

## Лекция 3. Фазовые потоки на плоскости

1. Стационарные точки, линеаризация и устойчивость.
2. Предельные циклы.
3. Бифуркации фазовых потоков на плоскости.

# 1. Стационарные точки, линеаризация и устойчивость.

## 1.1 Фазовая плоскость

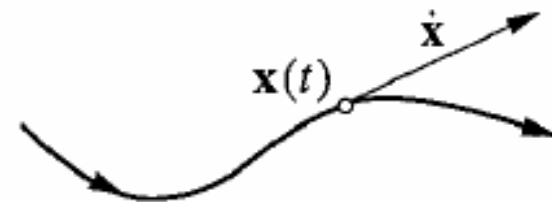
Рассмотрим систему второго порядка:

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2)$$

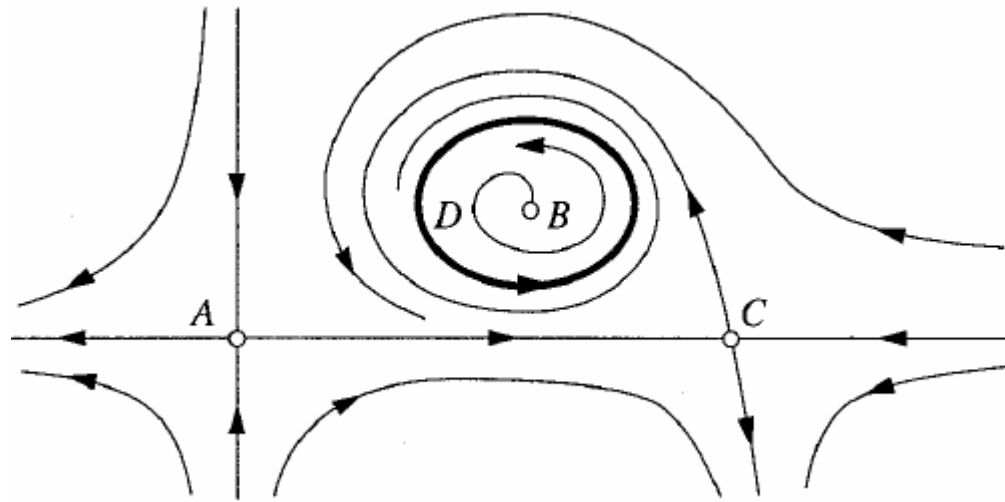
Эта система задает на фазовой плоскости  $(x_1, x_2)$  поле скоростей  $(\dot{x}_1, \dot{x}_2)$ .

В каждой точке фазовой траектории системы поле скоростей направлено по касательной к ней.



Фазовая плоскость заполнена фазовыми траекториями, поскольку каждая точка фазовой плоскости может быть выбрана в качестве начального условия.

Если система нелинейная, то как правило, найти решения аналитически невозможно. Поэтому полезно изучать фазовые портреты.



1. неподвижные точки.
2. Периодические решения.
3. Вид портрета вблизи неподвижных точек и периодических решений.
4. Устойчивость/неустойчивость неподвижных точек и периодических решений.

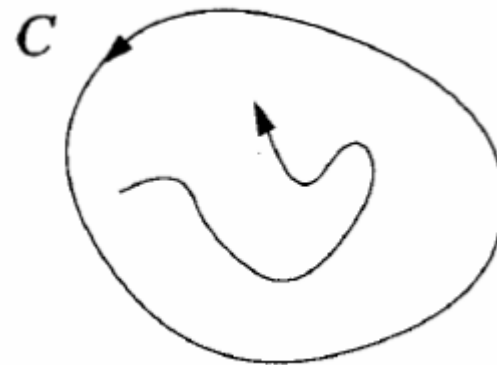
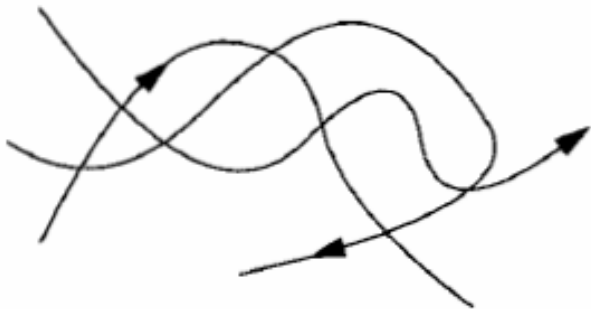
## Теорема существования и единственности.

Рассмотрим задачу на начальные значения:  $\dot{x} = f(x)$ ,  $x(0) = x_0$ .

Пусть  $f$  непрерывна вместе с  $\partial f_i / \partial x_j$ ,  $i, j = 1, \dots, n$  при всех  $x$ , принадлежащих некоторому открытому связному  $D \subset R^n$ .

Тогда для  $x_0 \in D$  задача имеет решение  $x(t)$  на интервале  $(-T, T)$ , и это решение единственно.

Следовательно, фазовые траектории *никогда не пересекаются*. В случае системы на плоскости это приводит к важным топологическим ограничениям.



## 1.1 Линеаризация

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = f(x, y)$$

$$\dot{y} = g(x, y)$$

Пусть  $(x^*, y^*)$  - неподвижная точка:

$$f(x^*, y^*) = 0, \quad g(x^*, y^*) = 0.$$

Обозначим  $u = x - x^*$ ,  $v = y - y^*$  Тогда при малых  $u, v$

$$\dot{u} = u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + O(u^2, v^2, uv)$$

$$\dot{v} = u \frac{\partial g}{\partial x} + v \frac{\partial g}{\partial y} + O(u^2, v^2, uv).$$

Частные производные вычисляются в точке  $(x^*, y^*)$ .

Линеаризованная система:

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Неподвижные точки линейной системы  $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ ,  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

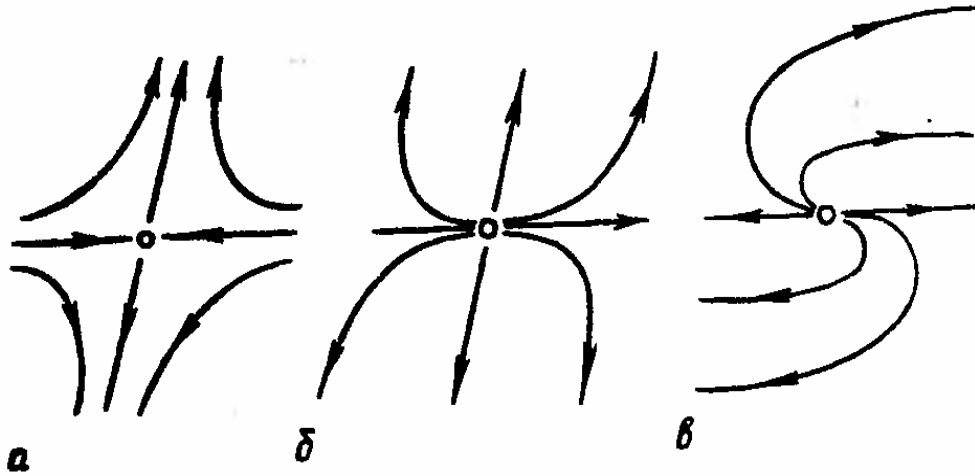
Характеристическое уравнение:  $\lambda^2 - \tau\lambda + \Delta = 0$ , где

$$\tau = \text{trace}(A) = a + d,$$

$$\Delta = \det(A) = ad - bc.$$

Собственные значения:  $\lambda_1 = \frac{\tau + \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2}$ ,  $\lambda_2 = \frac{\tau - \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2}$

# Виды неподвижных точек:



Вещественные с.з.:

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 :$$

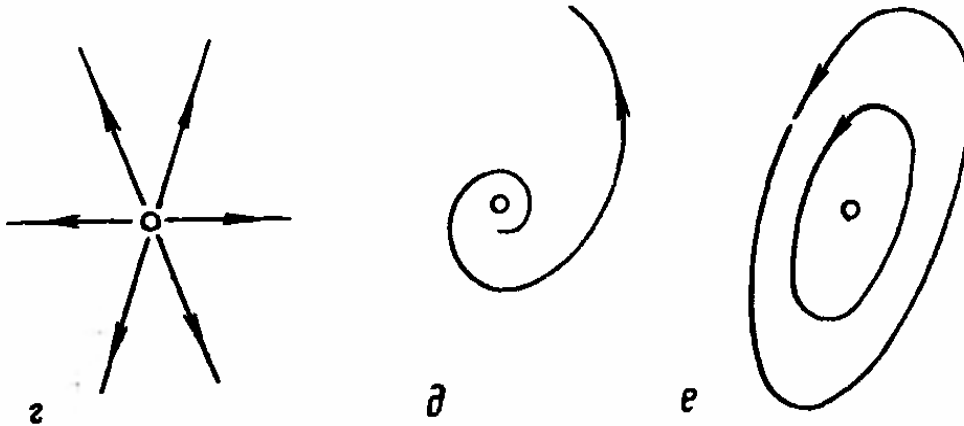
а) седло,  $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$

б) узел, с.з. одного знака

$$\lambda_1 = \lambda_2 :$$

в) вырожденный узел

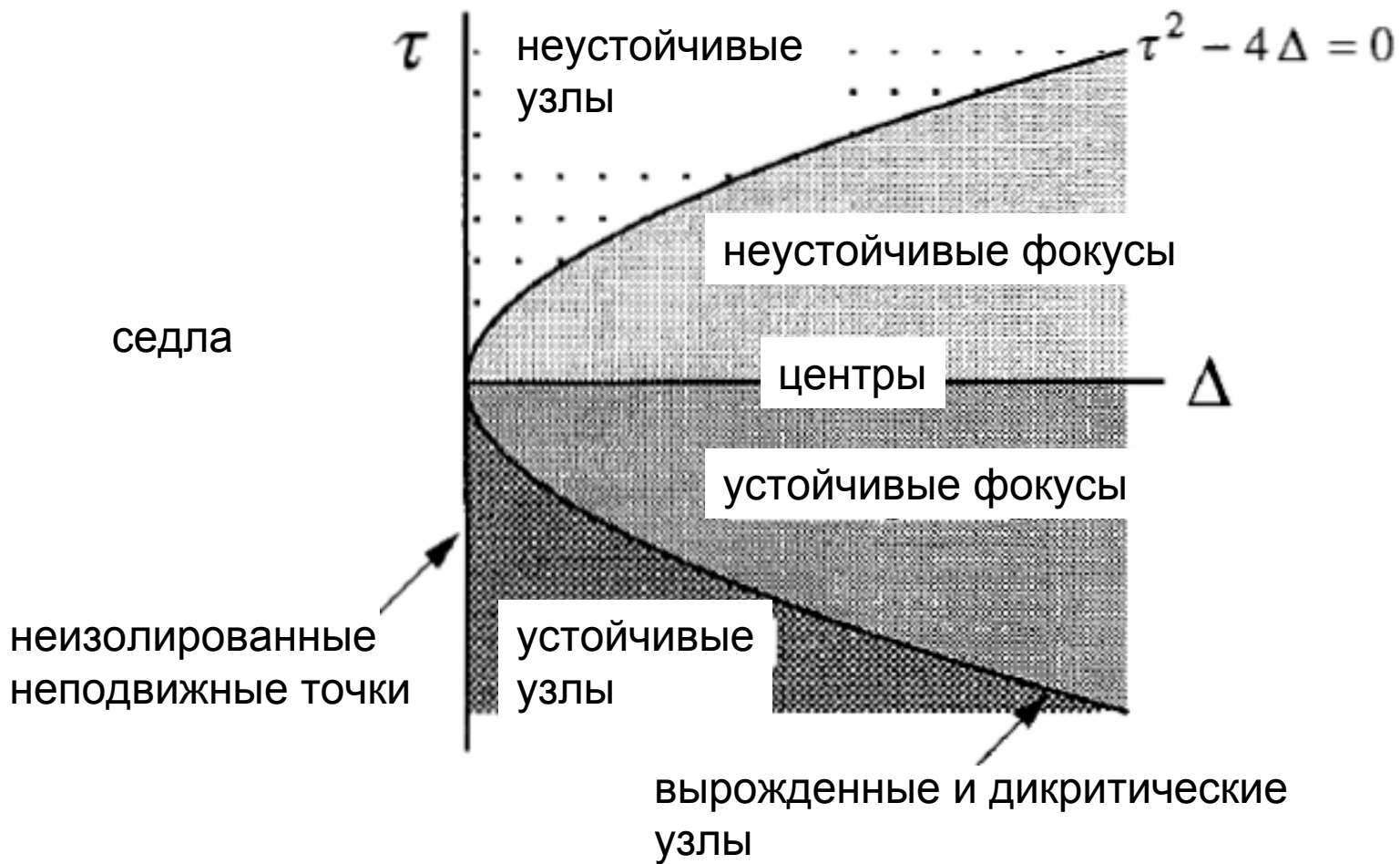
г) дикритический узел



Комплексные с.з.:

д) фокус

е) центр, с.з. чисто мнимы



$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left( \tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta} \right), \quad \Delta = \lambda_1 \lambda_2, \quad \tau = \lambda_1 + \lambda_2$$



# Влияние нелинейных членов

## Пример 1.

$$\dot{x} = -y + ax(x^2 + y^2)$$

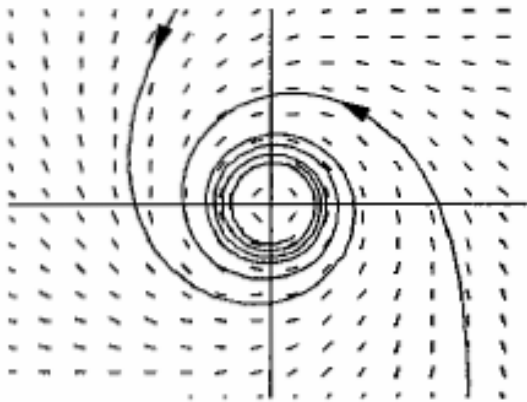
Линеаризация предсказывает центр при  $x = y = 0$ .

$$\dot{y} = x + ay(x^2 + y^2)$$

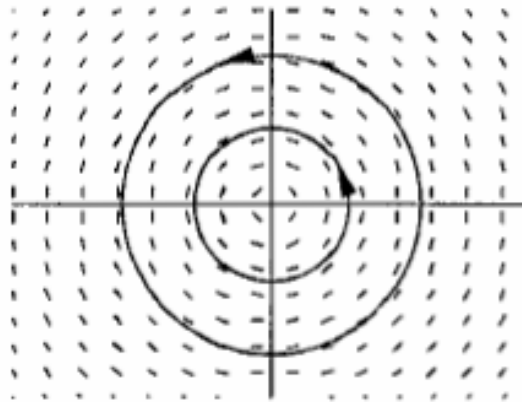
Введем полярные координаты  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ .

После вычислений получим  $\dot{r} = ar^3$

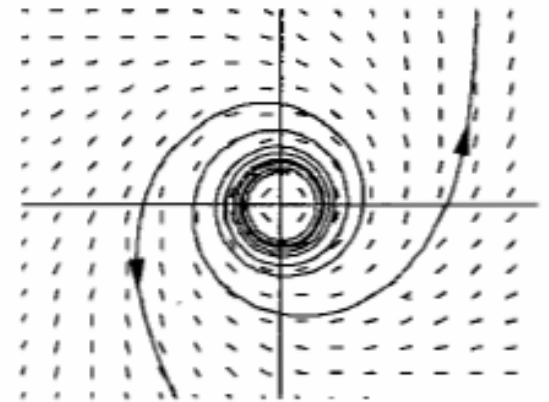
$$\dot{\theta} = 1.$$



$a < 0$



$a = 0$



$a > 0$

Если оба с.з. имеют ненулевую действительную часть, тип устойчивости не может быть изменен малыми нелинейными членами (теорема Хартмана-Гробмана).

Центры, тем не менее, важны при исследовании *консервативных систем*.

Система  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  называется консервативной, если существует отличная от константы действительная непрерывная функция  $E(\mathbf{x})$ , которая постоянна вдоль траекторий системы:  $dE/dt=0$ .

Консервативная система не может иметь притягивающих/отталкивающих неподвижных точек. В общем случае она может иметь только седла и центры.

**Пример 2.** Движение в двойной яме.

Потенциал:  $V(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4$ . Сила:  $-dV/dx = x - x^3$  .

Уравнение движения:  $\ddot{x} = x - x^3$  .

$$\dot{x} = y$$

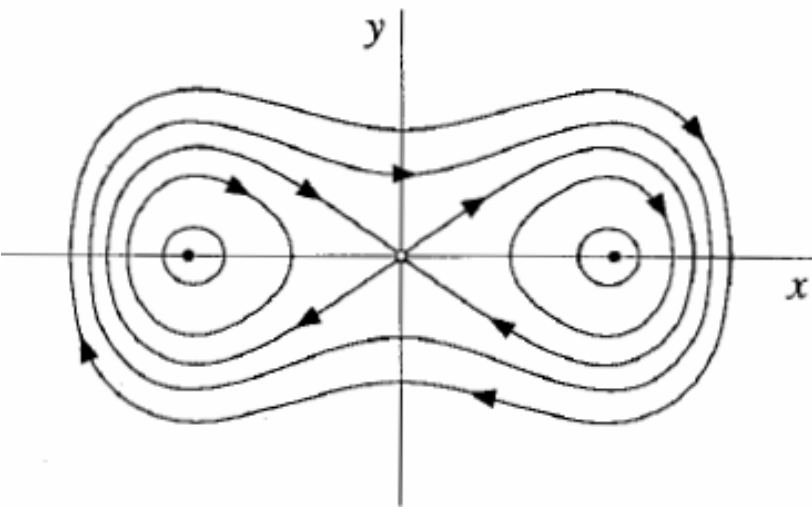
$$\dot{y} = x - x^3$$

Неподвижные точки:  $(0,0)$  и  $(\pm 1,0)$ . Матрица Якоби:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - 3x^2 & 0 \end{pmatrix}$$

В точке  $(0,0)$   $\Delta = -1$ , следовательно, это седло. В  $(\pm 1,0)$   $\Delta = 2$ ,  $\tau = 0$ , следовательно, это центр (в линейном приближении). А что в действительности?

Фазовые траектории лежат на линиях уровня сохраняющейся величины – энергии:  $E = \frac{1}{2} y^2 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{4} x^4 = \text{const}$ .

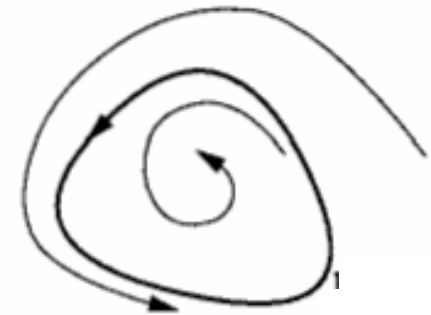
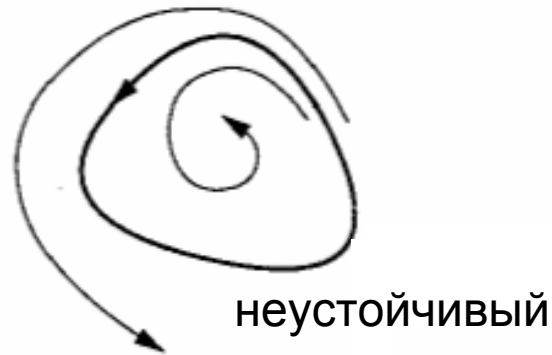


Все траектории периодические, кроме неподвижных точек и двух гомоклинических траекторий.

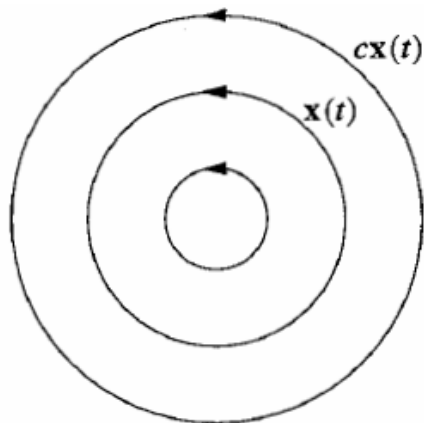
Вообще, если  $\mathbf{x}^*$  - изолированная неподвижная точка, и  $E(\mathbf{x})$  имеет в этой точке локальный экстремум, то все траектории, достаточно близкие к  $\mathbf{x}^*$ , замкнуты.

## 2. Предельные циклы.

Предельным циклом называется *изолированная* замкнутая фазовая траектория.



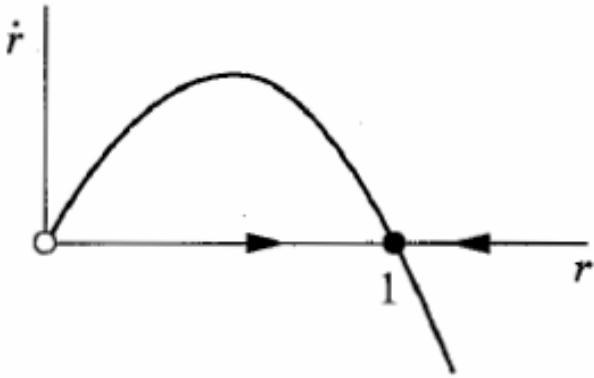
С физической точки зрения, предельным циклам соответствуют автоколебательные режимы. Предельные циклы возможны только в нелинейных системах. Замкнутые



траектории в линейных системах неизолированы, амплитуда колебаний определяется н.у. При наличии устойчивого предельного цикла свойства установившихся колебаний определяются только системой.

### Пример 3.

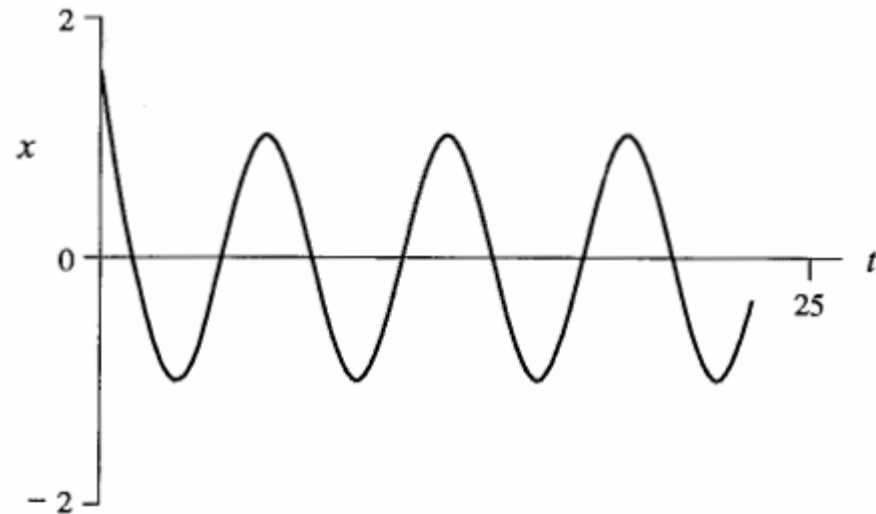
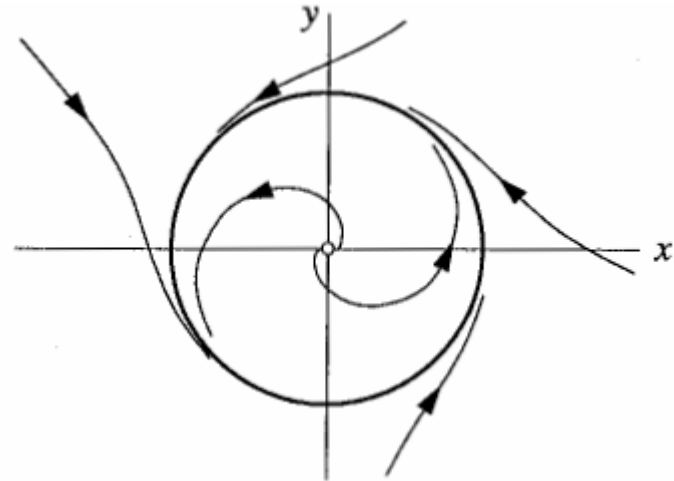
$$\dot{r} = r(1 - r^2), \quad \dot{\theta} = 1, \quad r \geq 0$$



$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

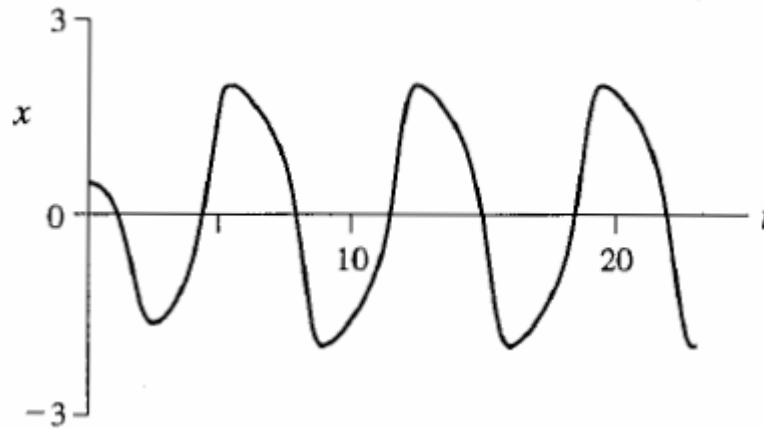
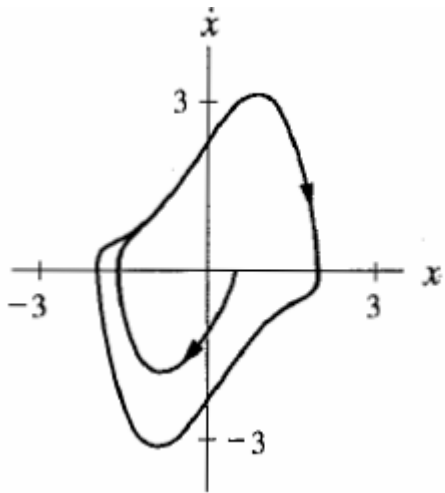
$$x = \cos(t + \theta_0)$$



## Пример 4. Осциллятор Ван-дер-Поля

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$$

Нелинейное затухание  $\mu(x^2 - 1)\dot{x}$  приводит к затуханию при  $|x| > 1$  и к накачке при  $|x| < 1$ . (Похоже, что система может приходить в режим автоколебаний.) Можно доказать, что при  $\mu > 0$  система имеет единственный устойчивый предельный цикл.



$$\mu = 1.5$$

При  $t=0$

$$(x, \dot{x}) = (0.5, 0)$$

Как правило, аналитические поиски циклов представляют собой непростую задачу. Есть несколько рецептов.

## Предельных циклов не бывает:

1) В градиентных системах:  $\dot{\mathbf{x}} = -\nabla V$ , где  $V$  – непрерывно дифференцируемая однозначная скалярная функция  $x$ .

Предположим, что есть замкнутая фазовая траектория. Тогда за один обход вокруг нее  $\Delta V=0$  (поскольку  $V$  – однозначная). С другой стороны,

$$\Delta V = \int_0^T \frac{dV}{dt} dt = \int_0^T (\nabla V \cdot \dot{\mathbf{x}}) dt = - \int_0^T \|\dot{\mathbf{x}}\|^2 dt < 0$$

2) Если есть глобально асимптотически устойчивая точка: любая траектория  $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{x}^*$  при  $t \rightarrow \infty$ .

3) Критерий Дюлака: пусть  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  непрерывно дифференцируемое поле скоростей на открытом связном (без дырок) подмножестве плоскости  $R$ . Если существует непрерывно дифференцируемая действительная  $g(\mathbf{x})$ , такая что  $\nabla \cdot (g\dot{\mathbf{x}})$  знакопостоянна в  $R$ , то в  $R$  нет замкнутых траекторий.

Пусть  $C$  – замкнутая фазовая траектория в  $R$ ,  $A$  – ограниченная ей область.

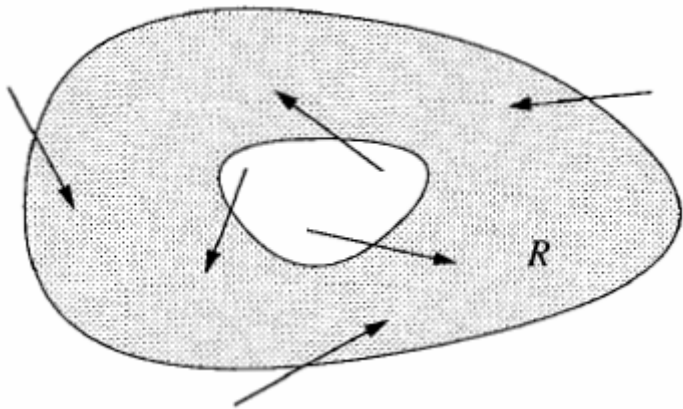
По теореме Грина

$$\iint_A \nabla \cdot (g\dot{\mathbf{x}}) dA = \oint_C g\dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{n} d\ell$$



Теорема Пуанкаре-Бендиксона:

Пусть 1)  $R$  – замкнутое ограниченное подмножество плоскости, 2)  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  – непрерывно дифференцируемое векторное поле на открытом множестве, содержащем  $R$ , 3)  $R$  не содержит неподвижных точек, 4) существует траектория  $C$  с начальным условием в  $R$ , остающаяся в  $R$  при всех  $t > 0$ . Тогда  $R$  содержит замкнутую траекторию.



Для применения теоремы можно попытаться построить область  $R$ , такую что на всей ее границе поле скоростей направлено внутрь  $R$ .

## Пример 5.

$$\dot{r} = r(1 - r^2) + \mu r \cos \theta$$

$$\dot{\theta} = 1.$$

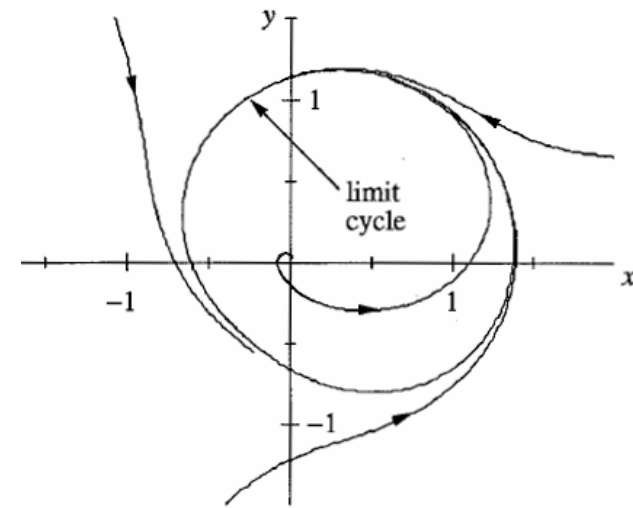
При  $\mu=0$  имеется предельный цикл с  $r = 1$ . Сохраняется ли он при  $\mu > 0$ ?

Построим две концентрические окружности с радиусами  $r_{\min}$  и  $r_{\max}$ , такие что  $\dot{r}(r_{\max}) < 0$ ,  $\dot{r}(r_{\min}) > 0$ . Тогда кольцо между ними и будет нужной областью  $R$ .

$$r_{\min} : \dot{r} = r(1 - r^2) + \mu r \cos \theta > 0 \Rightarrow r_{\min} < \sqrt{1 - \mu}$$

$$r_{\max} : r_{\max} > \sqrt{1 + \mu}$$

На самом деле, в этой системе предельный цикл существует и при  $\mu > 1$ .

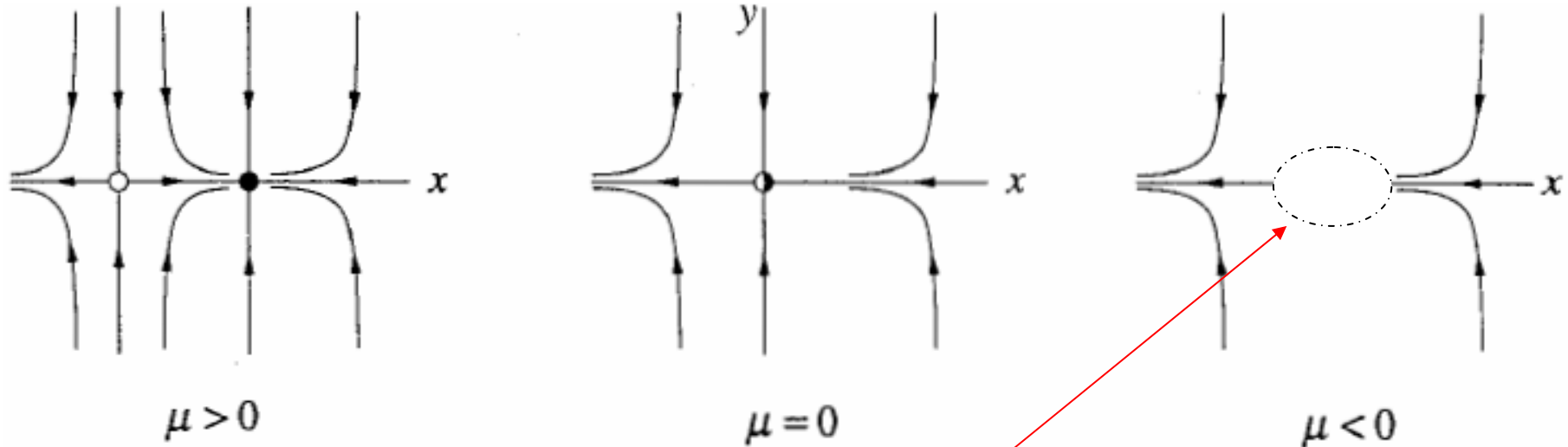


### 3. Бифуркации фазовых потоков на плоскости.

*Седло-узел:*

$$\dot{x} = \mu - x^2$$

$$\dot{y} = -y.$$



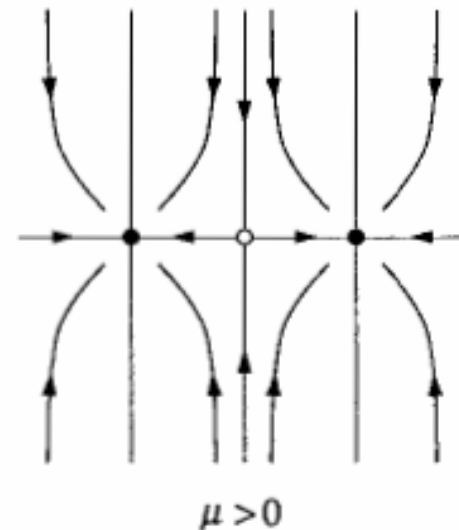
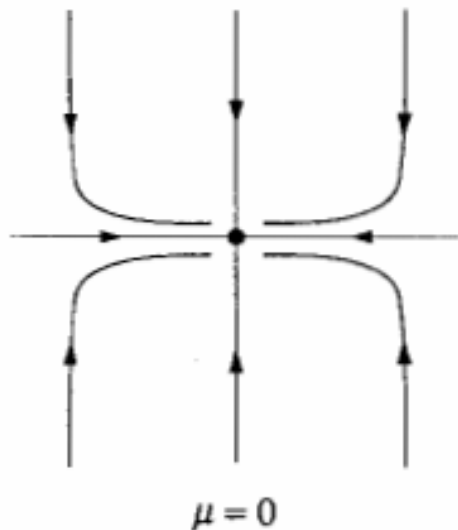
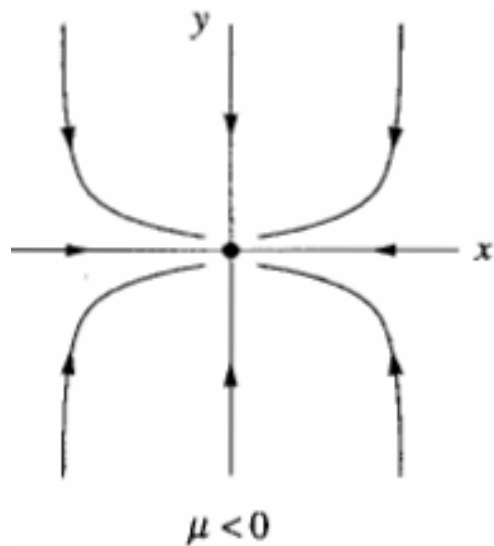
После бифуркации остается «призрак»: время прохождения через него порядка

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\mu - x^2} \sim |\mu|^{-1/2}$$

## Суперкритическая вилка:

$$\dot{x} = \mu x - x^3$$

$$\dot{y} = -y$$



## Субкритическая вилка:

$$\dot{x} = \mu x + x^3$$

$$\dot{y} = -y$$

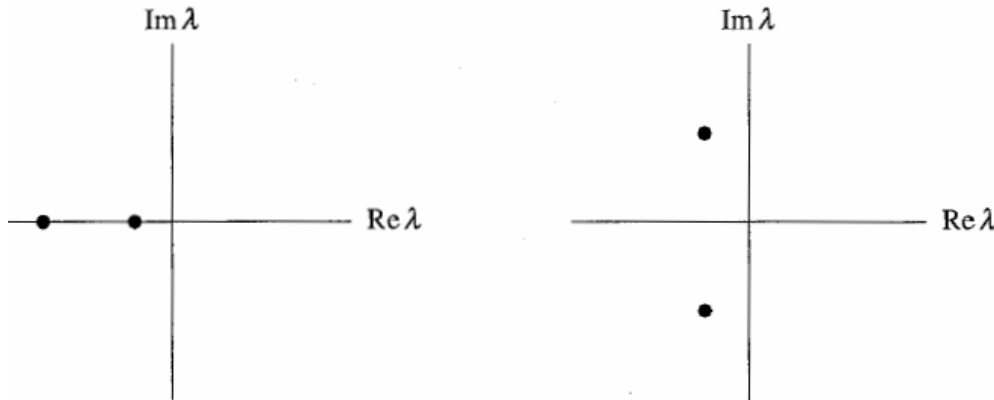
## Транскритическая бифуркация:

$$\dot{x} = \mu x - x^2$$

$$\dot{y} = -y$$

# Бифуркация Пуанкаре-Андронов-Хопфа

С.з. устойчивой неподвижной точки на плоскости:



Чтобы точка потеряла устойчивость, необходимо, чтобы одно или оба с.з. перешли в правую полуплоскость при изменении параметра.

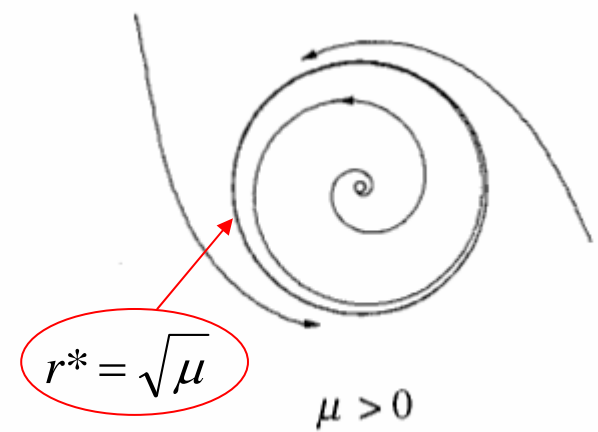
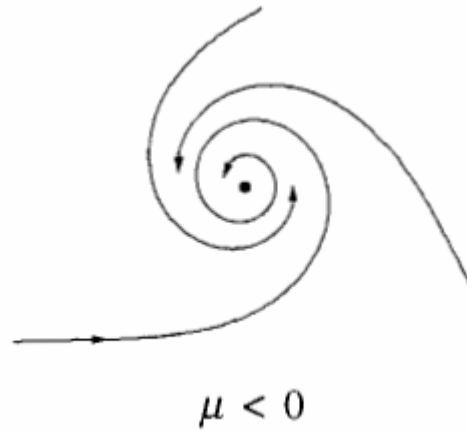
Суперкритическая форма.

При переходе двух с.з. в правую полуплоскость устойчивый фокус становится неустойчивым. При этом из неподвижной точки может родиться устойчивый предельный цикл.

## Пример 6.

$$\dot{r} = \mu r - r^3$$

$$\dot{\theta} = \omega + br^2$$



Перейдем к декартовым координатам  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ :

$$\dot{x} = \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta$$

$$= (\mu r - r^3) \cos \theta - r(\omega + br^2) \sin \theta$$

$$= (\mu - [x^2 + y^2])x - (\omega + b[x^2 + y^2])y$$

$$= \mu x - \omega y + \text{члены третьего порядка}$$

$$\dot{y} = \omega x + \mu y + \text{члены третьего порядка}$$

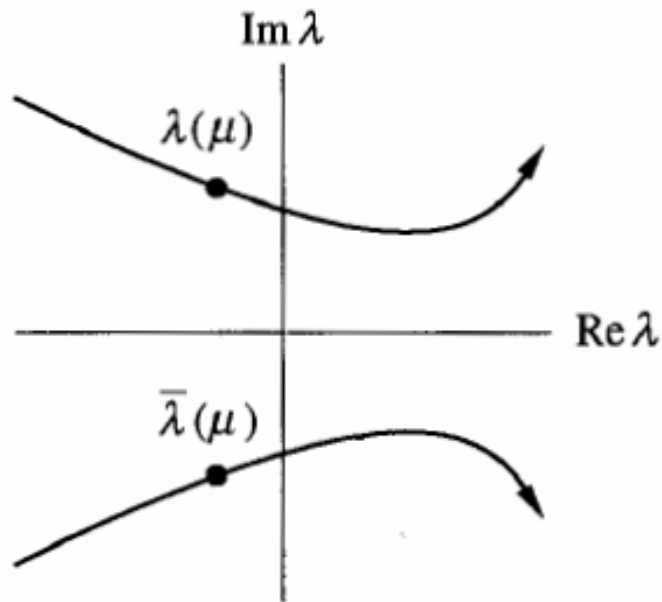
$$A = \begin{pmatrix} \mu & -\omega \\ \omega & \mu \end{pmatrix}, \quad \lambda = \mu \pm i\omega.$$

Вообще, при суперкритической бифуркации:

а) предельный цикл имеет размер порядка  $\sqrt{\mu - \mu_c}$

б) частота цикла приблизительно равна  $\text{Im } \lambda \Big|_{\mu = \mu_c}$

Цикл, вообще говоря, имеет при рождении эллиптическую форму. С.з. пересекают мнимую ось, двигаясь по кривым:



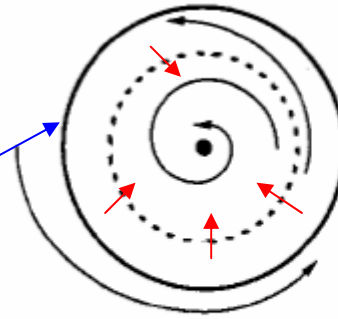
# Субкритическая форма бифуркации.

## Пример 7.

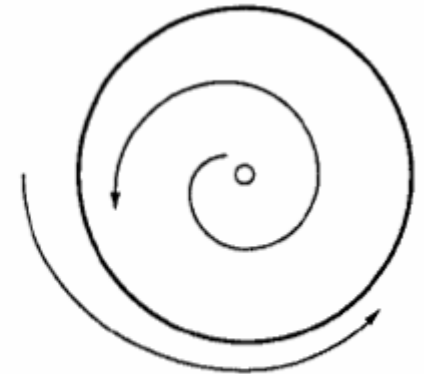
$$\dot{r} = \mu r + r^3 - r^5$$

$$\dot{\theta} = \omega + br^2.$$

предельный  
цикл, связан-  
ный с членом  $r^5$



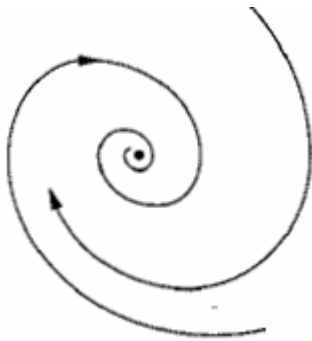
$\mu < 0$



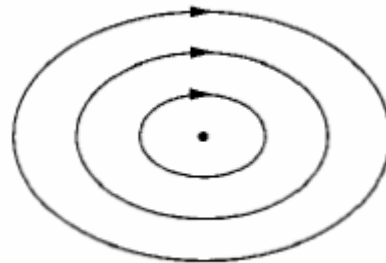
$\mu > 0$

# Вырожденная форма бифуркации.

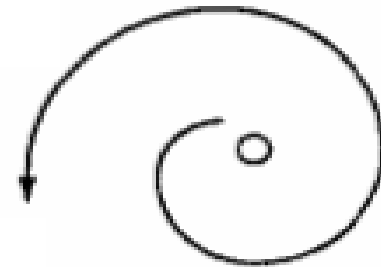
$$\ddot{x} + \mu \dot{x} + \sin x = 0$$



$\mu > 0$



$\mu = 0$



$\mu < 0$



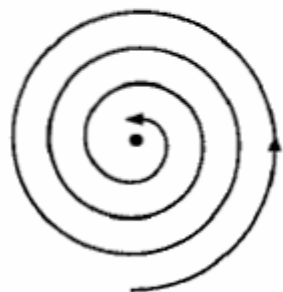
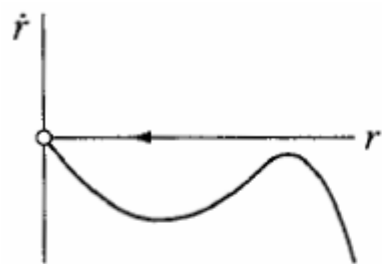
# Нелокальные бифуркации циклов

## Бифуркация цикла типа «седло-узел»

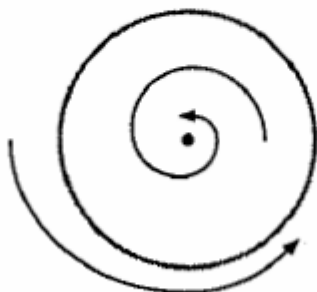
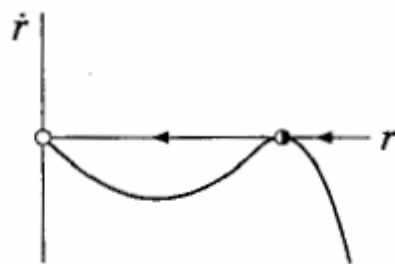
$$\dot{r} = \mu r + r^3 - r^5$$

$$\dot{\theta} = \omega + br^2$$

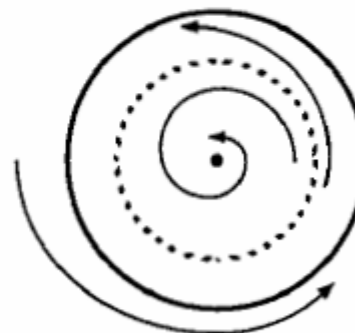
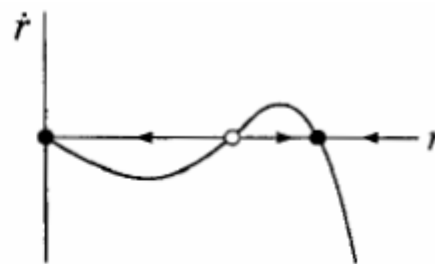
$$\mu < 0$$



$$\mu < \mu_c$$



$$\mu = \mu_c$$



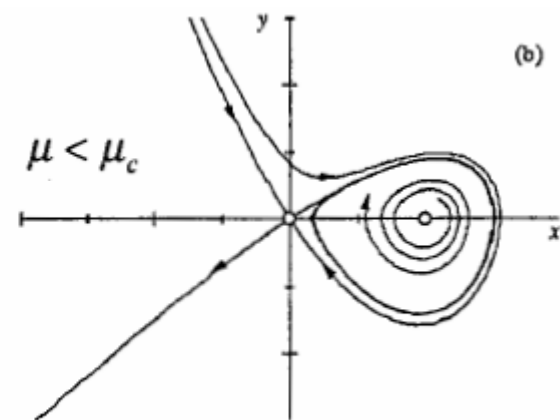
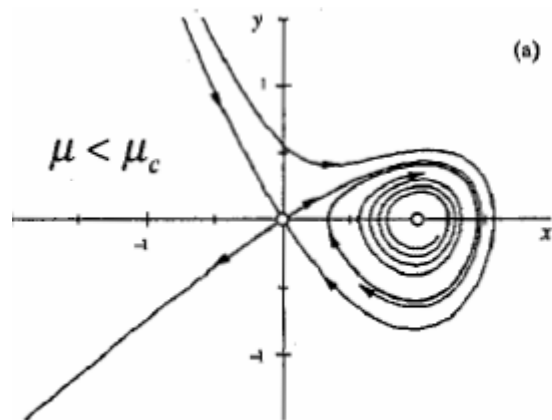
$$0 > \mu > \mu_c$$

$$\mu_c = -1/4$$

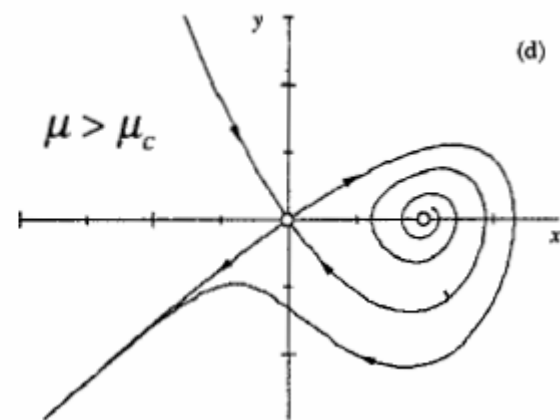
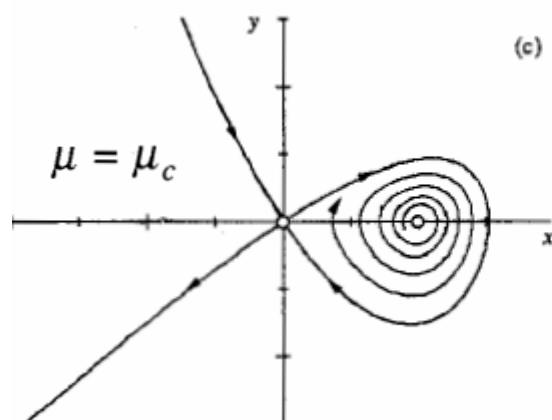
# Гомоклиническая бифуркация рождения/исчезновения цикла

$$\dot{x} = y$$

$$\dot{y} = \mu y + x - x^2 + xy$$



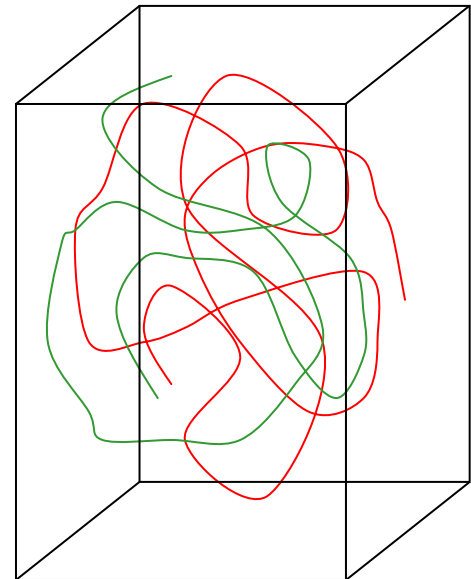
$$\mu_c \approx -0.8645.$$



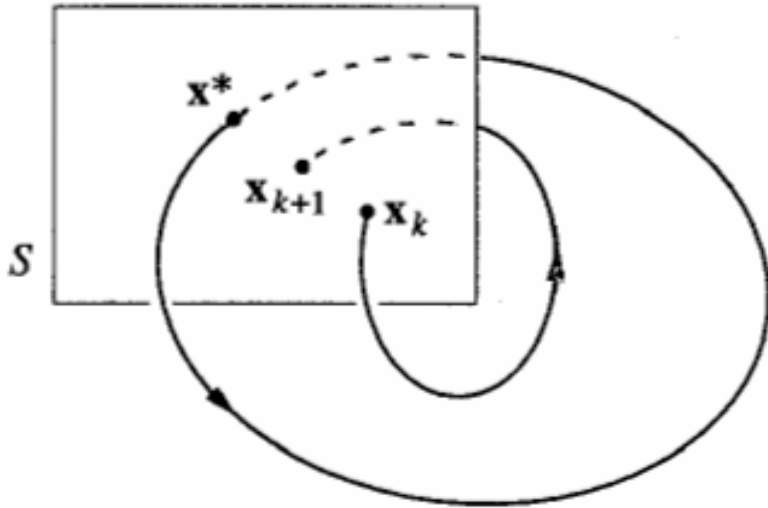
## 4. Размерность фазового пространства $n > 2$

Фазовые траектории не могут пересекаться, поэтому динамика на плоскости не может быть хаотической. Траектории, которые не уходят на бесконечность, могут либо притягиваться к неподвижным точкам, либо наматываться на предельные циклы (либо, в консервативном случае, быть замкнутыми).

Если размерность фазового пространства  $n > 2$ , динамика может быть гораздо более сложной.



# Отображение Пуанкаре



$$\mathbf{x}_{k+1} = P(\mathbf{x}_k)$$

$$P(\mathbf{x}^*) = \mathbf{x}^*$$

Неподвижной точке  $x^*$  отображения Пуанкаре соответствует периодическая траектория исходной системы.

Исследуя свойства отображения  $P$  вблизи неподвижной точки, можно определить устойчивость периодической траектории. Если  $x^*$  - устойчивая неподвижная точка  $P$ , то и соответствующая периодическая траектория устойчива.

$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  - система с замкнутой траекторией,  $\mathbf{x}^*$  - соответствующая неподвижная точка отображения Пуанкаре. Пусть  $\mathbf{v}_0$  – малое начальное возмущение. Тогда

$$\mathbf{x}^* + \mathbf{v}_1 = P(\mathbf{x}^* + \mathbf{v}_0)$$

$$= P(\mathbf{x}^*) + [DP(\mathbf{x}^*)]\mathbf{v}_0 + O(\|\mathbf{v}_0\|^2)$$

линейная часть  $P$ ,  
матрица  $(n-1) \times (n-1)$

$$\mathbf{v}_1 = [DP(\mathbf{x}^*)]\mathbf{v}_0$$

Замкнутая траектория линейно устойчива тогда и только тогда, когда все с.з. матрицы  $DP(\mathbf{x}^*)$  по модулю меньше единицы.

Пусть все  $\lambda_j$  различны. Тогда существует базис  $\{\mathbf{e}_j\}$  собственных векторов. Разложим по этому базису:

$$\mathbf{v}_0 = \sum_{j=1}^{n-1} v_j \mathbf{e}_j$$

$$\mathbf{v}_1 = (DP(\mathbf{x}^*)) \sum_{j=1}^{n-1} v_j \mathbf{e}_j = \sum_{j=1}^{n-1} v_j \lambda_j \mathbf{e}_j$$

$$\mathbf{v}_k = \sum_{j=1}^{n-1} v_j (\lambda_j)^k \mathbf{e}_j$$

Если все  $|\lambda_j| < 1$ , то  $\|\mathbf{v}_k\| \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ , и  $\mathbf{x}^*$  линейно устойчива.

Числа  $\lambda_j$  называются характеристическими показателями.