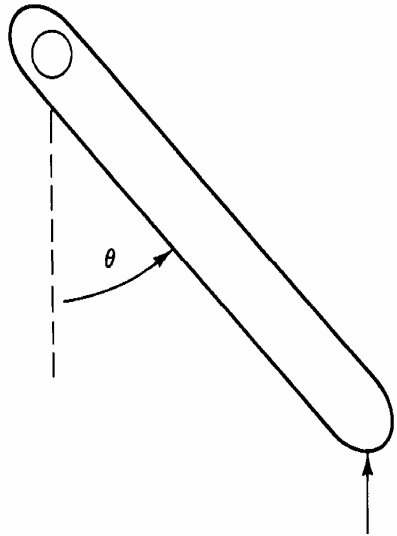


Лекция 6. Развитый хаос в гамильтоновых системах

1. Стандартное отображение.
2. Острова устойчивости.
3. Диффузия в фазовом пространстве.

1. Стандартное отображение

1.1 Ротатор под действием δ -импульсов



Периодические
импульсы

Стержень, закрепленный в шарнире без трения, без силы тяжести. Момент инерции и длина равны 1. На свободный конец в моменты времени $t = 0, T, 2T, \dots$ действует в вертикальном направлении кратковременная сила K . В канонических переменных (момент вращения, угол) гамильтониан системы выглядит как

$$H = \frac{1}{2}I^2 - K \cos \theta \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta \left(\frac{t}{T} - n \right).$$

уравнения движения:

$$\dot{I} = -K \sin \theta \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta \left(\frac{t}{T} - n \right) \quad \dot{\theta} = I.$$

Заметим, что поскольку

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\frac{t}{T} - n\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos\left(2\pi n \frac{t}{T}\right),$$

Гамильтониан можно переписать в виде

$$H = \frac{1}{2}I^2 - K \cos \theta \sum_{m=-\infty}^{\infty} \cos m\nu t \quad , \quad T = 2\pi/\nu .$$

Этот гамильтониан описывает движение заряженной частицы в бесконечно широком волновом пакете с гармониками одинаковой амплитуды.

Из уравнений движения видно, что между двумя толчками $I = \text{const}$, $\theta = I t + \text{const}$. При каждом толчке θ остается непрерывным, а I изменяется на величину $-K \sin \theta$. Пусть (I, θ) – значения переменных непосредственно перед n -м толчком, а $(\bar{I}, \bar{\theta})$ - перед $(n+1)$ -м толчком. Тогда

$$\bar{I} = I - K \sin \theta \quad , \quad \bar{\theta} = \theta + \bar{I}$$

1.2 Основные свойства стандартного отображения

Получившееся отображение T_K :

$$\bar{I} = I - K \sin \theta$$

$$\bar{\theta} = \theta + \bar{I},$$

называют *стандартным отображением* (или отображением Чирикова-Тейлора).

Переменная θ может быть определена по модулю 2π . Более того, стандартное отображение инвариантно также и относительно сдвига на 2π по переменной I , точнее

$$T_K(I + 2\pi k, \theta + 2\pi n) = (\bar{I} + 2\pi k, \bar{\theta} + 2\pi k + 2\pi n)$$

Поэтому возможны различные варианты графического изображения динамики.

При $K = 0$ возмущение отсутствует, и отображение имеет тривиальный вид:

$$I_n = \text{const.} = I_0, \quad \theta_n = \theta_0 + nI_0.$$

Траектории на плоскости (θ, I) лежат на прямых $I = I_0$, причем если отношение $I_0 / 2\pi$ иррационально, траектория заполняет эту прямую всюду плотно (по $\theta \bmod 2\pi$), а если рационально, то замыкается через конечное число итераций отображения (т.е. попадает только в конечное число точек).

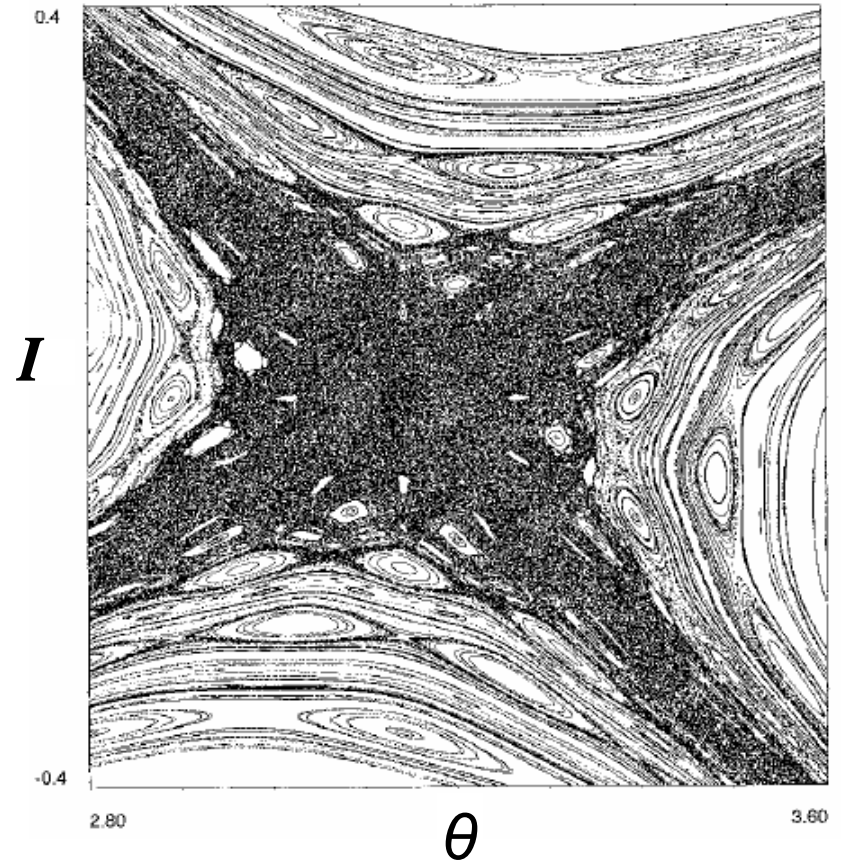
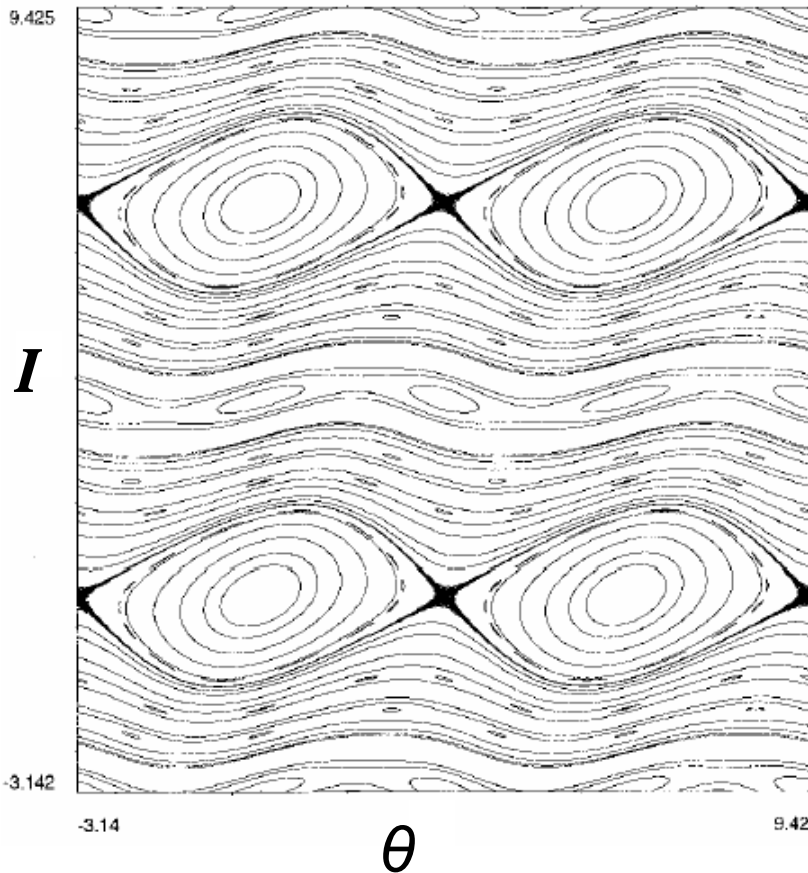
При малых K можно заменить разности производными:

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{1}{T}K \sin \theta, \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{T}I,$$

Это уравнения движения нелинейного маятника с гамильтонианом

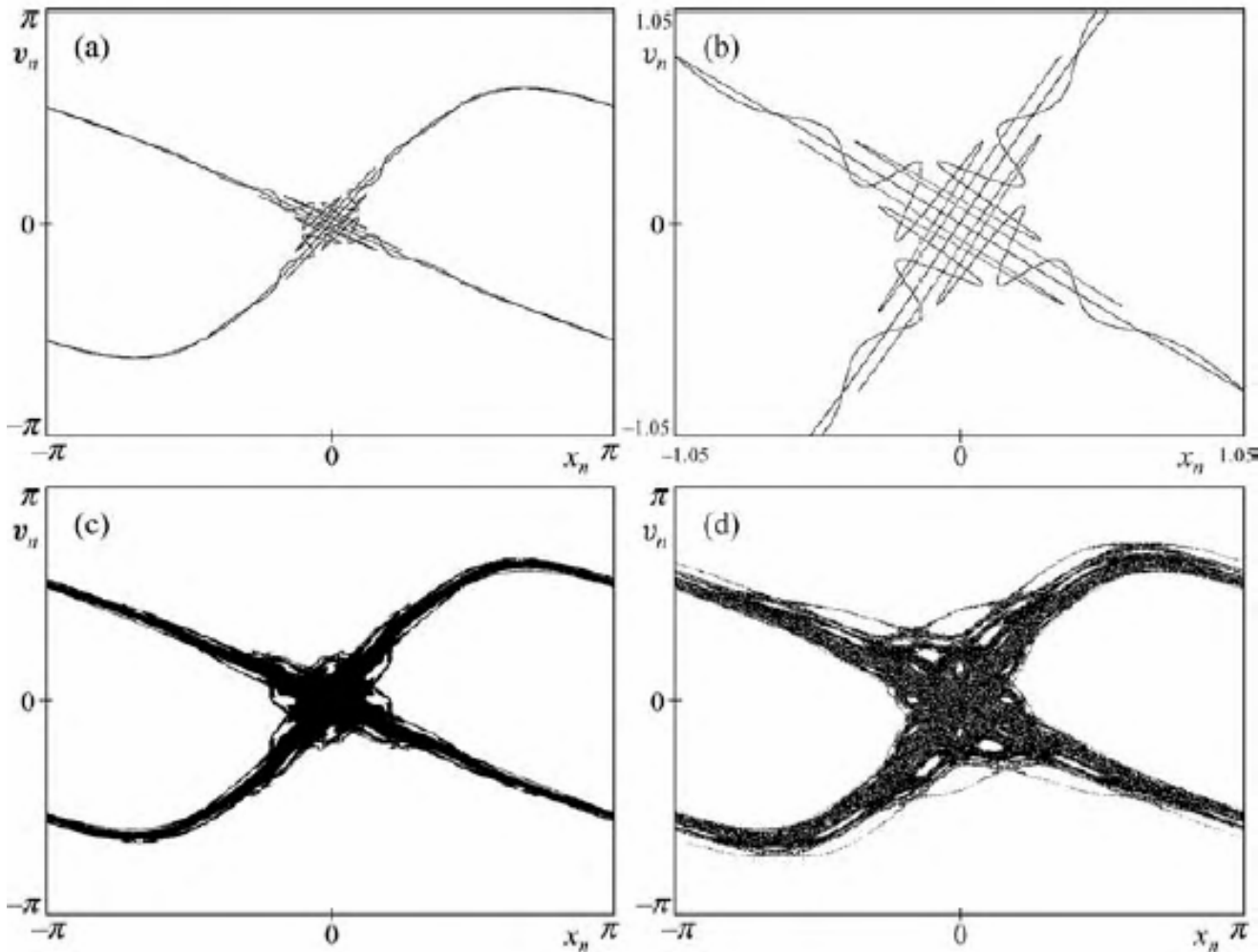
$$H = \frac{1}{T} \left(\frac{1}{2} I^2 - K \cos \theta \right)$$

Это приближение соответствует отбрасыванию в гамильтониане ротатора всех гармоник возмущения, кроме нулевой.



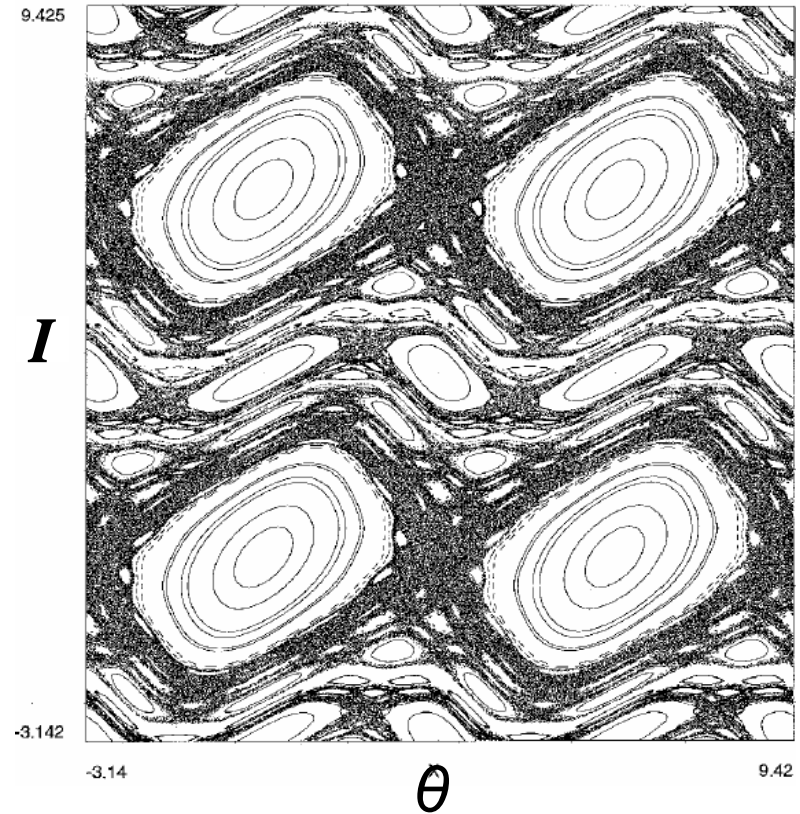
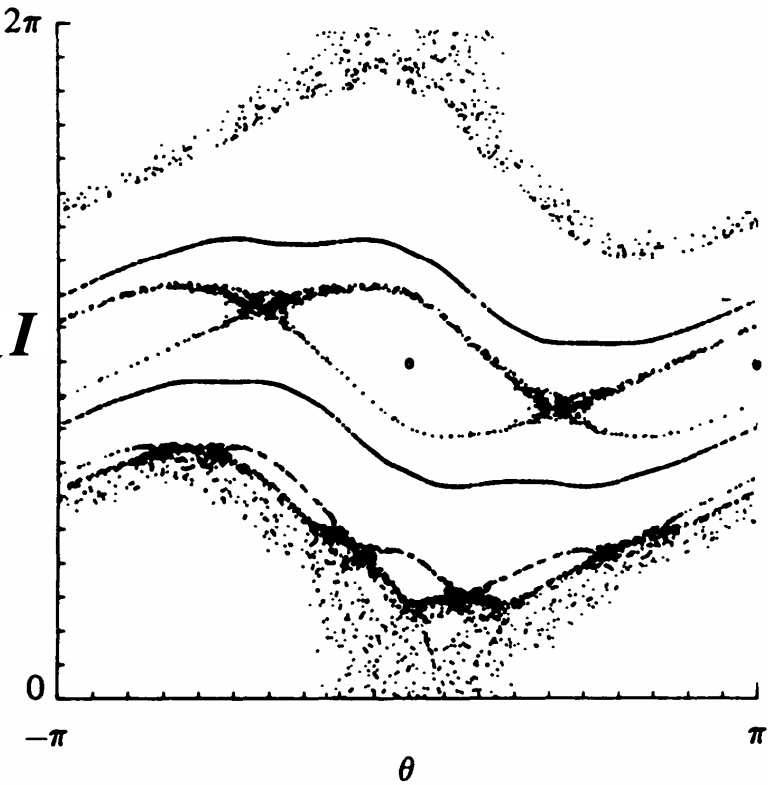
Фазовый портрет стандартного отображения при $K=0.5$.
 Четыре фундаментальных области (слева) и зум
 окрестности седловой точки (справа).

Видны неразрушившиеся инвариантные кривые, близкие к
 нерезонансным кривым (прямым) невозмущенной системы.

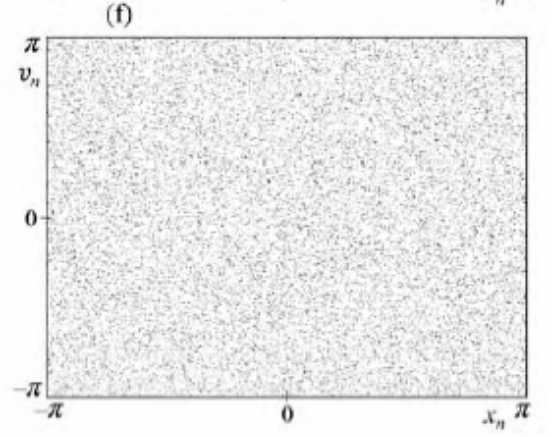
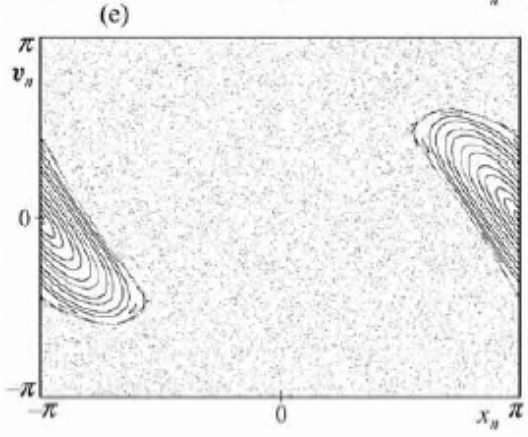
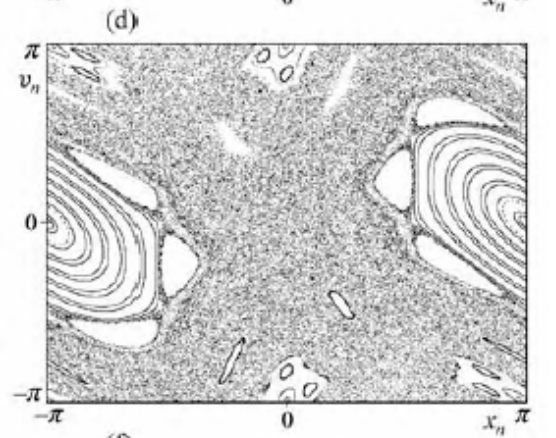
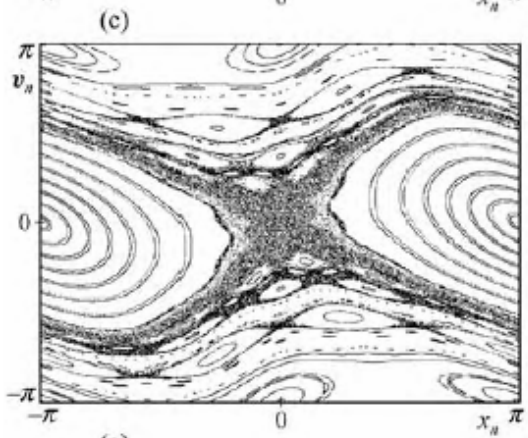
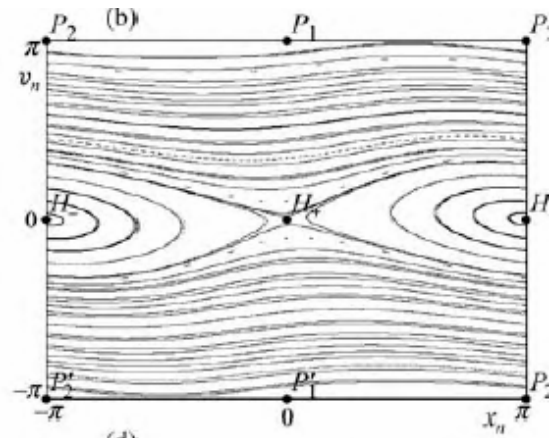
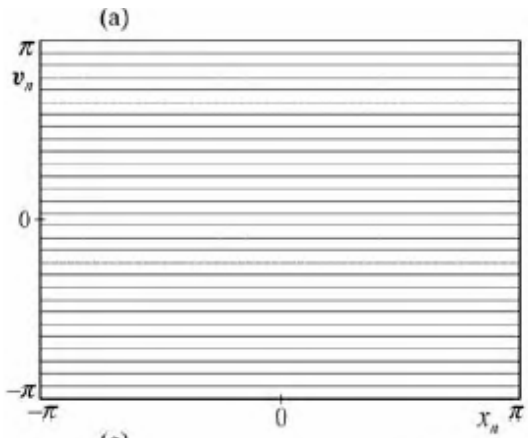


$K=0.9$ а) образ 250000 начальных условий в квадрате со стороной 0.000005 и центром в седловой точке после 36 итераций; б) зум в окрестности седловой точки; в) после 50 итераций; г) хаотическая область, покрытая итерациями одной начальной точки.

С ростом параметра возмущения K остается все меньше и меньше неразрушенных инвариантных кривых, проходящих от $\theta=0$ до $\theta=2\pi$. Последними разрушаются кривые, соответствующие «наиболее иррациональному» отношению $I_0 / 2\pi$ (золотому сечению): $(\sqrt{5} - 1) / 2$. Это происходит при $K=K_c=0.9716\dots$



Слева: $K=K_c$. Видны последние неразрушенные инвариантные кривые. Справа: $K=1$.



Стандартное отображение:
 a) $K=0$, b) $K=0.25$,
 c) $K=0.9$, d) $K=1.5$,
 e) $K=3.0$, f) $K=10.0$

2. Островки устойчивости.

Островки соответствуют различным резонансам между невозмущенной системой и возмущением. Их местоположение, размеры и вид изменяются с изменением параметра возмущения.

2.1 Островки, соответствующие «режиму ускорителя»

Рассмотрим стандартное отображение:

$$p_{n+1} = p_n + K \sin x_n, \quad x_{n+1} = x_n + p_{n+1}, \quad (\text{mod } 2\pi)$$

Пусть $p_0^{(a)} = 2\pi m$, $K \sin x_0^{(a)} = 2\pi \ell$, $(\ell \geq 1)$.

Соответствующее решение называется *режимом ускорителя* (accelerator mode):

$$p_n^{(a)} = 2\pi \ell \cdot n + p_0^{(a)}$$

Вдоль такого решения p растет со временем (числом итераций n) линейно, а x – квадратично.

Исследуем устойчивость этого решения. Матрица Якоби для стандартного отображения имеет вид:

$$T_K' = \begin{vmatrix} 1 & K \cos x \\ 1 & 1 + K \cos x \end{vmatrix}$$

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - 2\lambda \left(1 + \frac{1}{2}K \cos x\right) + 1 = 0$$

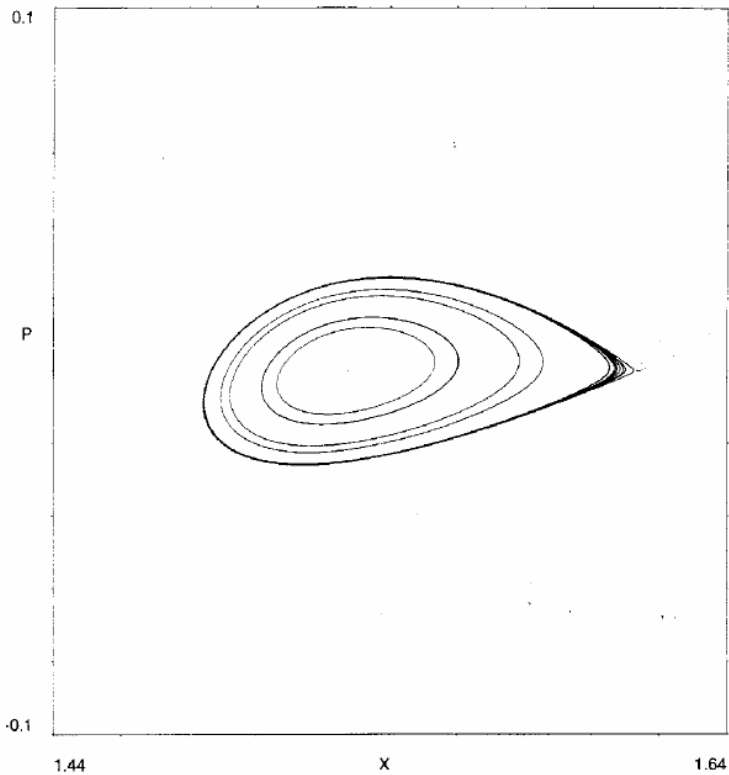
Характеристические показатели:

$$\lambda = 1 + \frac{1}{2}K \cos x \pm \left[\left(1 + \frac{1}{2}K \cos x\right)^2 - 1 \right]^{1/2}$$

Решение устойчиво, если оба корня комплексны:

$$0 > K \cos x > -4 \quad \text{или} \quad 2\pi\ell < K < [4^2 + (2\pi\ell)^2]^{1/2}.$$

Если, например, $\ell = 1$, критическое значение $K_c = 2\pi$: при $K < K_c$ режим ускорителя неустойчив, а при $K > K_c$ в фазовом пространстве есть область устойчивости.

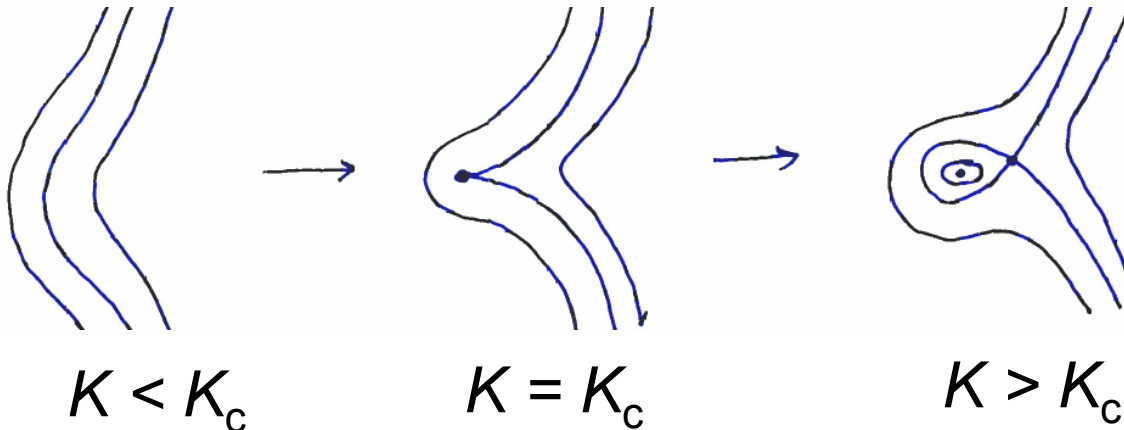


Островок устойчивости при
 $K = 6.2890 > K_c$

$(x, p) \in (0, 2\pi; -\pi, \pi)$.

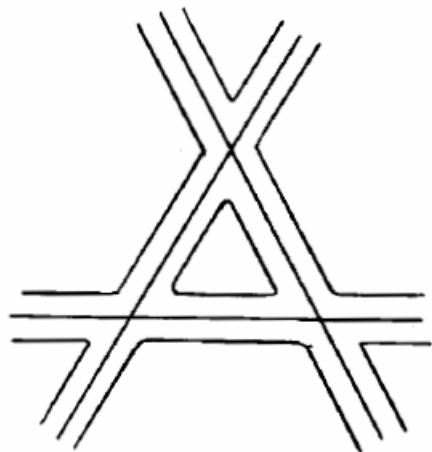
Траектории внутри островка
 соответствуют режиму ускорителя.

Островок рождается в результате бифуркации *седло-центр*:

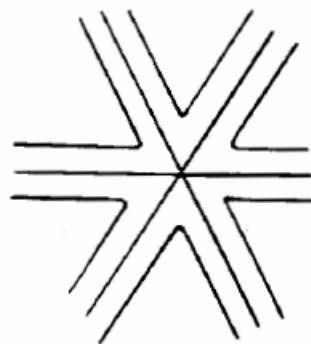


2.2 «Мерцающие» островки

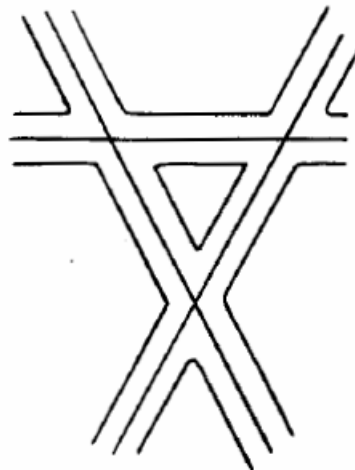
Существуют в некотором интервале значений K , исчезают только при $K = K_c$, принадлежащем этому интервалу.



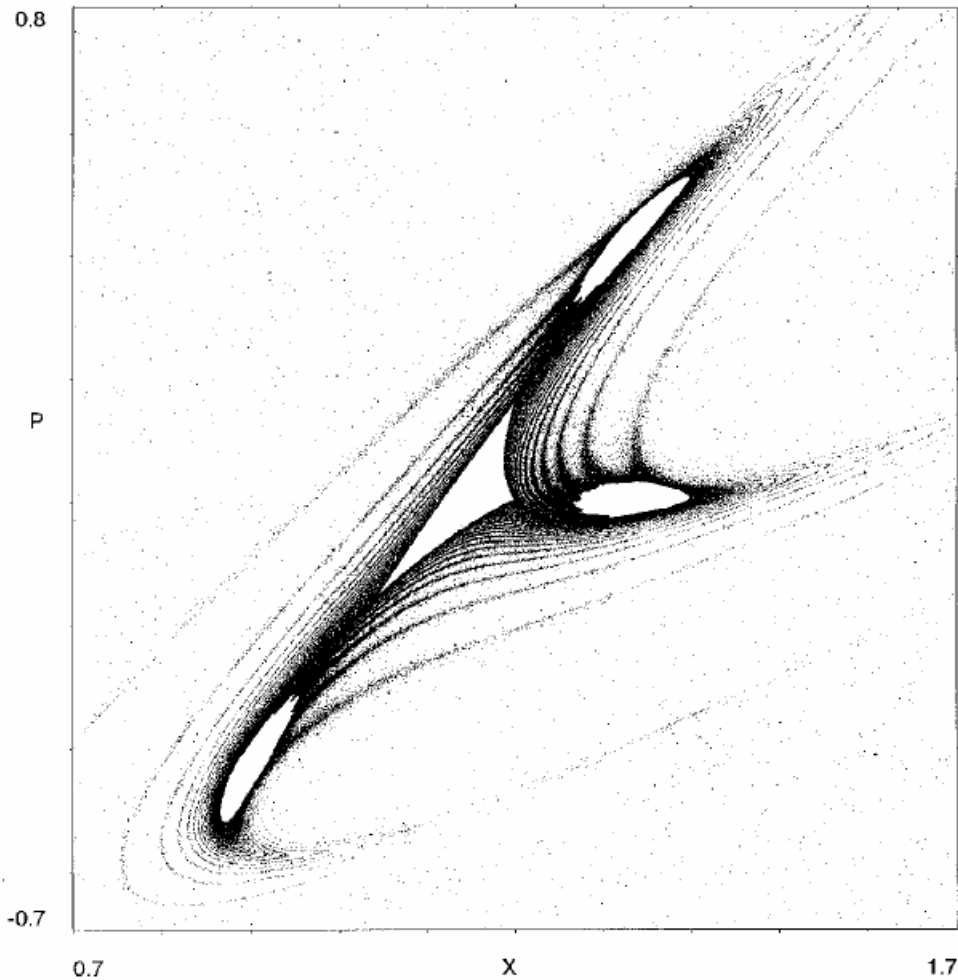
$$K < K_c$$



$$K = K_c$$

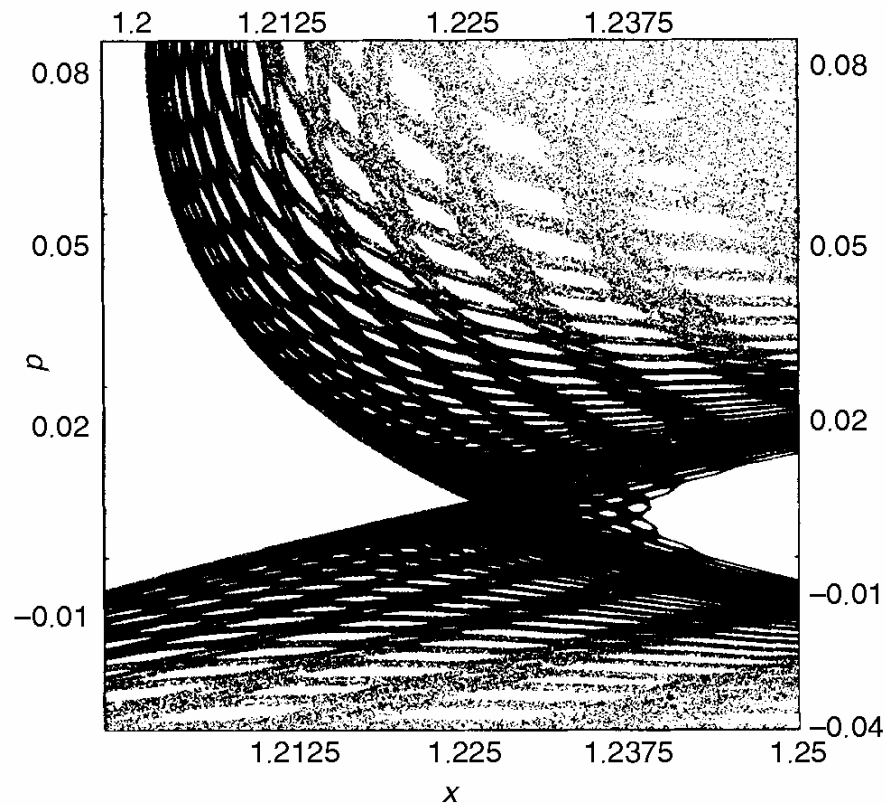
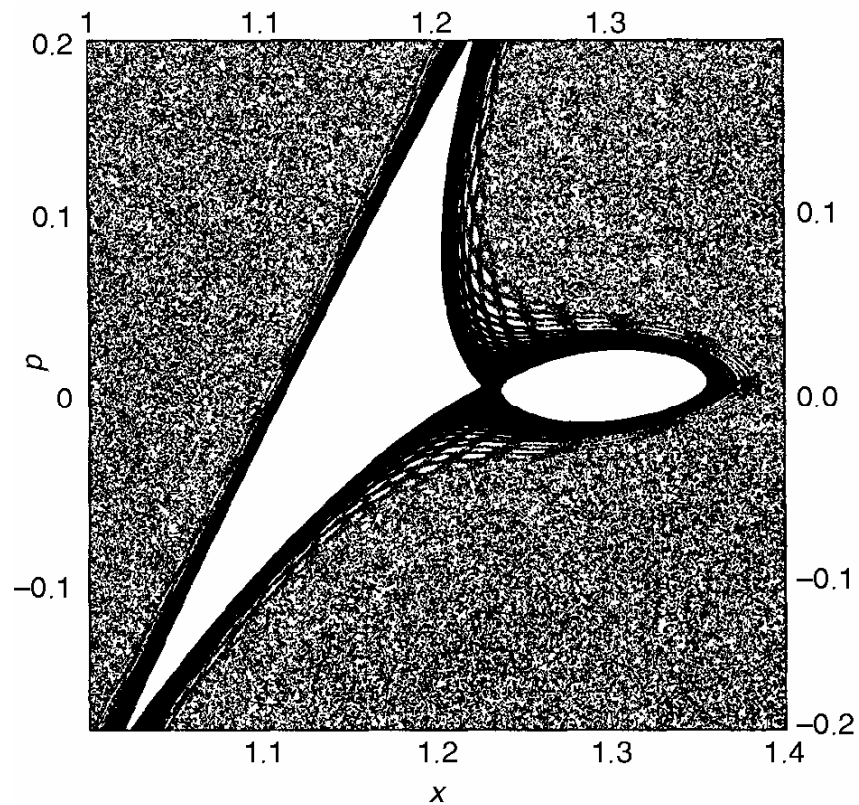


$$K > K_c$$



«Мерцающий» островок,
 $K = 6.9110$

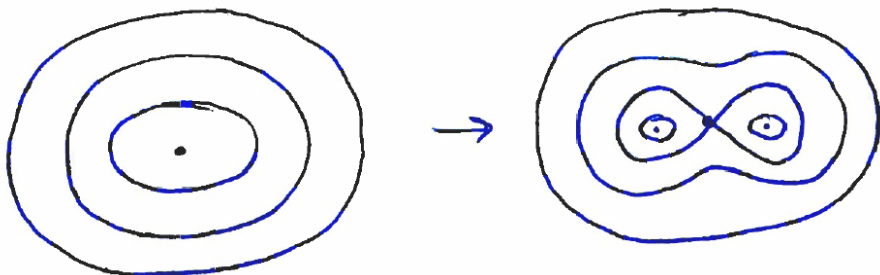
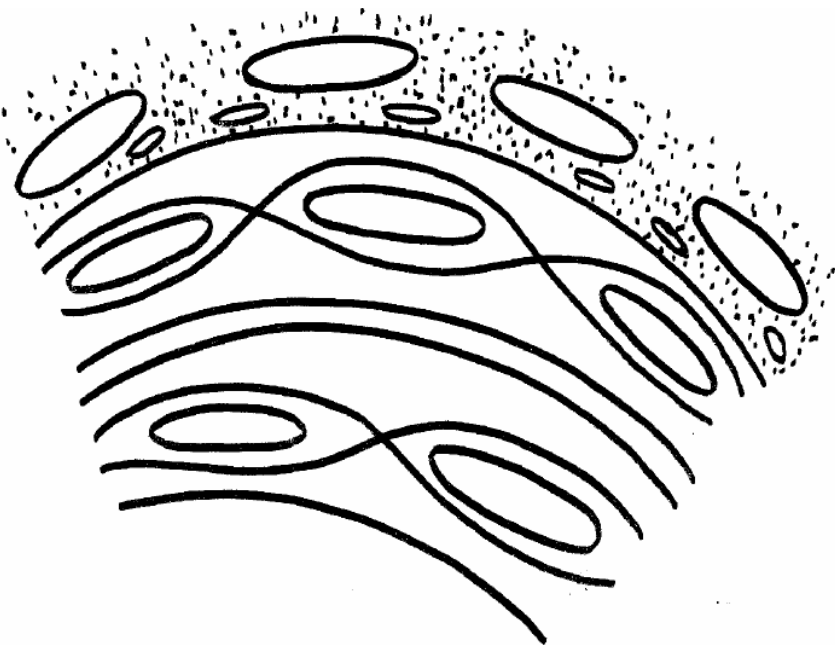
Видно «прилипание»
траектории к границе
островка.



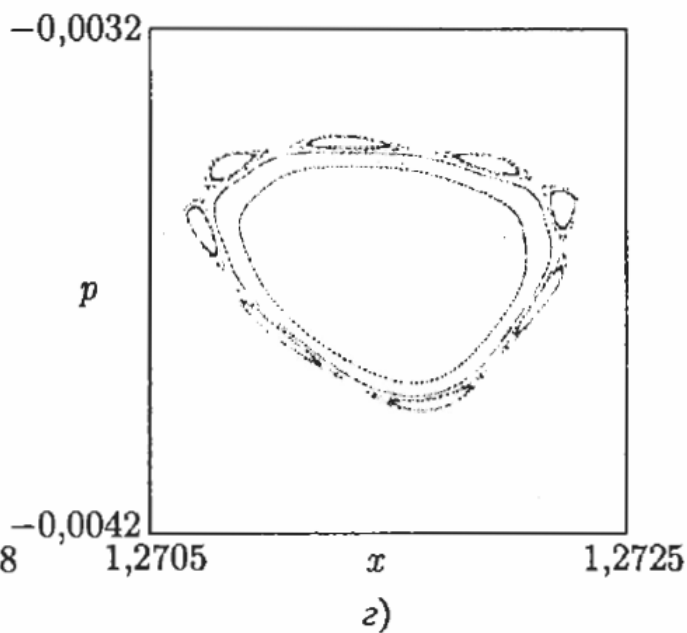
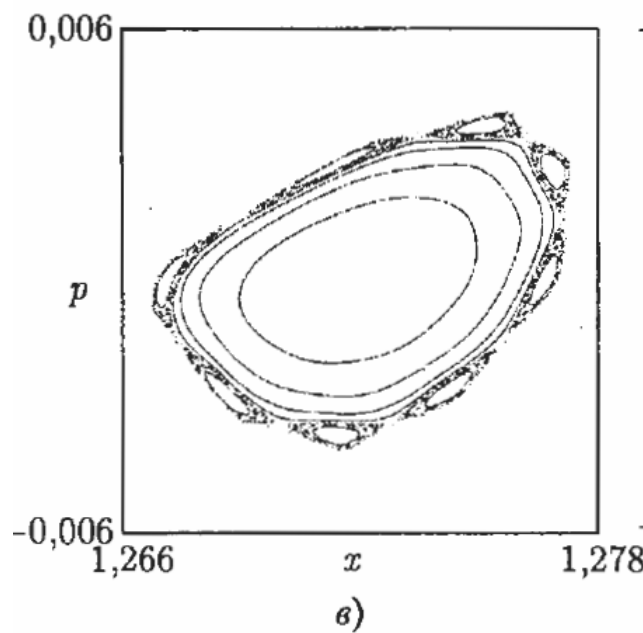
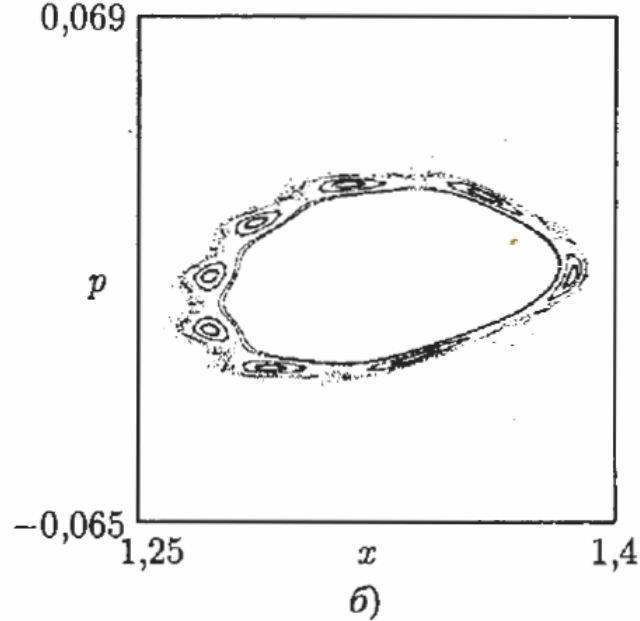
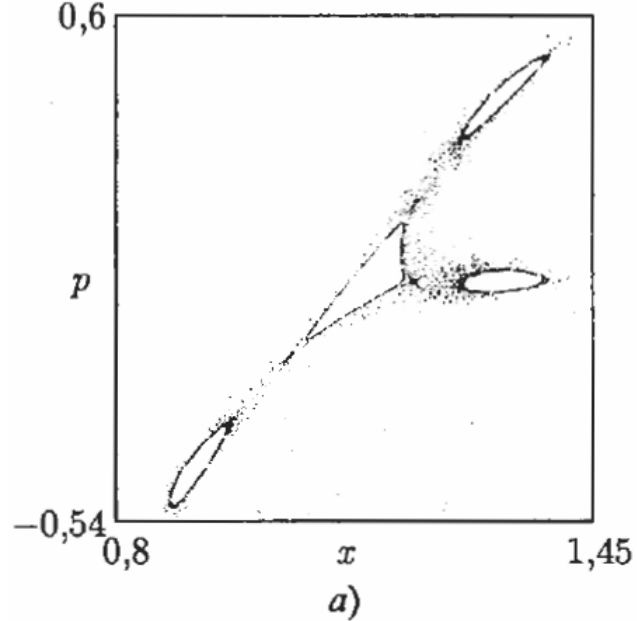
Еще один пример прилипания: одна траектория стандартного отображения после 10^9 итераций, $K = 6.9009$ (слева). Справа: зум окрестности седловой точки.

2.3 Граничные островки

Расположены в области хаоса вблизи границы другого (более крупного) островка. При изменении K происходят разнообразные бифуркации, в результате которых одни островки исчезают, другие рождаются.



Например: гамильтоновская бифуркация вилки.



Самоподобная структура островков вокруг островка, соответствующего режиму ускорителя, $K = 6.908745$

3. Диффузия в фазовом пространстве.

3.1 Уравнение диффузии, нормальная диффузия.

Рассмотрим стандартное отображение:

$$p_{n+1} = p_n - K \sin x_n, \quad x_{n+1} = x_n + p_{n+1}$$

При $K \gg 1$ происходит быстрое размешивание по фазе x , и ее распределение можно считать однородным. Усредняя по x , получаем $\langle\langle \sin x \rangle\rangle = 0$, $\langle\langle \sin^2 x \rangle\rangle = 1/2$. Следовательно,

$$\langle\langle \Delta p \rangle\rangle \equiv \langle\langle p_{n+1} - p_n \rangle\rangle = -K \langle\langle \sin x \rangle\rangle = 0$$

$$\langle\langle \Delta p^2 \rangle\rangle \equiv \langle\langle (p_{n+1} - p_n)^2 \rangle\rangle = K^2 \langle\langle \sin^2 x \rangle\rangle = \frac{1}{2} K^2$$

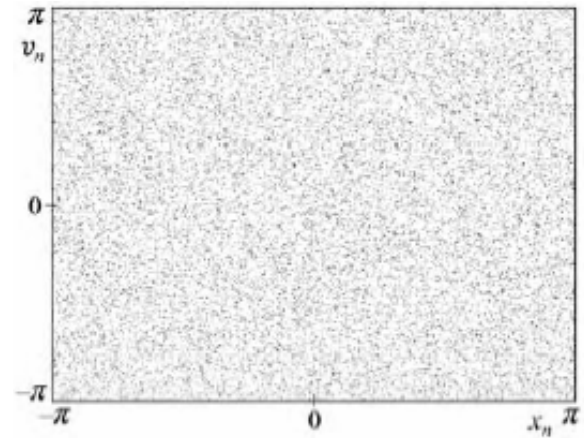
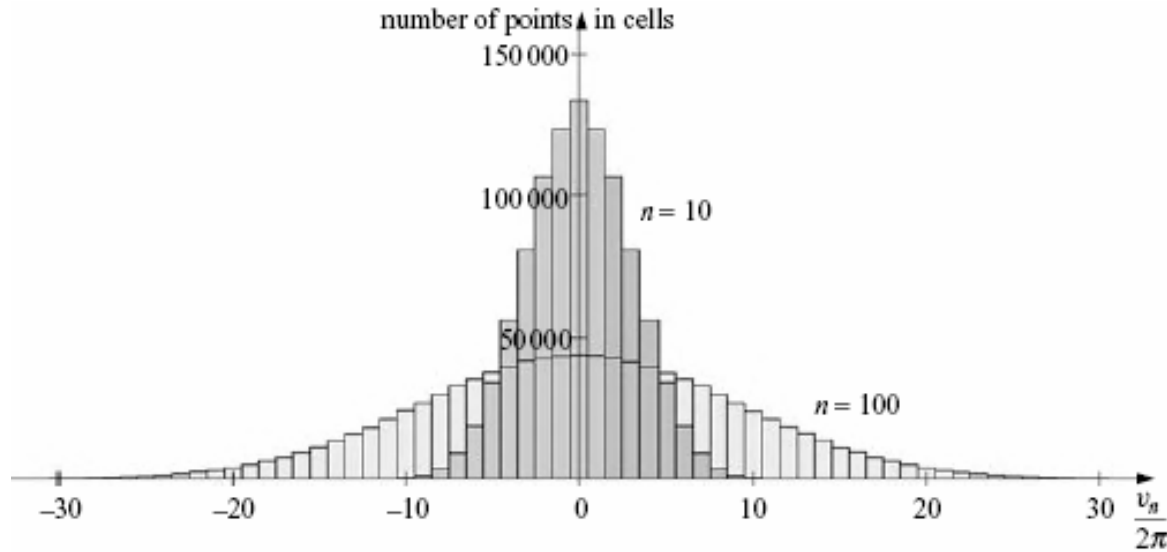
Уравнение диффузии для функции распределения $P(p, t)$:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{1}{2} \mathcal{B} \frac{\partial^2 P}{\partial p^2}, \quad \mathcal{B}(p) = \text{const.} = K^2/2T$$

В частности,

$$\langle p^2 \rangle = \mathcal{B}t = \frac{1}{2} K^2 \frac{t}{T}.$$

Необходимым условием применимости диффузионного приближения является малость изменения на каждом шаге отображения: $\langle\langle(\Delta p)^2\rangle\rangle \ll \langle p^2 \rangle$. Это выполнено при $t \gg T$, т.е. при достаточно большом времени наблюдения.

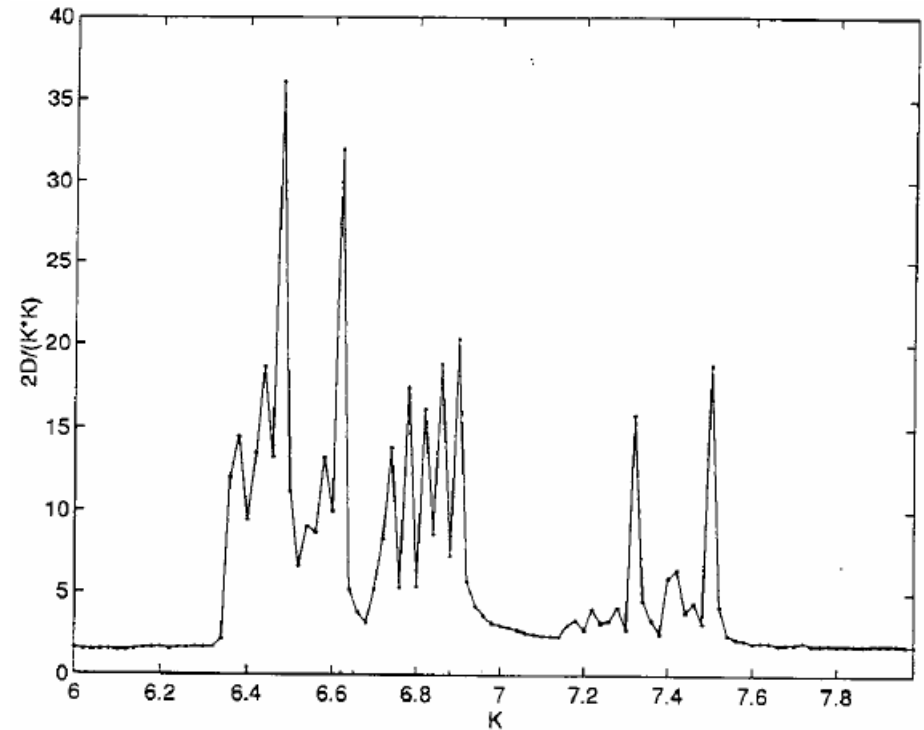
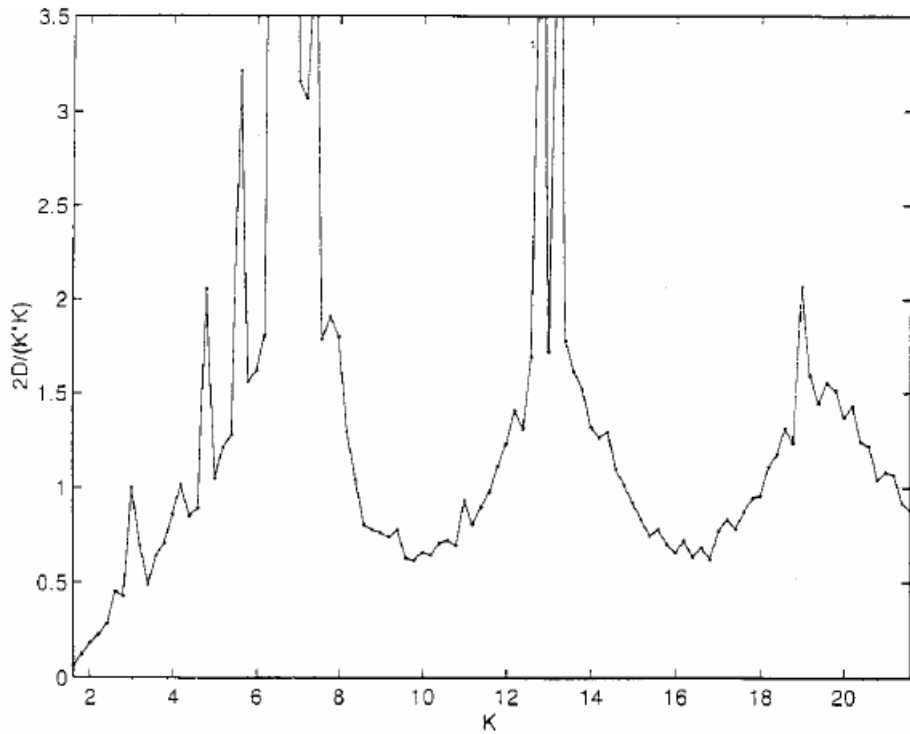


Слева: эволюция распределения 10^6 фазовых точек: начальные условия распределены равномерно в квадрате $(-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)$, $K = 10$.

На достаточно больших временах детерминированная система ведет себя, как стохастическая (броуновское движение).

3.2 Аномальная диффузия

Это была идеализированная картина. На самом деле, можно построить графики зависимости нормированного коэффициента диффузии от K :



Выбросы на графике говорят о недиффузионном характере эволюции. По-видимому, это связано с наличием в фазовом пространстве островков различных типов и «прилипанием» траекторий к их границам.

Численный анализ показывает, что $\langle p^2 \rangle \sim t^{\mu_p}$, где $1 < \mu_p < 2$.

Такая диффузия называется *аномальной*. Например, при $K=6.908745$ (возможен режим ускорителя),

$$\langle p^2 \rangle \sim t^{\mu_p}, \quad \langle x^2 \rangle \sim t^{\mu_x}, \quad \mu_p = 1.25, \quad \mu_x = 3.3.$$

Типичная траектория:

