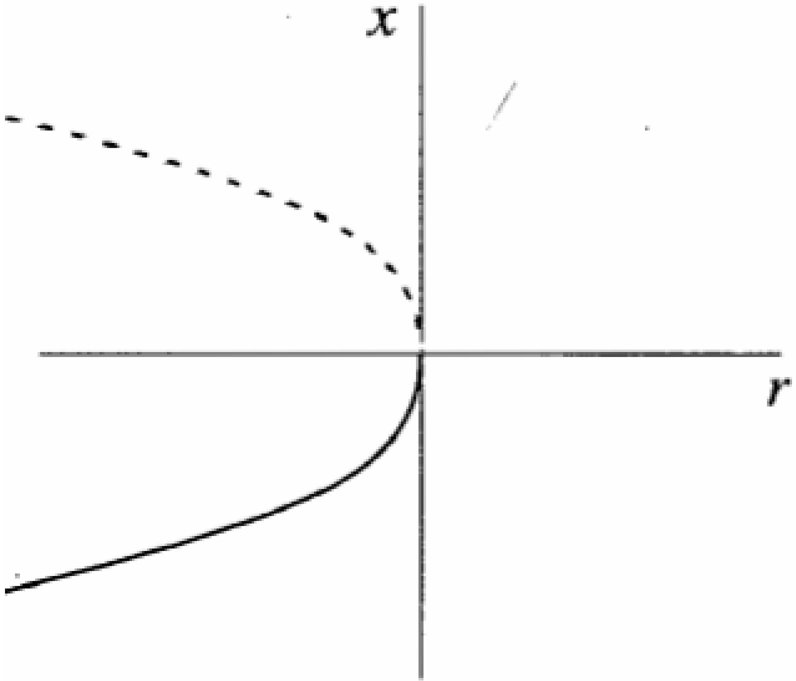


(a) $r < 0$ (b) $r = 0$ (c) $r > 0$

Поля скоростей при r < 0 и при r > 0 качественно различны. Бифуркация происходит при r = 0.

Графическое представление:





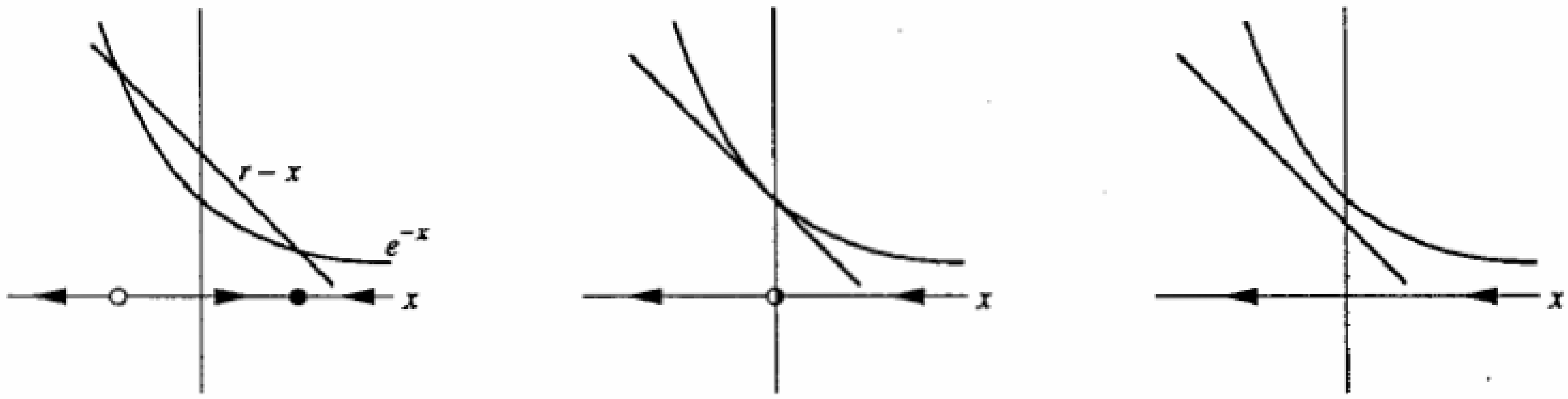
Бифуркационная диаграмма

Пример 1. Исследовать бифуркацию в системе:

$$\dot{x} = r - x - e^{-x}$$

Неподвижные точки определяются условием

$$r - x - e^{-x} = 0$$



(a) (b) (c)

В момент бифуркации графики *касаются*.

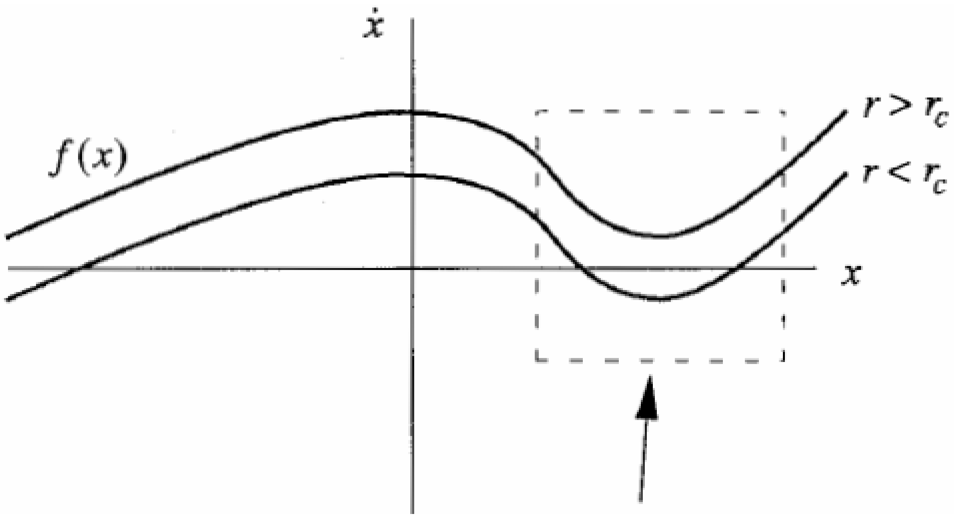
$$\begin{cases} e^{-x} = r - x \\ -e^{-x} = -1 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{matrix} x = 0 \\ r_c = 1 \end{matrix}$$

Разложим правую часть вблизи точки бифуркации x = 0, r = 1:

$$\dot{x} = r - x - e^{-x}$$

$$= r - x - \left[1 - x + \frac{x^2}{2!} + \cdots\right]$$

$$= (r-1) - \frac{x^2}{2} + \cdots$$



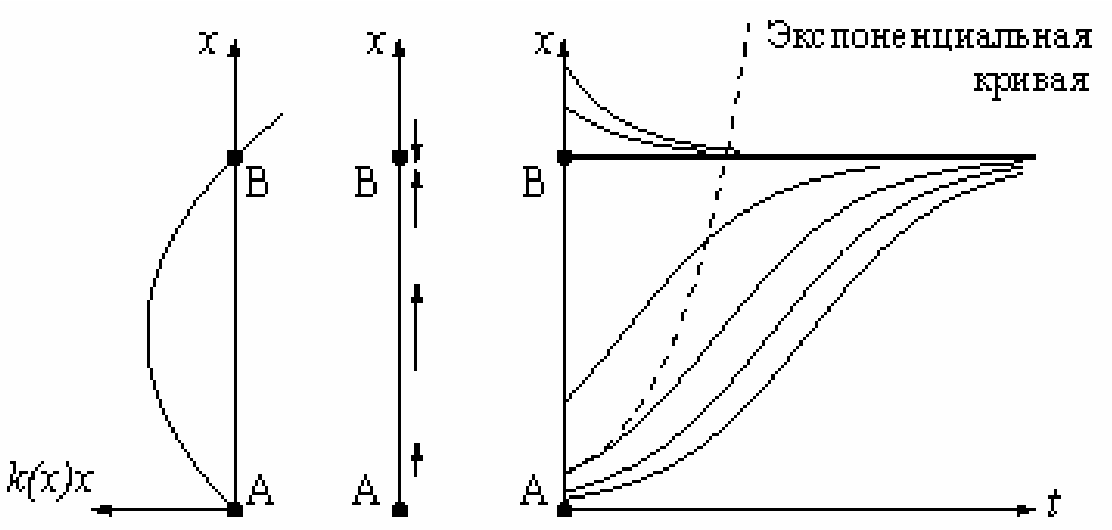
Уравнения $\dot{x} = r + x^2$ и $\dot{x} = r - x^2$ называются *нормальными формами* бифуркации седло-узел.

Пример 2. Отлов рыбы

Экспоненциальный рост популяции: $\dot{x} = kx$

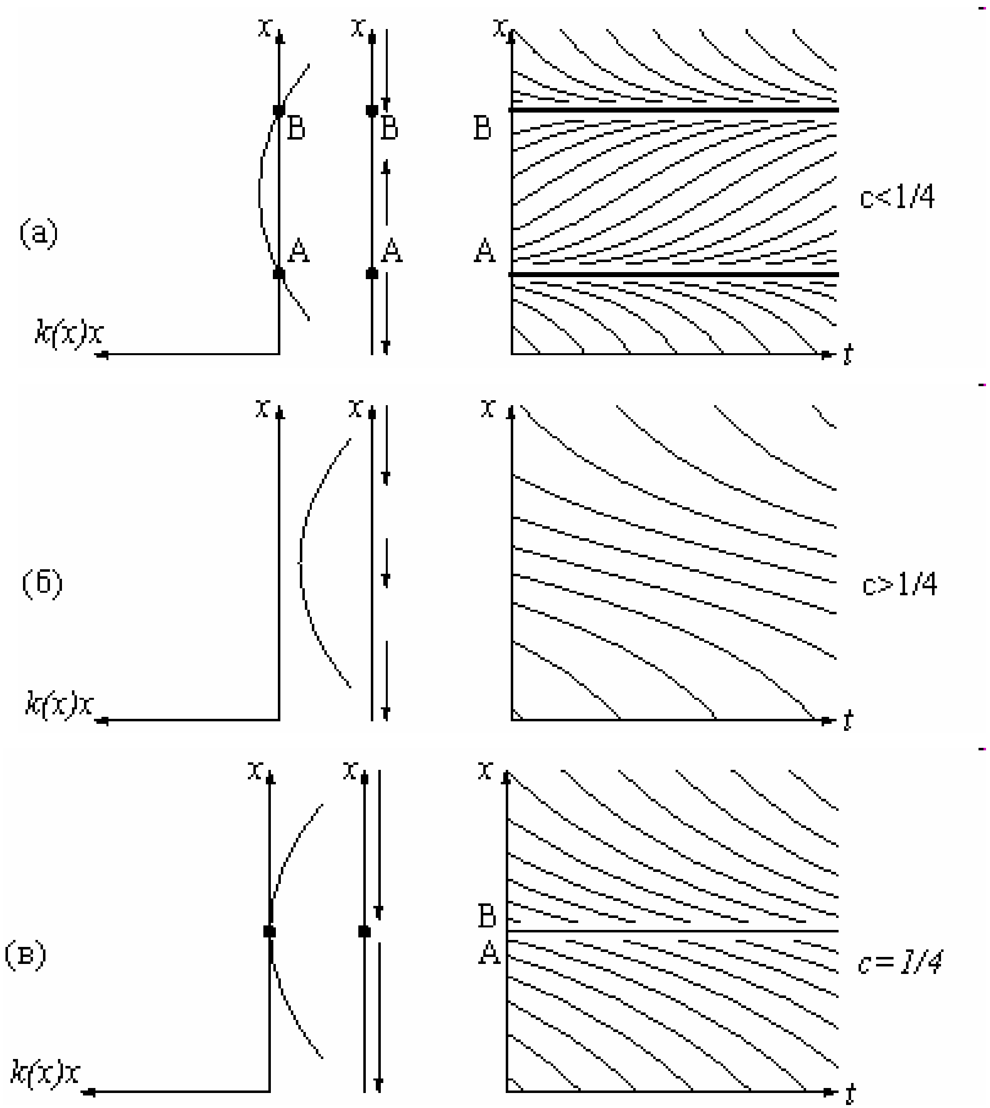
Рост с учетом конкуренции (логистическая модель):

$$\dot{x} = x(1 - x)$$



Наибольшая скорость роста ¼, достигается при x=1/2.

Отлов с постоянной интенсивностью: $\dot{x} = x(1-x) - c$



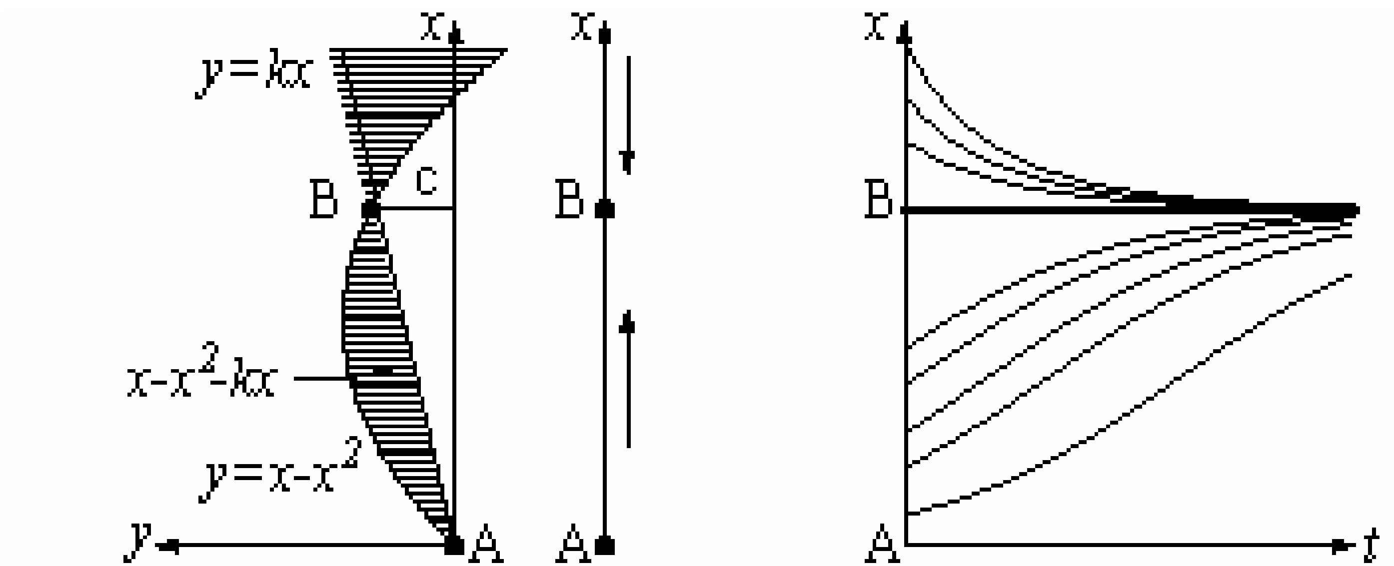
«Недолов»

«Перелов»

«Оптимизация»

Замена жесткого планирования на планирование с обратной связью:

$$\dot{x} = x(1-x) - kx, \quad k < 1$$



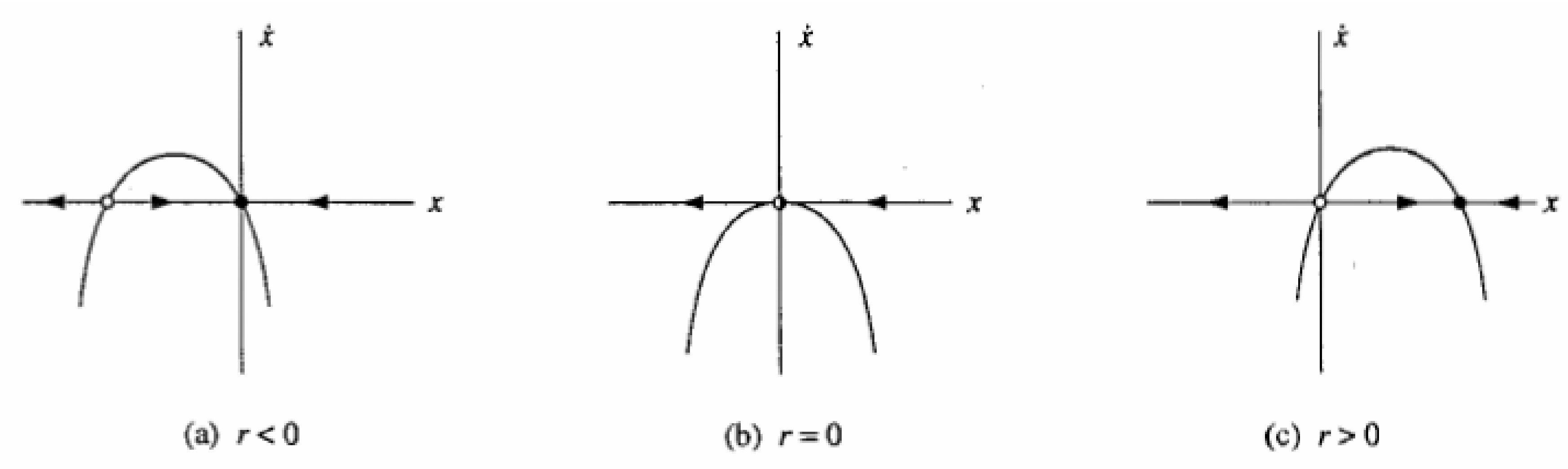
Средний доход оптимален при *k=1/2*, и равен *kB=1/4*. При этом малые возмущения системы не приводят к необратимым последствиям.

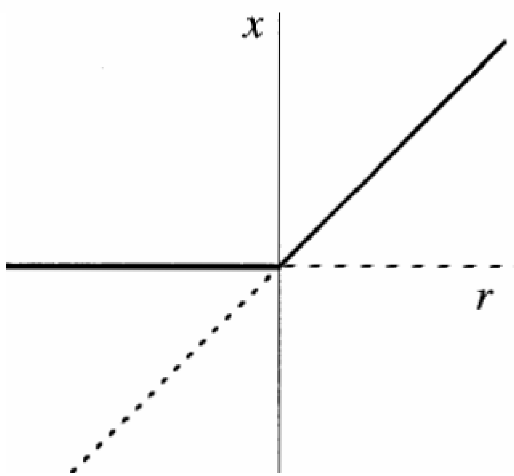
2.2 *Транскритическая бифуркация*

Изменение характера устойчивости неподвижной точки.

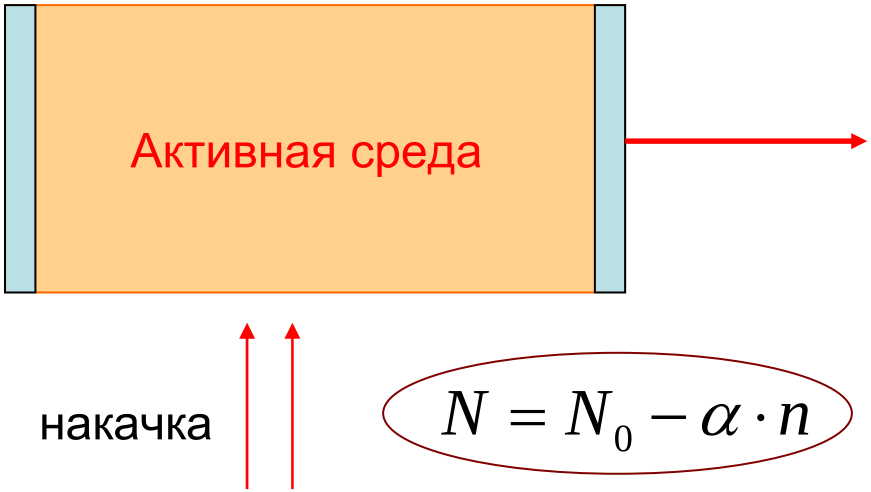
$$\dot{x} = rx - x^2$$

x = 0 - неподвижная точка при всех значениях параметра.





Пример 2. (Простейшая модель лазера).

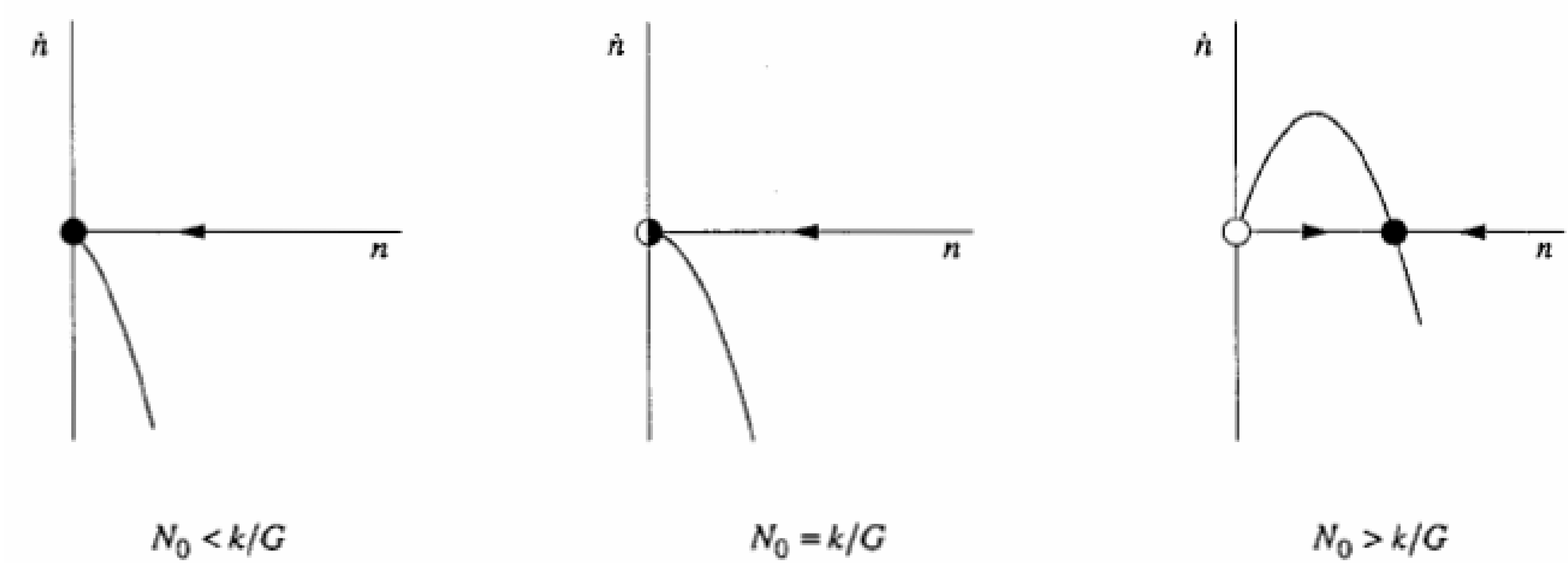


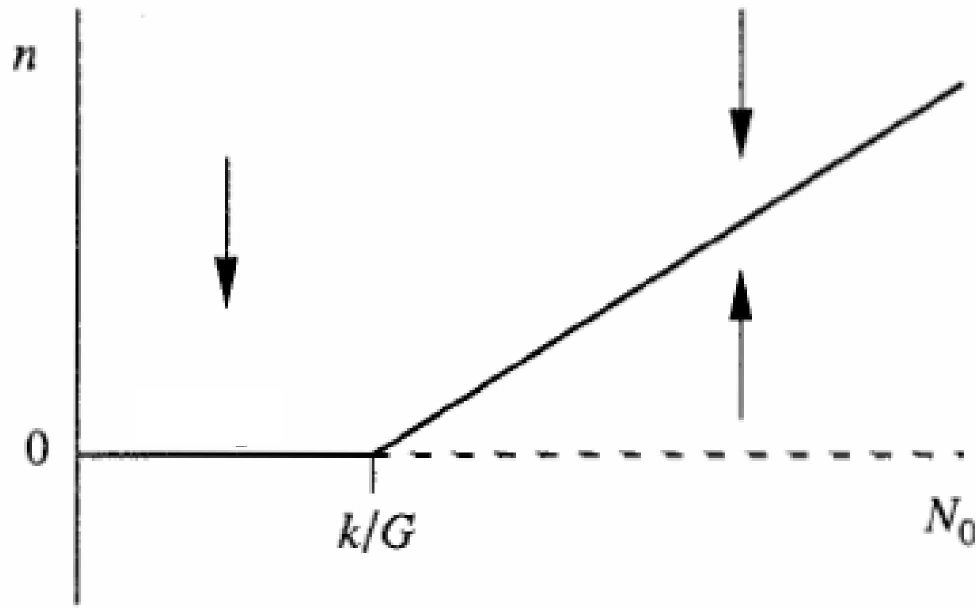
$$N = N_0 - \alpha \cdot n$$

$$\dot{n} = GnN - kn$$

n – количество фотонов в лазере, *N* – количество возбужденных атомов, *G* – коэффициент усиления, *k* – обратное время нахождения фотона в лазере.

$$\dot{n} = (GN_0 - k)n - (\alpha \cdot G)n^2$$



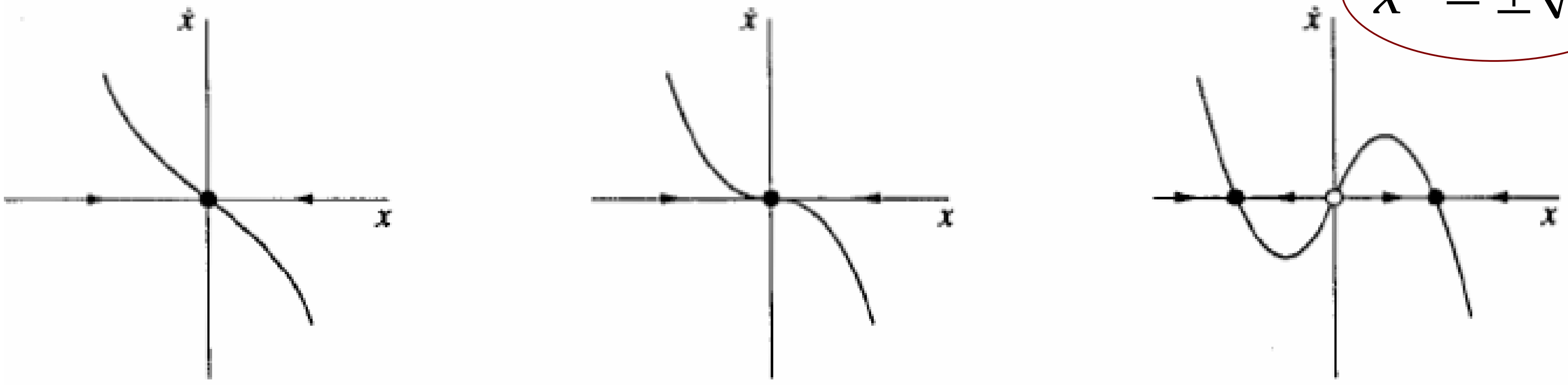

n
0
k/G
N0

2.3 *Бифуркация «вилка»*

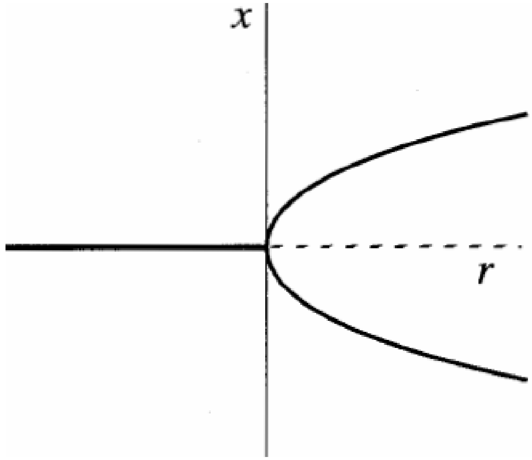
А) Суперкритическая форма бифуркации

$$\dot{x} = rx - x^3$$

$$x^* = \pm\sqrt{r}$$



(a) $r<0$ (b) $r=0$ (c) $r>0$

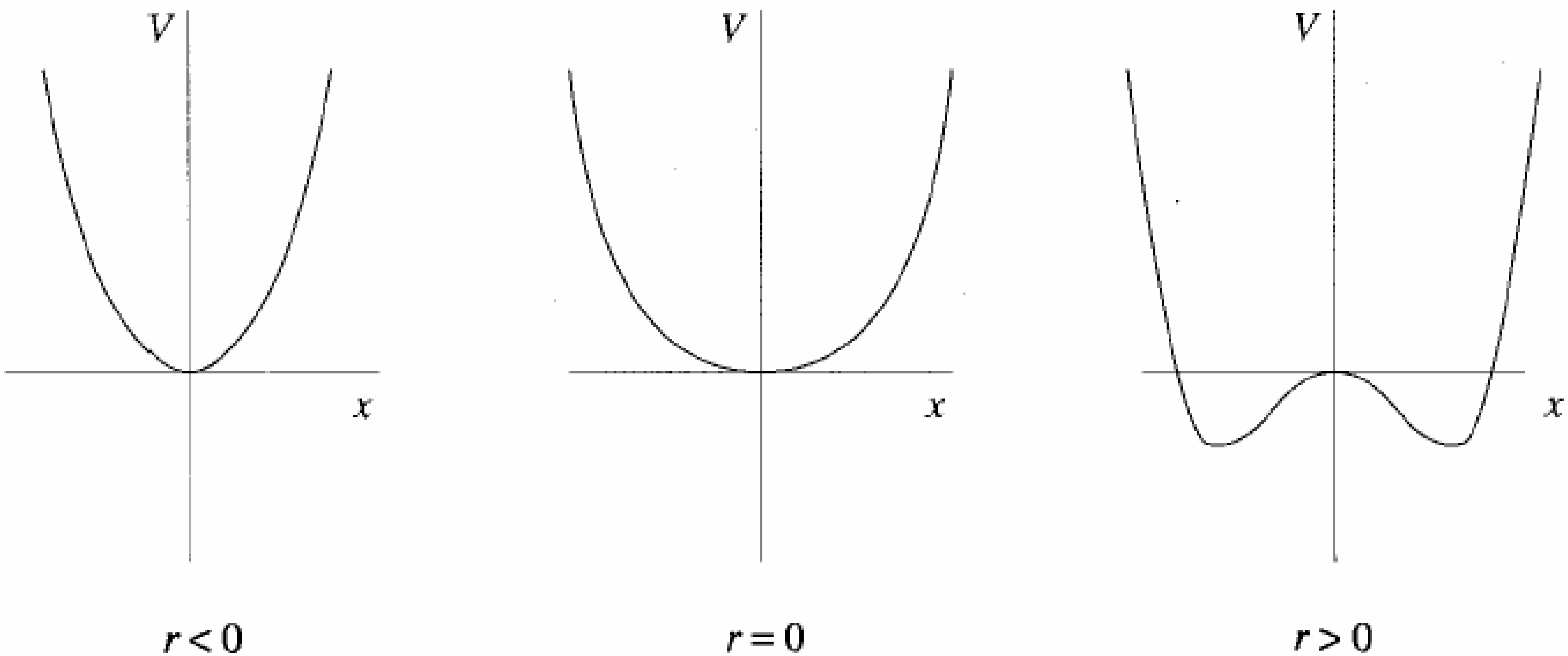


«мягкая потеря устойчивости»

Потенциал для суперкритической «вилки»:

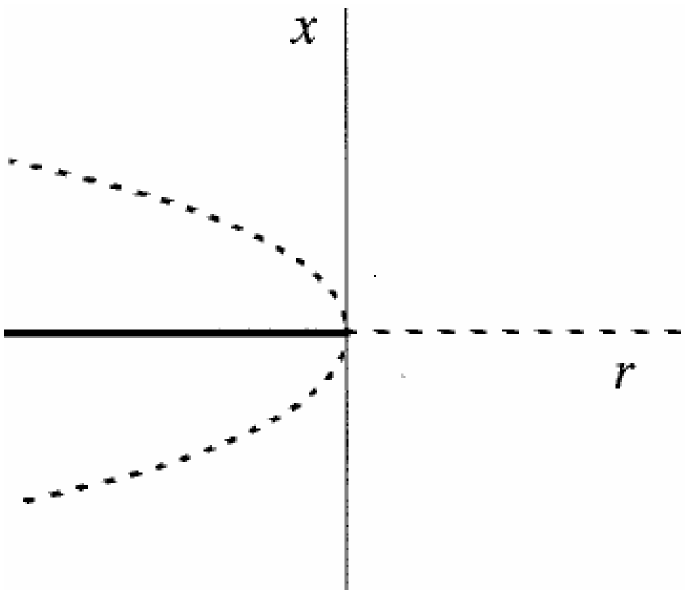
$$\dot{x} = rx - x^3 \quad \Rightarrow \quad -\frac{dV}{dx} = rx - x^3,$$

$$V = -\frac{1}{2}rx^2 + \frac{1}{3}x^4$$



Б) Субкритическая форма бифуркации

$$\dot{x} = rx + x^3$$

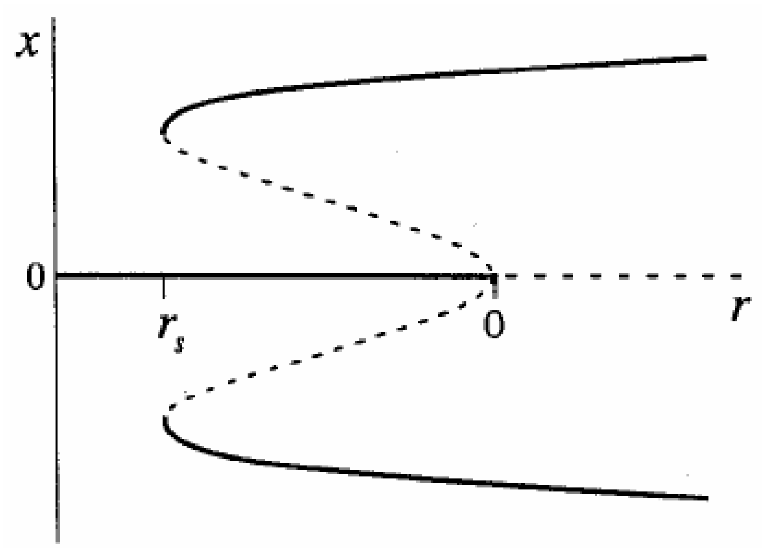


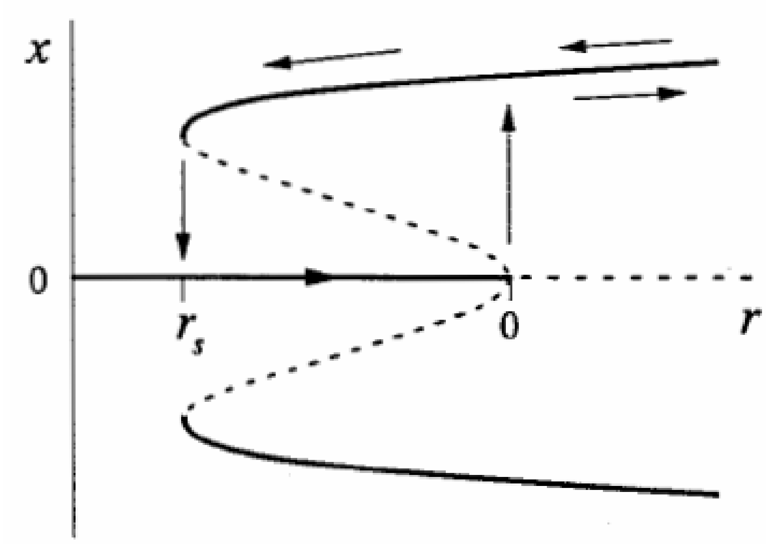
Отличные от нуля неподвижные точки $x^* = \pm\sqrt{-r}$ существуют только при *r < 0* и *неустойчивы*. Неустойчивость точки x=0 при r>0 не компенсируется кубическим членом, как в суперкритическом случае. Решения уходят на бесконечность за конечное время для любого $x_0 \neq 0$.

В реальных физических системах такая взрывная неустойчивость обычно компенсируется членами более высокого порядка.

Пример 3.

$$\dot{x} = rx + x^3 - x^5$$





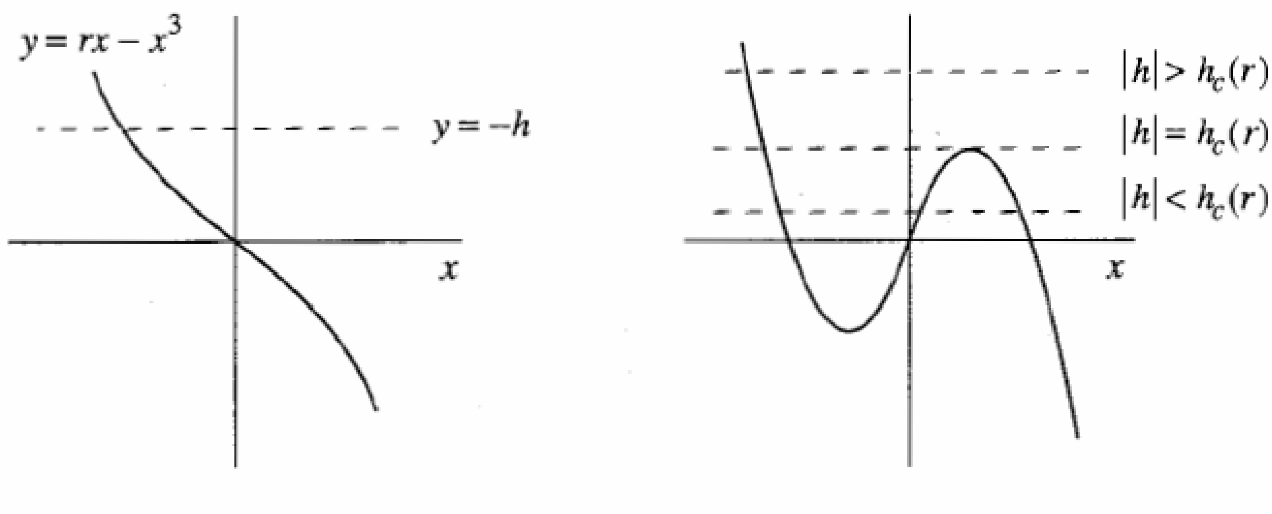
«жёсткая потеря устойчивости»

скачки и гистерезис

2.4 *Невырожденные бифуркации и катастрофы*

$$\dot{x} = h + rx - x^3$$

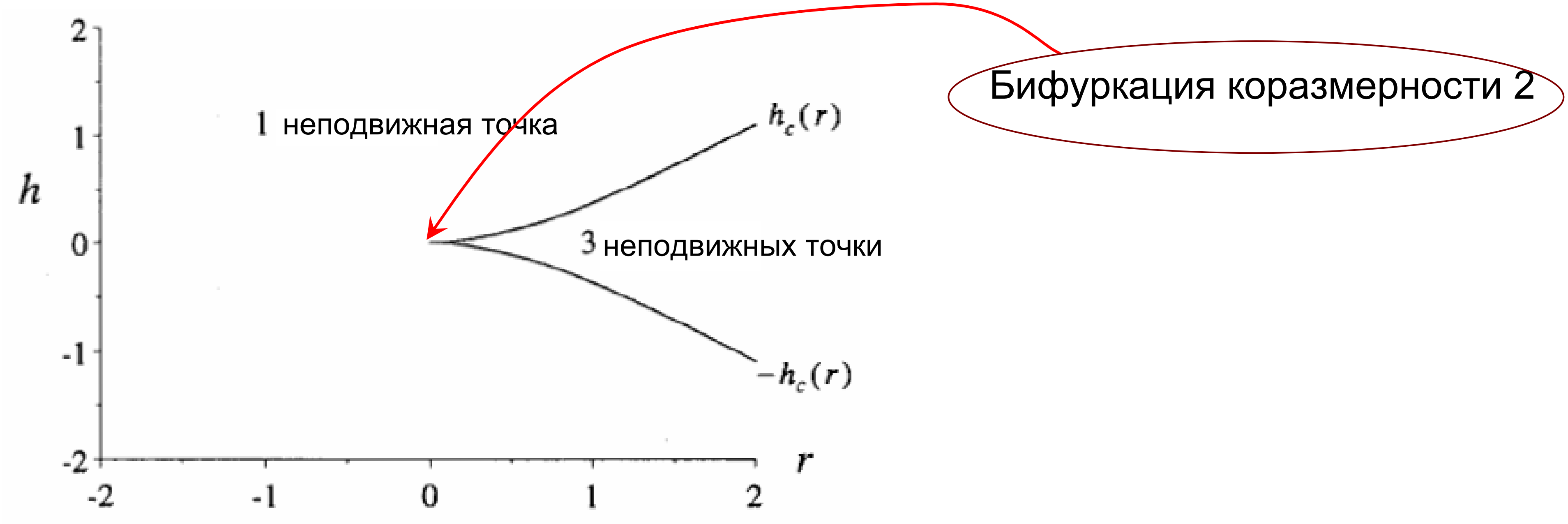
При *h=0* имеем нормальную форму для суперкритической «вилки», симметричную относительно замены *x* → *-x*. При ненулевом *h* симметрия нарушается.



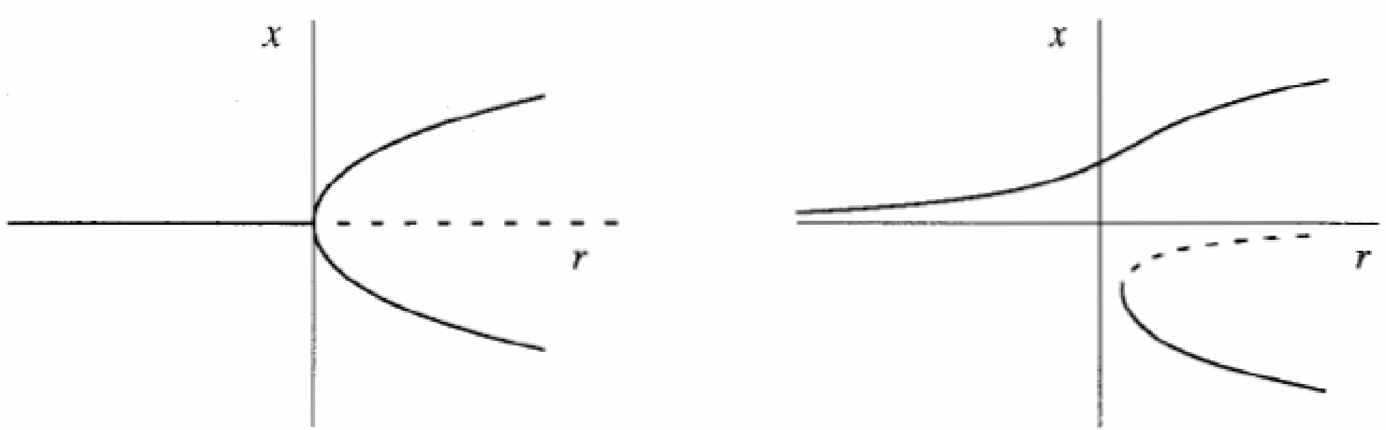
(a) $r \le 0$ (b) $r > 0$

В экстремумах $x = \pm\sqrt{r/3} \;\Rightarrow\; h_c = \dfrac{2}{3} r\sqrt{r/3}$, и при $h = \pm h_c$ происходят бифуркации седло-узел.

Диаграмма устойчивости:

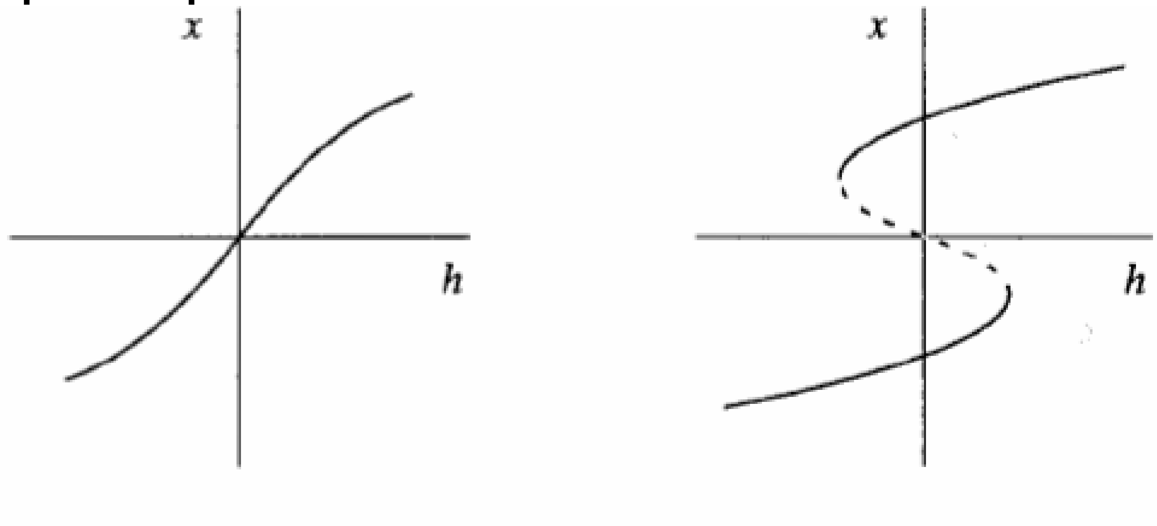


Бифуркационная диаграмма:

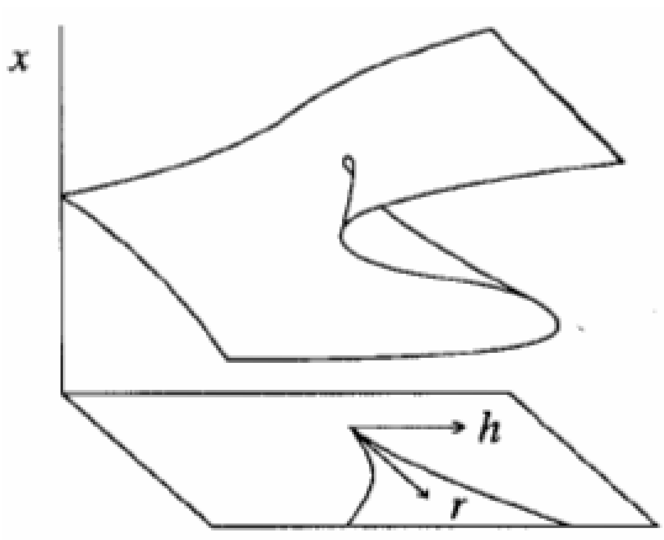


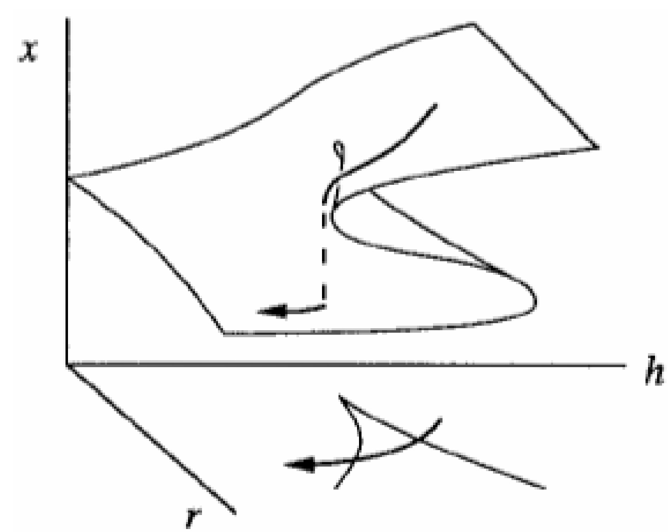
(a) $h = 0$ (b) $h \neq 0$

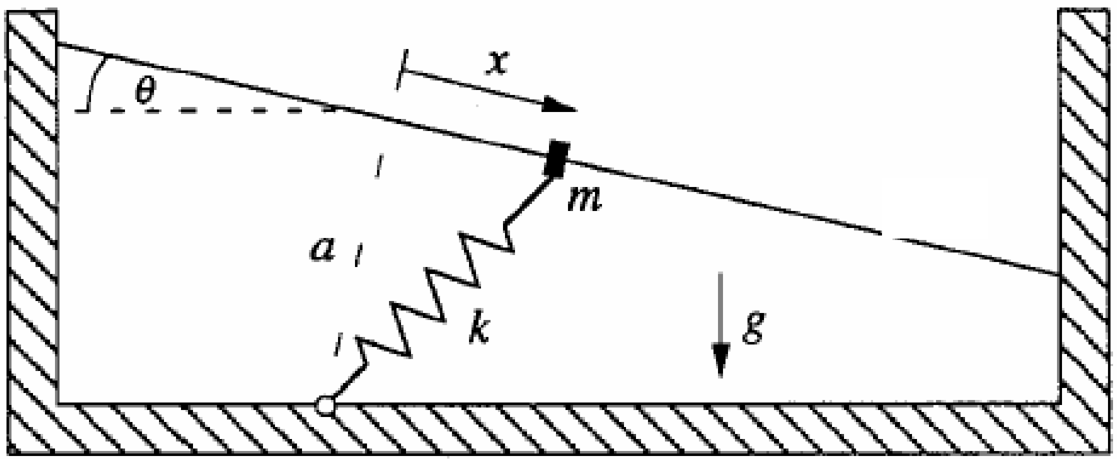
Положение неподвижных точек как функция *h* при фиксированном *r* :



(a) $r \leq 0$ (b) $r > 0$







x
θ
m
a
k
g