

## **Лекция 5. Разрушение инвариантных торов гамильтоновых систем**

1. Теория возмущений интегрируемых гамильтоновых систем (продолжение).
2. Разрушение резонансных торов.
3. Нелинейный резонанс.

# 1. Теория возмущений интегрируемых гамильтоновых систем (продолжение).

## 1.1 Элементы теории КАМ

Записать возмущенную систему в переменных действие-угол не удалось. Оказывается, что можно получить сходящиеся разложения не во всем фазовом пространстве, а на некоторых его подмногообразиях. Этому посвящена теория КАМ (Колмогорова-Арнольда-Мозера). Основное утверждение – большинство нерезонансных инвариантных торов выживает и в возмущенной системе.

Система невырождена (при  $I = I^0$ ), если  $\det \left( \frac{\partial H_0}{\partial I^2} \right) (I^0) \neq 0$ .

Система *изоэнергетически* невырождена (при  $I = I^0$ ), если

$$\det \begin{pmatrix} \partial^2 H_0 / \partial I^2 (I^0) & \nu(I^0) \\ \nu^T(I^0) & 0 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Теорема (А.Н.Колмогоров).

Если невозмущенная система невырождена или изоэнергетически невырождена, то фазовое пространство возмущенной системы заполнено с точностью до остатка малой (вместе с возмущением) меры инвариантными торами, близкими к торам невозмущенной системы, обматываемыми всюду плотно возмущенными траекториями. В случае изоэнергетической невырожденности эти торы составляют большинство на каждом уровне энергии.

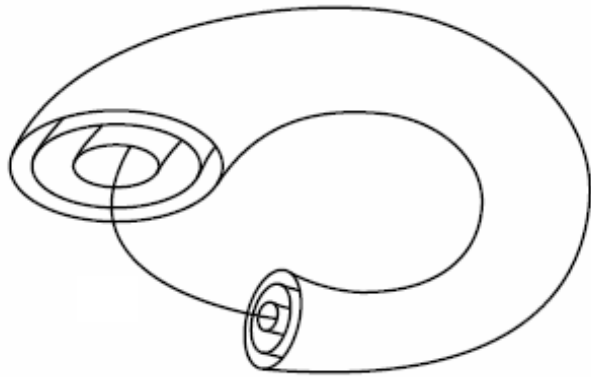
Доказательство основано на том, что остаются только «не сильно резонансные» (диофантовы) торы, на которых

$$|\langle \nu, k \rangle| \geq \frac{c}{|k|^\gamma} \quad \text{для всех ненулевых } k \in \mathbb{Z}^m$$

при некоторых положительных  $c, \gamma$ . Почти все векторы частот диофантовы. На них (при  $c \gtrsim \sqrt{\varepsilon}$ ) строится процедура ускоренной (квадратичной по  $\varepsilon$ ) сходимости.

Множество, дополнительное к инвариантным КАМ-торам, имеет меру порядка  $O(\sqrt{\varepsilon})$ .

### 3.3 Эволюция переменных «действие» в гамильтоновых системах, близких к интегрируемым.



Автономная гамильтонова система с двумя степенями свободы: размерность фазового пространства равна 4, размерность уровня энергии равна трем, инвариантные КАМ-торы имеют размерность 2.

Двумерные торы делят трехмерное пространство.

Следовательно, траектория, не лежащая на инвариантном торе, зажата между двумя инвариантными торами.

Поэтому значение  $I$  на такой траектории не может сильно измениться:  $|I(t) - I(0)| \lesssim \sqrt{\varepsilon}$  для  $-\infty < t < \infty$ .

Если число степеней свободы больше двух, торы не делят фазовое пространство. Возможна ли эволюция переменных «действие» в этом случае? Такой пример был построен Арнольдом. Численный анализ показал, что эта эволюция носит характер диффузии (*диффузия Арнольда*).

Является ли диффузия типичной? Видимо, да, хотя доказательство получено только для некоторых классов систем. Какова максимальная средняя скорость эволюции «действий»?

Согласно теореме Н.Н.Нехорошева, для изменения действия на величину порядка единицы требуется экспоненциально большое время порядка  $e^{\alpha/|\epsilon|^{\beta}}$ . Это – оценка для аналитических систем. В некоторых системах возможна и более быстрая диффузия.

## 2. Разрушение резонансных торов.

### 2.1 Отображение Пуанкаре

Рассмотрим интегрируемую систему с 2 степенями свободы

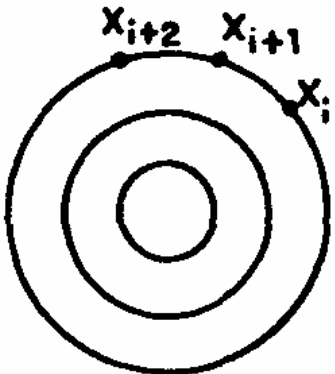
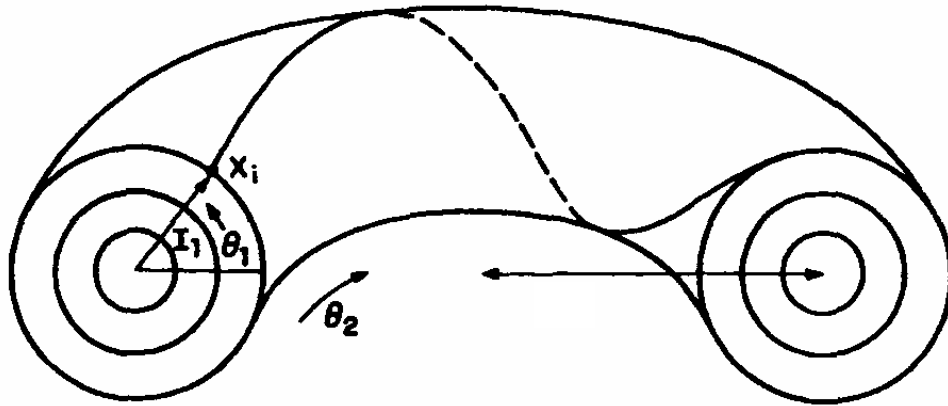
на уровне энергии  $H(I_1, I_2) = h$ .  
Изменение угловых переменных на торе:

$$\theta_1(t) = \omega_1 t + \theta_1(0),$$

$$\theta_2(t) = \omega_2 t + \theta_2(0),$$

$$\omega_1 = \omega_1(I_1, I_2) = \frac{\partial H}{\partial I_1}$$

$$\omega_2 = \omega_2(I_1, I_2) = \frac{\partial H}{\partial I_2}.$$



Плоскость  $\theta_2 = 0$

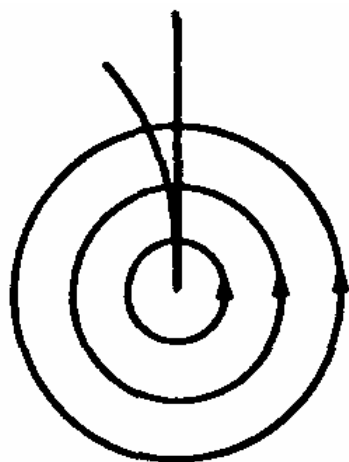
Время  $t_2$ , необходимое для изменения  $\theta_2$  на  $2\pi$ :  
 $t_2 = 2\pi/\omega_2$ . Изменение  $\theta_1$ :

$$\theta_1(t + t_2) = \theta_1(t) + \omega_1 t_2 = \theta_1(t) + \frac{2\pi\omega_1}{\omega_2} = \theta_1(t) + 2\pi\alpha_1(I_1)$$

$\alpha = \omega_1/\omega_2$  - число вращения.

Обозначим  $\theta_n = \theta_1(t + nt_2)$ ,  $I = I_1$ . Отображение Пуанкаре

записывается в виде  $T: \theta_{n+1} = \theta_n + 2\pi\alpha(I_{n+1}), I_{n+1} = I_n$ .

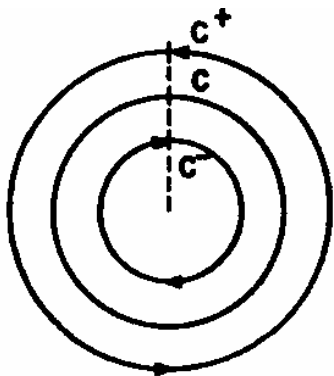


Предположим, что  $\alpha'(I) \neq 0$ . Такие отображения называются «подкручивающими». Отображение  $T$  сохраняет площадь. Если  $\alpha(I^*)$  иррациональное, образы начальной точки всюду плотно заполняют всю окружность  $I = I^*$ . Если  $\alpha(I^*) = r/s$ , все образы попадают в конечное число  $s$  точек на окружности.

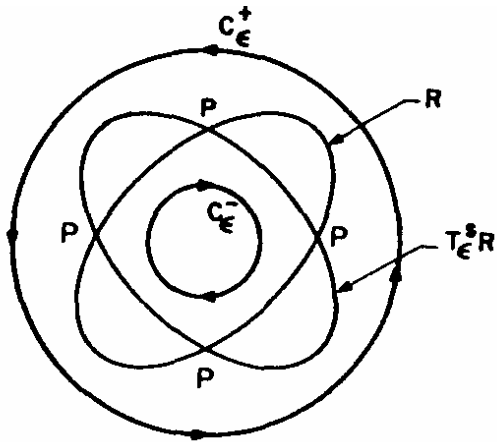
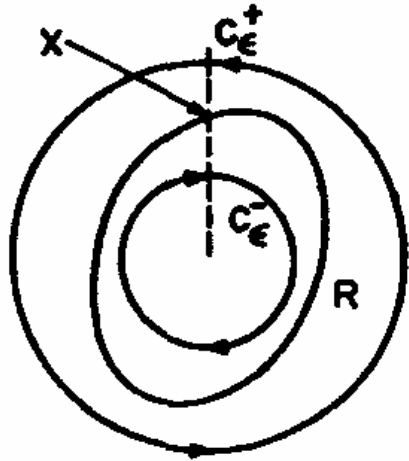
## 2.2 Разрушение резонансных кривых

Пусть  $C$  – инвариантная кривая отображения  $T$  с  $\alpha = r/s$ .

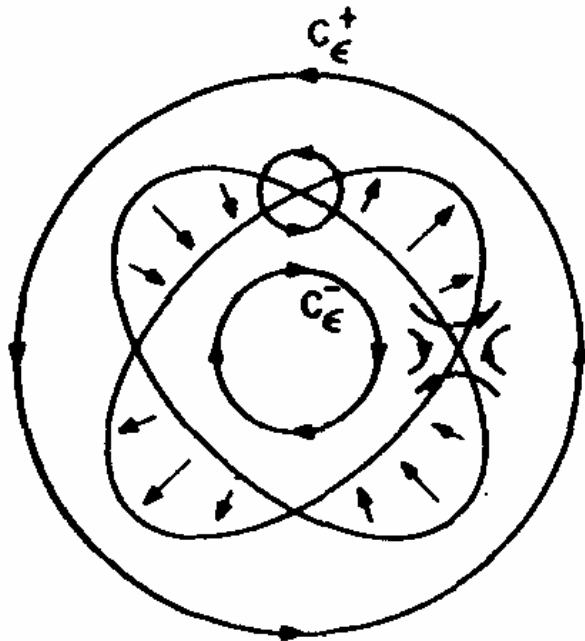
Рассмотрим по обе стороны вблизи от нее инвариантные кривые  $C^+$  и  $C^-$  с иррациональными  $\alpha$ . Кривая  $C$  состоит из неподвижных точек отображения  $T^s$ . Поэтому отображение  $T^s$  поворачивает  $C^+$  и  $C^-$  в противоположные стороны.



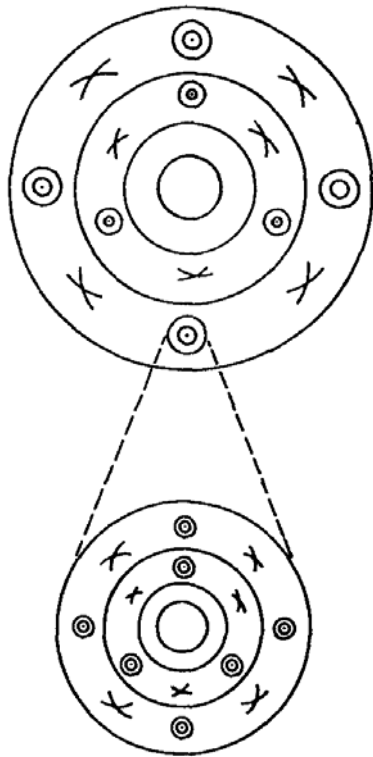
Рассмотрим теперь возмущенную систему  $H = H_0(I) + \varepsilon H_1(I, \theta)$ . Ей соответствует отображение Пуанкаре  $T_\varepsilon$ , являющееся малым возмущением  $T$ . Оно имеет инвариантные кривые  $C_\varepsilon^+$  и  $C_\varepsilon^-$ , причем  $T_\varepsilon^s$  по-прежнему поворачивает их в противоположные стороны. Поэтому между ними находится замкнутая кривая  $R$  (неинвариантная), точки которой под действием  $T_\varepsilon^s$  не поворачиваются, а только смещаются по радиусам. Поскольку отображение сохраняет площадь, кривые  $R$  и  $T_\varepsilon^s(R)$  пересекаются, число точек пересечения равно  $2ks$  (теорема Пуанкаре-Биркгофа). Эти точки – неподвижные точки отображения  $T_\varepsilon^s$ .







Как можно видеть из рассмотрения векторного поля на плоскости сечения, тип этих неподвижных точек чередуется – эллиптическая, седловая... Всего  $k_s$  эллиптических и  $k_s$  седловых неподвижных точек.



Каждая эллиптическая точка окружена инвариантными кривыми, для которых справедлива теорема КАМ. Соответствующие рациональные кривые под действием возмущения разрушаются. Таким образом, структура самоподобно повторяется.

## 2.3 Расщепление сепаратрис, гомоклинические точки.

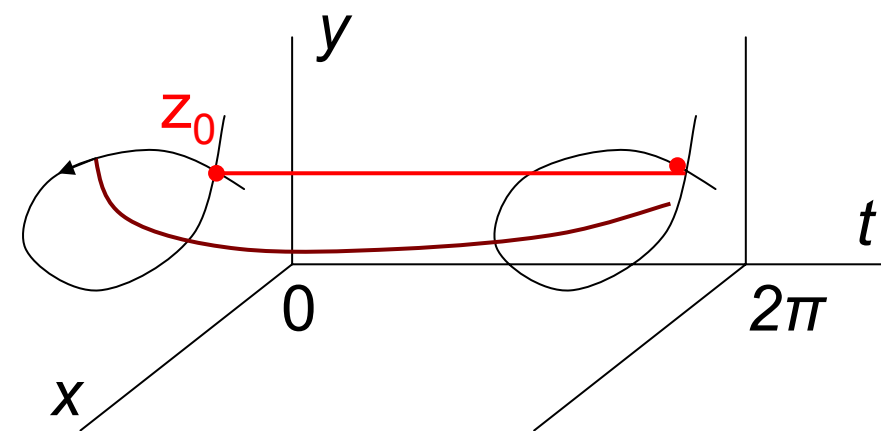
Гамильтонова система с полутора степенями свободы:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2,$$

$$H(x, y, t, \varepsilon) = H_0(x, y) + \varepsilon H_1(x, y, t) + O(\varepsilon^2).$$

Гамильтониан  $2\pi$ -периодичен по  $t$ . Пусть  $z_0$  – гиперболическая неподвижная точка невозмущенной системы. В расширенном фазовом пространстве ей соответствует  $2\pi$ -периодическая фазовая траектория. На фазовой плоскости имеются инвариантные многообразия

точки  $z_0$  :  $\Lambda^s = \Lambda^u = \Lambda$ . В расширенном фазовом пространстве им соответствуют поверхности  $W_0^{s,u} = \Lambda^{s,u} \times \mathbb{T}$ .

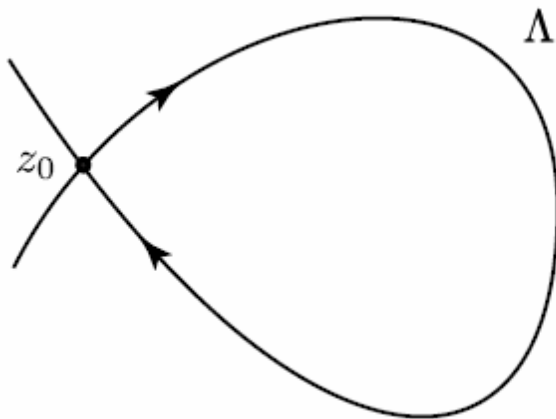


точки  $z_0$  :  $\Lambda^s = \Lambda^u = \Lambda$ . В расширенном фазовом пространстве им соответствуют поверхности  $W_0^{s,u} = \Lambda^{s,u} \times \mathbb{T}$ .

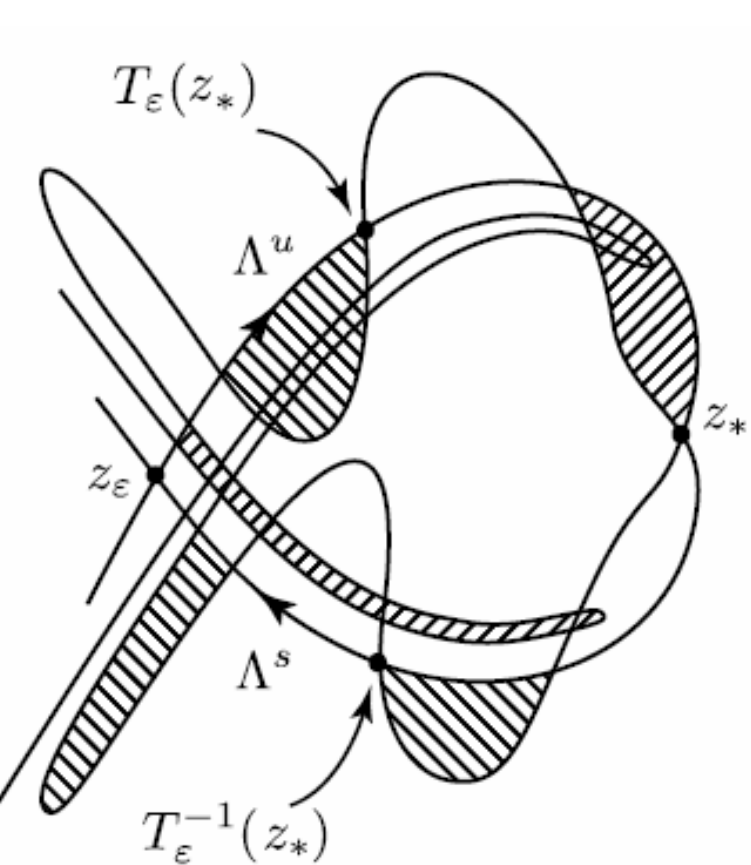
При малых  $\varepsilon$  система имеет  $2\pi$ -периодическое решение  $\sigma_\varepsilon(t) = z_0 + O(\varepsilon) \in D$ . Имеются инвариантные поверхности  $W_\varepsilon^{s,u} \subset D \times \mathbb{T}$ , асимптотические к этому решению. Они являются малыми деформациями невозмущенных поверхностей  $W_0^{s,u}$ . Пуанкаре обнаружил, что при  $\varepsilon \neq 0$  поверхности  $W_\varepsilon^s$  и  $W_\varepsilon^u$  не совпадают. Попробуем их изобразить на сечении Пуанкаре плоскостью  $t = 0 \pmod{2\pi}$ . На этом сечении решение  $\sigma_\varepsilon(t)$  изобразится точкой  $z_\varepsilon = \sigma_\varepsilon(0)$  а поверхности  $W_\varepsilon^{s,u}$  - кривыми  $\Lambda_\varepsilon^{s,u} = W_\varepsilon^{s,u} \cap \{t = 0\}$ .

При этом надо учитывать, что:

- а) кривые  $\Lambda_\varepsilon^{s,u}$  мало отличаются от  $\Lambda^{s,u}$ , по крайней мере вблизи  $z_\varepsilon$
- б)  $\Lambda_\varepsilon^{s,u}$  инвариантны относительно отображения Пуанкаре  $T_\varepsilon$ .
- в)  $\Lambda_\varepsilon^u$  и  $\Lambda_\varepsilon^s$  не могут иметь самопересечений, но могут пересекаться друг с другом.



Сечение Пуанкаре в невозмущенном случае.

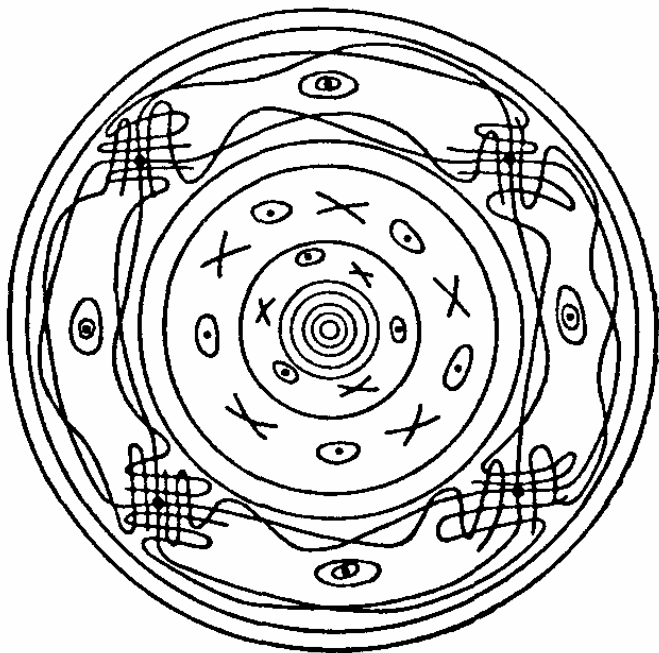


г) любая точка  $z_* \neq z_\epsilon$  в которой пересекаются  $\Lambda_\epsilon^u$  и  $\Lambda_\epsilon^s$  (гомоклиническая точка), переходит под действием  $T_\epsilon$  и  $T_\epsilon^{-1}$  в гомоклиническую точку.

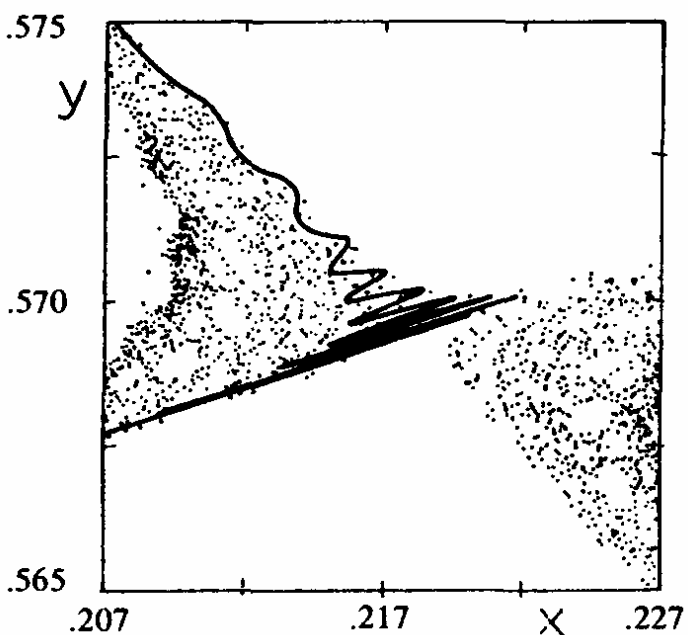
д) около  $z_\epsilon$   $T_\epsilon$  примерно задается своим линейным приближением – растягивает вдоль  $\Lambda_\epsilon^u$  и сжимает вдоль  $\Lambda_\epsilon^s$ .

е) отображения  $T_\epsilon$  и  $T_\epsilon^{-1}$  сохраняют площади; в частности, заштрихованные площади лунок совпадают.

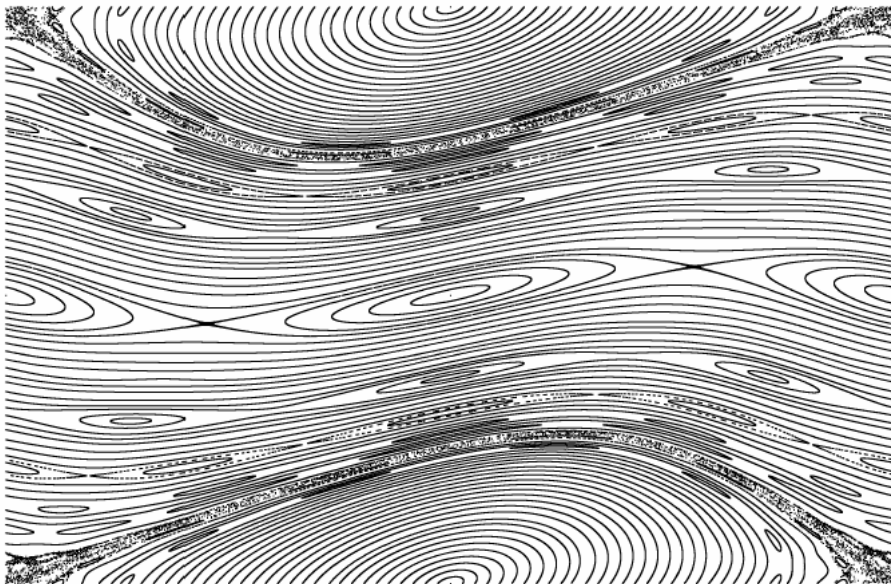
Пуанкаре: «Пересечения образуют нечто вроде решетки, или ткани, или сетки с бесконечно тесными петлями; ни одна из двух кривых никогда не должна сама себя пересекать... Приходится поражаться сложности этой фигуры, которую я даже не пытаюсь начертить.»



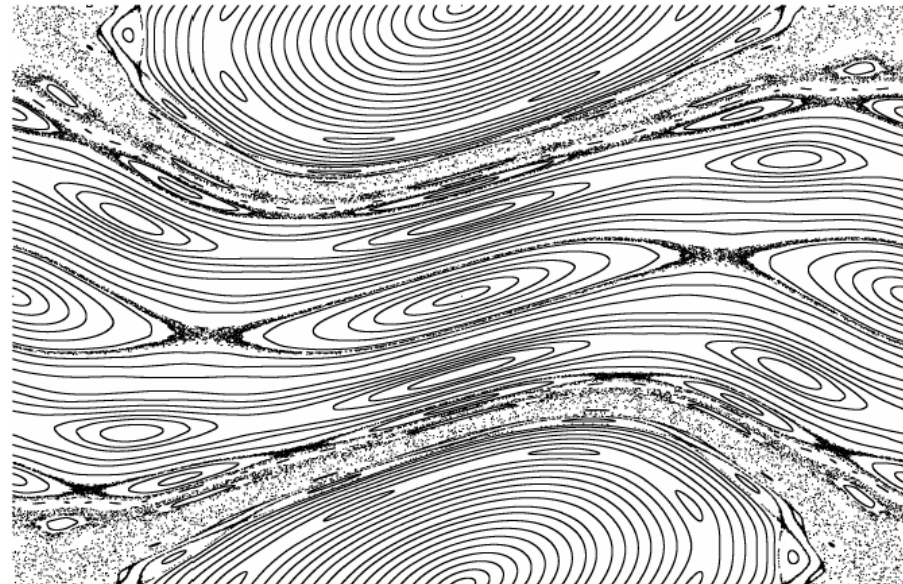
Схематическое изображение сечения Пуанкаре системы, близкой к интегрируемой.



Образ отрезка под действием нескольких итераций отображения Пуанкаре вблизи седловой точки.



$\varepsilon = 0.09$



$\varepsilon = 0.14$

Можно показать, что расщепление сепаратрис свидетельствует об отсутствии у отображения Пуанкаре первого интеграла, то есть о неинтегрируемости системы.

### 3. Нелинейный резонанс.

Гамильтонова система с полутора степенями свободы:

$$H = H_0(I) + \epsilon V(I, \theta, t)$$

Пусть  $V$  периодически по времени с периодом  $T = 2\pi/\nu$ .

Разложим в двойной ряд Фурье:

$$\epsilon V(I, \theta, t) = \frac{1}{2} i \epsilon \sum_{k, \ell} V_{k, \ell}(I) e^{i(k\theta - \ell \nu t)} + \text{c.c.} \quad , \quad V_{k, \ell}^* = V_{-k, -\ell}$$

Гамильтоновы уравнения движения:

$$\dot{I} = -\epsilon \frac{\partial V}{\partial \theta} = -\epsilon \frac{1}{2} \sum_{k, \ell} k V_{k, \ell}(I) e^{i(k\theta - \ell \nu t)} + \text{c.c.}$$

$$\dot{\theta} = \frac{dH_0}{dI} + \epsilon \frac{\partial V(I, \theta, t)}{\partial I} = \omega(I) + \frac{1}{2} \epsilon \sum_{k, \ell} \frac{\partial V_{k, \ell}(I)}{\partial I} e^{i(k\theta - \ell \nu t)} + \text{c.c.} \quad ,$$

где  $\omega(I) = \frac{dH_0}{dI}$ . В резонансе  $k_0 \omega(I_0) = \ell_0 \nu$ . Рассмотрим изолированный резонанс и пренебрежем всеми остальными резонансами, т.е. оставим в разложении только члены, соответствующие этому резонансу:

$$\dot{I} = \epsilon k_0 V_0 \sin(k_0 \theta - \ell_0 \nu t + \phi)$$

$$\dot{\theta} = \omega(I) + \epsilon \frac{\partial V_0}{\partial I} \cos(k_0 \theta - \ell_0 \nu t + \phi)$$

Здесь введено обозначение  $V_{k_0, \ell_0} = |V_{k_0, \ell_0}| e^{i\phi} = V_0 e^{i\phi}$ .

Будем предполагать, что величина  $\Delta I = I - I_0$  мала.

Положим  $V_0 = V_0(I_0)$ ,  $\omega(I) = \omega_0 + \omega' \Delta I$ , где

$\omega_0 = \omega(I_0)$ ,  $\omega' = d\omega(I_0)/dI$ . Пренебрежем вторым членом

в уравнении для частоты. Получим:

$$\frac{d}{dt}(\Delta I) = -\epsilon k_0 V_0 \sin \psi$$

Переход во вращающуюся систему отсчета

$$\frac{d}{dt} \psi = k_0 \omega' \Delta I, \quad \text{где } \psi = k_0 \theta - \ell_0 \nu t + \phi - \pi.$$

Эти уравнения имеют гамильтонову форму, гамильтониан:

$$\bar{H} = \frac{1}{2} k_0 \omega' (\Delta I)^2 - \epsilon k_0 V_0 \cos \psi.$$



Это уравнения нелинейного маятника:  $\ddot{\psi} + \Omega_0^2 \sin \psi = 0$ ,  
 где  $\Omega_0 = (\epsilon k_0^2 V_0 |\omega'|)^{1/2}$ . Введем параметр нелинейности:

$$\alpha = \frac{I_0}{\omega_0} \left| \frac{d\omega(I_0)}{dI} \right| \equiv \frac{I_0}{\omega_0} |\omega'|.$$

Относительное отклонение действия вблизи резонанса:

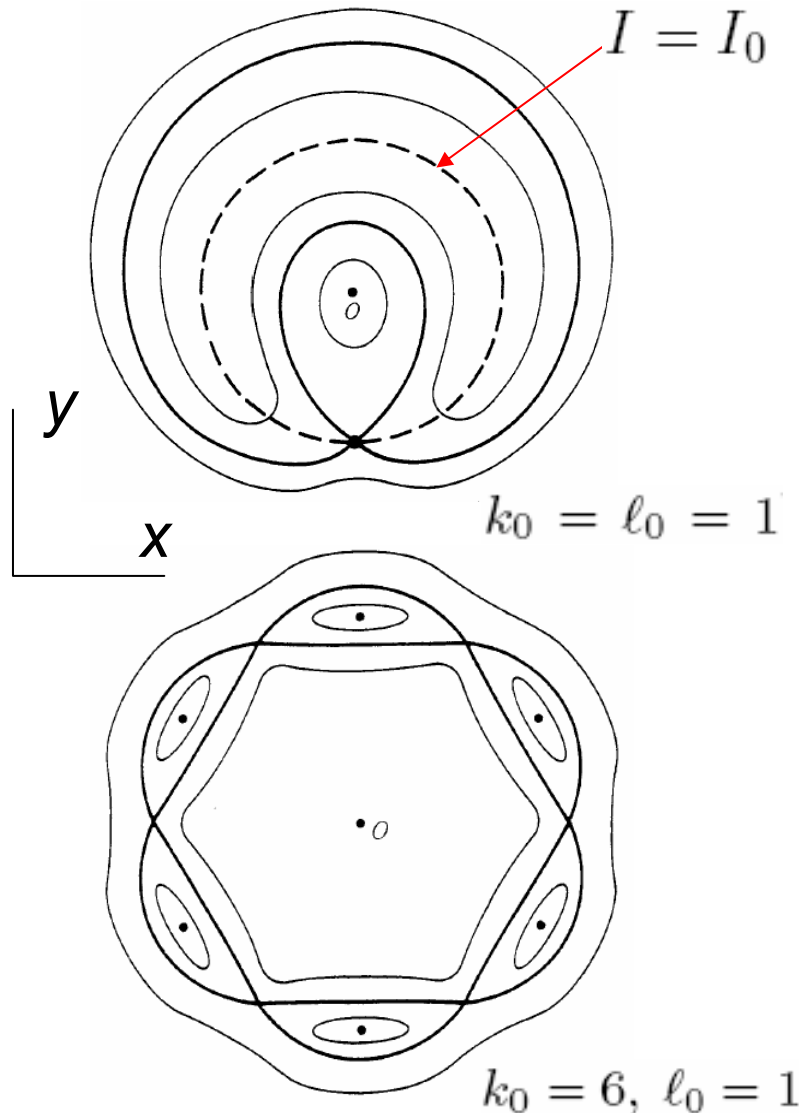
$$\frac{\max \Delta I}{I_0} \sim \left( \epsilon \frac{V_0}{|\omega'|} \right)^{1/2} \frac{1}{I_0} \sim \left( \frac{\epsilon}{\alpha} \right)^{1/2}$$

Относительный интервал частот вблизи резонанса:

$$\frac{\max \Delta \omega}{\omega_0} = \frac{\Omega_0}{\omega_0} = (\epsilon \alpha)^{1/2}.$$

Приближение изолированного резонанса справедливо, если

$$\epsilon \ll \alpha \ll 1/\epsilon.$$



## Перекрытие резонансов

Рассмотрим два близких резонанса:  $k_0\omega(I_0) = \ell_0\nu$  и  $k_0\omega(I_0 + \delta I) = (\ell_0 \pm 1)\nu$ . Предположим, что  $\delta I \ll I_0$ , тогда

$$\delta\omega = \omega'_0 \delta I = \pm\nu, \quad \omega'_0 \equiv \frac{d\omega(I_0)}{dI_0}. \quad \text{Введем параметр}$$

$$K_{ch} = \left| \frac{\Delta I}{\delta I} \right| = \left| \frac{\Delta\omega}{\delta\omega} \right| \quad \text{Критерий перекрытия резонансов}$$

(критерий Чирикова): широкая область хаотической динамики возникает при  $K_{ch} \gtrsim 1$ , или

$$K_{ch} = (\epsilon\alpha)^{1/2} \frac{\omega_0}{\nu} \gtrsim 1.$$

