Лекция 4. Гамильтоновы системы

1. Уравнения Гамильтона.
2. Интегрируемые гамильтоновы системы.
3. Теория возмущений интегрируемых гамильтоновых систем.

1. Уравнения Гамильтона.

1.1 *Основные свойства*

Будем называть систему в 2N-мерном фазовом пространстве гамильтоновой, если существуют такие переменные

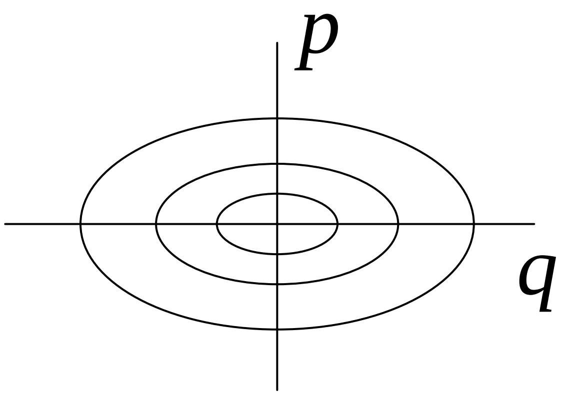
$p \in \mathrm{R}^N, \quad q \in \mathrm{R}^N$ и скалярная функция *H(p,q,t)*, что система записывается в виде

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}; \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1,\ldots,N$$

Пример 1. Линейный осциллятор

$$H = \frac{p^2}{2} + \omega^2 \frac{q^2}{2}$$

$$\begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = -\omega^2 q \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \ddot{q} + \omega^2 q = 0$$



1. Если гамильтониан не зависит явно от времени, он сохраняется вдоль фазовых траекторий гамильтоновой системы (является первым интегралом):

$$\frac{dH}{dt} = \sum \left(\frac{\partial H}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial H}{\partial p_j} \dot{p}_j \right) + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

2. Гамильтонова система сохраняет фазовый объем:

$$\operatorname{div} v_H = \sum \left(\frac{\partial}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_j} \right) = 0$$

$v_H = \begin{pmatrix} \partial H/\partial p \\ -\partial H/\partial q \end{pmatrix}$ - поле скоростей гамильтоновой системы.

1.2 *Скобки Пуассона*

Рассмотрим некоторую функцию $f(p,q,t)$. Её полная производная в силу системы равна:

$$\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i}\dot{p}_i\right) + \frac{\partial f}{\partial t} =$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial f}{\partial p_i}\right) + \frac{\partial f}{\partial t} = \{H, f\} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

Скобкой Пуассона функций *g* и *f* называется функция

$$\{g, f\} = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial g}{\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial q_i} - \frac{\partial g}{\partial q_i}\frac{\partial f}{\partial p_i}\right)$$

Функция f сохраняется вдоль траекторий системы тогда и только тогда, когда $\{H,f\} = 0$.

Свойства скобки Пуассона:

1. $\{f,g\} = -\{g,f\}$

2. $\{f+g,h\} = \{f,h\} + \{g,h\}$

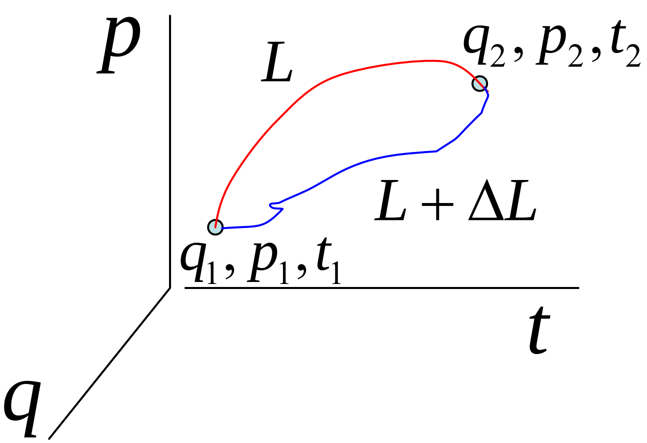
3. $\{fg,h\} = f\{g,h\} + g\{f,h\}$

4. $\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\} = 0$

Из свойства 4 вытекает теорема Пуассона: если *f* и *g* – постоянные движения, то {*f*,*g*} тоже является постоянной движения.

$$\left.\begin{array}{l}\{H,f\}=0\\ \{H,g\}=0\end{array}\right. \Rightarrow \{H,\{f,g\}\}=0$$

1.3 *Канонические преобразования*



На L: $p = p(t)$, $q = q(t)$

На $L+\Delta L$: $p = p(t) + \Delta p(t)$, $q = q(t) + \Delta q(t)$

Рассмотрим величину (функционал действия):

$$J(L) = \int_{t_1}^{t_2} (p\,dq - H\,dt)$$

$$J(L+\Delta L) = \int_{t_1}^{t_2} (p+\Delta p)\,d(q+\Delta q) - H(p+\Delta p, q+\Delta q)\,dt =$$

$$= J(L) + \int_{t_1}^{t_2} p\,d(\Delta q) + \Delta p\,dq - \frac{\partial H}{\partial p}\Delta p\,dt - \frac{\partial H}{\partial q}\Delta q\,dt + \ldots =$$

$$= J(L) + p\Delta q\Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left(-dp - \frac{\partial H}{\partial q}dt\right)\Delta q + \left(dq - \frac{\partial H}{\partial p}dt\right)\Delta p$$

уравнения Гамильтона $\Leftrightarrow$ вариация действия обращается в ноль

Будем искать каноническое преобразование, исходя из вариационного принципа. То есть, преобразование должно сохранять форму $p\,\mathrm{d}q - H\,\mathrm{d}t$.

Определим преобразование $(p,q) \to (P,Q)$ следующим образом: зададим функцию $S(q,P,t)$,

$$p = \frac{\partial S}{\partial q}\ ; \quad Q = \frac{\partial S}{\partial P}$$

$$J(L) = \int_{t_1}^{t_2} p\,dq - H\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial S}{\partial q}\,dq - H\,dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial S}{\partial q}\,dq + \frac{\partial S}{\partial P}\,dP + \frac{\partial S}{\partial t}\,dt - \frac{\partial S}{\partial P}\,dP - \frac{\partial S}{\partial t}\,dt - H\,dt =$$

$$J(L)=\int_{t_1}^{t_2} p\,dq - H\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial S}{\partial q}\,dq - H\,dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial S}{\partial q}\,dq + \frac{\partial S}{\partial P}\,dP + \frac{\partial S}{\partial t}\,dt - \frac{\partial S}{\partial P}\,dP - \frac{\partial S}{\partial t}\,dt - H\,dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dS - Q\,dP - \left(H + \frac{\partial S}{\partial t}\right)dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} d(S-PQ) + P\,dQ - \left(H + \frac{\partial S}{\partial t}\right)dt$$

Таким образом, исходная задача эквивалентна задаче о вариации функционала

$$\int_{t_1}^{t_2} P\,dQ - \left(H + \frac{\partial S}{\partial t}\right)dt$$

Следовательно, уравнения движения в новых переменных (P,Q) – гамильтоновы с новым гамильтонианом

$$\mathcal{H} = H + \frac{\partial S}{\partial t}$$

Пример 2. Тождественное преобразование

$$S(q,P) = Pq \Rightarrow p = \frac{\partial S}{\partial q} = P, \quad Q = \frac{\partial S}{\partial P} = q$$

2. Интегрируемые гамильтоновы системы

Рассмотрим (не обязательно гамильтонову) систему

$$\dot{x} = f(x), \qquad x \in M^n \subset R^n$$

Непостоянная функция $F(x)$ на M^n называется первым интегралом этой системы, если $F(x(t))$ = const для всех решений $x(t)$.

Существование первого интеграла позволяет (в принципе) понизить порядок системы на единицу. Если есть (n – 1) первых интегралов, система интегрируема.

Гамильтоновский случай.

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}; \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1,\ldots,N$$

Пусь F – первый интеграл. Можно (в принципе) сделать такую каноническую замену координат $(p,q) \mapsto (y,x)$, что $F(y,x) = y_N$. Тогда гамильтониан в новых переменных не содержит переменную x_N. Следовательно,

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial y_i}; \quad \dot{y}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad i = 1,\ldots,N-1$$

-гамильтонова система с N -1 степенью свободы. Т.о., один первый интеграл гамильтоновой системы позволяет понизить на единицу число степеней свободы (а порядок системы на два).

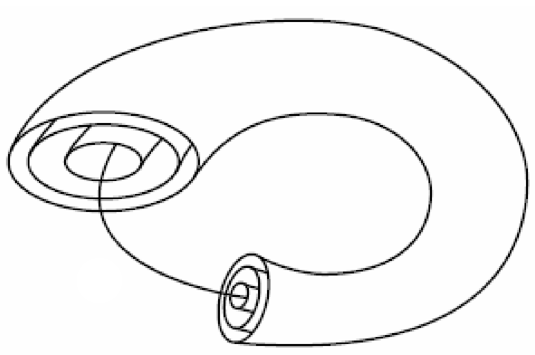
Функции F и G называют находящимися в инволюции, если $\{F,G\} = 0$.

Теорема (Лиувилля-Арнольда).

Если гамильтонова система с N степенями свободы и гамильтонианом $H(p,q)$ имеет N независимых первых интегралов в инволюции, то фазовое пространство расслаивается на N-мерные инвариантные торы и существует каноническая замена переменных $(p,q) \to (I, \varphi)$ такая, что

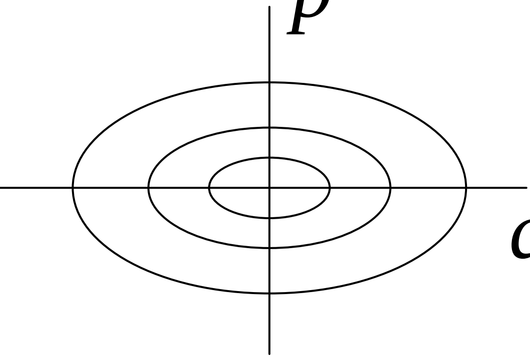
$$I \in R^N, \quad \varphi \in T^N \quad \mathrm{modd}\ 2\pi$$

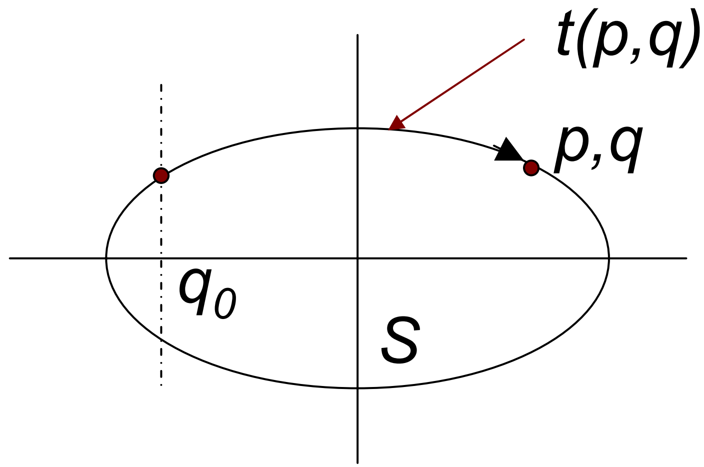
$$\text{и} \qquad H(p,q) = H_0(I)$$



Переменные (I, φ) – канонические переменные «действие-угол», а $H_0(I)$ – гамильтониан H, выраженный через (I, φ).

Переменные «действие-угол» в случае одной степени свободы.





Определим (I, φ) следующим образом:

$$I(p,q) = \frac{S(p,q)}{2\pi}$$

$$\varphi(p,q) = 2\pi \, \frac{t(p,q)}{T(p,q)} \mod 2\pi$$

Докажем, что замена $(p,q) \rightarrow (I, \varphi)$ – каноническая. Для этого угадаем производящую функцию.

Выберем точку p,q и проходящий через нее участок траектории, который однозначно проектируется на ось q.

Тогда $p = \mathcal{P}(q, h(I))$

Производящая функция: $W(q, I) = \int\limits_{q_0}^{q} \mathcal{P}(q', h(I))\, dq'$

Проверим: $p = \dfrac{\partial W}{\partial q} = \mathcal{P}$

$$H(\mathcal{P}, q) = h$$

$$\frac{\partial H}{\partial \mathcal{P}} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial h} = 1$$

$$\varphi = \frac{\partial W}{\partial I} = \int\limits_{q_0}^{q} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial I} dq' = \int\limits_{q_0}^{q} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial I} dq' =$$

$$= \int\limits_{q_0}^{q} \frac{\partial h / \partial I}{\partial H / \partial \mathcal{P}} dq' = \frac{\partial h}{\partial I} \int\limits_{q_0}^{q} \frac{dq'}{\dot{q}'} =$$

$$= \frac{\partial h}{\partial I} \int\limits_{q_0}^{q} dt = \frac{\partial h}{\partial I} t = 2\pi \frac{t}{T}$$

$$\frac{\partial I}{\partial h} = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial h} \oint p\, dq =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\partial p}{\partial h} dq =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \oint \frac{dq}{\dot{q}} =$$

$$= \frac{T(p, q)}{2\pi}$$

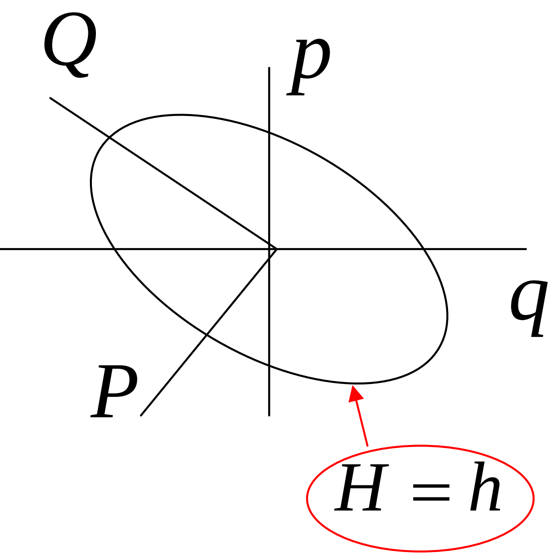
В новых переменных $H(p,q) = H_0(I)$

$$\begin{cases} \dot{I} = 0 \\ \dot{\varphi} = \dfrac{\partial H_0}{\partial I} = \omega(I) \end{cases}$$

Явный вид функции $H_0(I)$ можно установить из соотношения

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint \mathcal{P}(q', h(I))\, dq'$$

Пример 3.



$$H=\frac{1}{2}\left(a_{11}p^2+2a_{12}pq+a_{22}q^2\right)$$

Уровень энергии – эллипс. Поворотом можно привести к главным осям:

$$H=\frac{1}{2}\left(AP^2+BQ^2\right)$$

Действие *I* (*h*) – площадь внутри эллипса *H* = *h*, деленная на *2π*:

$$\left(\frac{P}{\sqrt{2h/A}}\right)^2+\left(\frac{Q}{\sqrt{2h/B}}\right)^2=1 \quad\Rightarrow\quad I=\frac{h}{\sqrt{AB}}=\frac{h}{\sqrt{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}}$$

Уравнения движения:

$$\begin{cases}\dot{Q}=AP\\ \dot{P}=-BQ\end{cases}\Rightarrow\quad \ddot{Q}+ABQ=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow AB=\omega^2\Rightarrow \boxed{I=\frac{h}{\omega}}$$

3. Теория возмущений интегрируемых гамильтоновых систем.

3.1 *Метод Линдштедта-Пуанкаре*

Интегрируемая система + малое возмущение:

$$H = H_0(I) + \varepsilon H_1(I, \varphi) + O(\varepsilon^2)$$

Используя разложения по малому параметру, попытаемся построить автономную каноническую замену переменных

$$(I, \varphi \bmod 2\pi) \mapsto (J, \psi \bmod 2\pi),$$

приводящую гамильтониан $H\ (I,\varphi,\varepsilon)$ к виду $\mathcal{H}\ (J\ ,\varepsilon)$. Тогда J,ψ - переменные «действие-угол» для возмущенной системы, и задача легко решается. Будем задавать замену производящей функцией (которую предстоит найти):

$$W(J, \varphi, \varepsilon) = W_0(J, \varphi) + \varepsilon W_1(J, \varphi) + O(\varepsilon^2).$$

При $\varepsilon=0$ замена должна быть тождественной: $W_0 = J\varphi.$

Формулы замены переменных:

$$\psi = \frac{\partial W}{\partial J} = \varphi + \varepsilon \frac{\partial W_1}{\partial J} + O(\varepsilon^2), \qquad I = \frac{\partial W}{\partial \varphi} = J + \varepsilon \frac{\partial W_1}{\partial \varphi} + O(\varepsilon^2).$$

Новый гамильтониан: $\mathcal{H}(J,\varepsilon) = H\left(J + \varepsilon \frac{\partial W_1}{\partial \varphi} + O(\varepsilon^2), \varphi, \varepsilon\right)$

Разложим в ряд по *ε*:

$$\mathcal{H}_0(J) + \varepsilon \mathcal{H}_1(J) + O(\varepsilon^2) = H_0\left(J + \varepsilon \frac{\partial W_1}{\partial \varphi} + O(\varepsilon^2)\right) +$$

$$+ \varepsilon H_1\left(J + \varepsilon \frac{\partial W_1}{\partial \varphi} + O(\varepsilon^2), \varphi\right) + O(\varepsilon^2)$$

В нулевом порядке по *ε*: $\mathcal{H}_0 = H_0.$

В первом порядке по *ε*:

$$\mathcal{H}_1(J) = \nu(J) \frac{\partial W_1}{\partial \varphi}(J,\varphi) + H_1(J,\varphi), \qquad \nu(J) = \frac{\partial H_0(J)}{\partial J}.$$

$$\mathcal{H}_1(J) = \nu(J)\frac{\partial W_1}{\partial \varphi}(J,\varphi) + H_1(J,\varphi)$$

Разложим в ряд Фурье:

$$H_1(J,\varphi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^m} H_1^k(J)e^{i\langle k,\varphi\rangle}, \qquad W_1(J,\varphi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^m} W_1^k(J)e^{i\langle k,\varphi\rangle}$$

Тогда

$$\nu\frac{\partial W_1}{\partial \varphi} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^m} i\langle \nu, k\rangle\, W_1^k\, e^{i\langle k,\varphi\rangle}$$

скалярное произведение

Подставляя, получаем отдельное уравнение для каждого *k*:

$$k = 0: \quad \mathcal{H}_1(J) = H_1^0(J),$$

$$k \neq 0: \quad 0 = i\langle \nu(J), k\rangle W_1^k(J) + H_1^k(J),$$

откуда

$$W_1^k(J) = -\frac{H_1^k(J)}{i\langle \nu(J), k\rangle}, \qquad k \neq 0.$$

Аналогично можно определить $W_2(J), W_3(J), \ldots$ Задача решена?? Вообще-то надо еще проверить сходимость ряда $W_0 + \varepsilon W_1 + \varepsilon^2 W_2 + \cdots$ Но все еще хуже.

$$W_1^k(J) = -\frac{H_1^k(J)}{i\langle\nu(J),k\rangle}, \qquad k \neq 0.$$

Знаменатели в этой формуле и аналогичных для $W_2, W_3, \ldots$ обращаются в ноль на *резонансных поверхностях*:

$$\Sigma_k = \{J \in \mathbb{R}^m \colon \langle\nu(J),k\rangle = 0\}$$

В типичной ситуации эти поверхности образуют всюду плотное множество (меры ноль) в фазовом пространстве, откуда следует, что функция $W(J,\varphi)$ нигде не определена.

В этом состоит знаменитая проблема *малых знаменателей*.

Похоже, что интегрируемая система под действием типичного малого возмущения становится неинтегрируемой. Что можно сказать о динамике в такой системе?