Лекция 7. Метод усреднения, адиабатические инварианты.

1. Метод усреднения.
2. Адиабатические инварианты.

1. Метод усреднения.

1.1 *Принцип усреднения*

Рассмотрим систему

$$\dot{\varphi} = \omega(I) + \varepsilon f(I, \varphi),$$
$$\dot{I} = \qquad \varepsilon g(I, \varphi), \qquad \varepsilon \ll 1.$$

Она является малым возмущением системы $\dot{I} = 0, \quad \dot{\varphi} = \omega(I)$

Пусть $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_k) \bmod 2\pi$, $I = (I_1, \ldots, I_l)$. Переменные φ изменяются быстро, переменные I – медленно.

Принцип усреднения состоит в замене этой системы *усредненной*:

$$\dot{J} = \varepsilon \bar{g}(J), \quad \bar{g}(J) = (2\pi)^{-k} \int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} g(J, \varphi)\, d\varphi_1 \ldots d\varphi_k \quad ,$$
$$J = (J_1, \ldots, J_l)$$

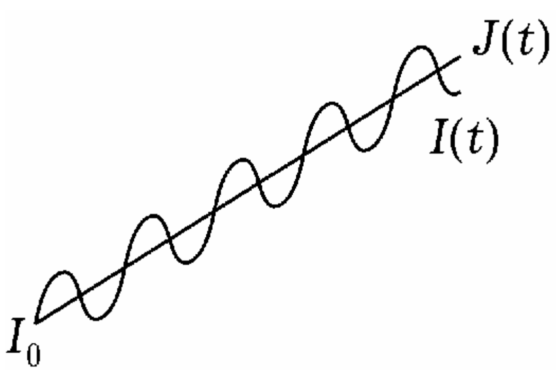
Утверждается, что усредненная система «хорошо аппроксимирует» исходную на больших временах $t \sim 1/\varepsilon$.

В.И.Арнольд: «этот принцип – не теорема, не аксиома и не определение, а физическое предложение, т.е. расплывчато сформулированное и, строго говоря, неверное утверждение».

Пример 1.

Рассмотрим возмущенную систему: $\dot{\varphi} = \omega, \qquad \dot{I} = \varepsilon(a + b\cos\varphi).$

Усредненная система имеет вид: $\dot{J} = \varepsilon a.$



Таким образом, при переходе к усредненной системе мы отбрасываем в правой части члены того же порядка, что и оставляемые. На временах порядка 1 и те, и другие дают одинаковый эффект. Но на временах ~1/ε оставленные члены приводят к дрейфу, а отброшенные – лишь к малому дрожанию. Точное решение (при φ(0) = 0):

$I(t) = I_0 + \varepsilon a t + \dfrac{\varepsilon b}{\omega}\sin\omega t$. Решение усредненной системы:

$$J(t) = I_0 + \varepsilon a t$$

1.2 *Усреднение в одночастотных системах*

Невозмущенная система:

$$\begin{cases} \dot I = 0 \\ \dot\phi = \omega(I). \end{cases}$$

Возмущенная система:

$$\begin{cases} \dot I = \varepsilon f(I,\phi,\varepsilon), \quad I \in \mathcal{R}^n \\ \dot\phi = \omega(I) + \varepsilon g(I,\phi,\varepsilon), \quad \phi \in \mathcal{S}^1 \mathrm{mod}\, 2\pi. \end{cases}$$

Усредненная система: $\dot J = \varepsilon f_0(J)$, $f_0(J) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(J,\phi,0)\, d\phi.$

Пусть $f, g, \omega \in \mathcal{C}^1$, $\omega \neq 0$.

Основной вопрос:

$$I(0) = J(0) = I_0, \qquad |I(t) - J(\varepsilon t)| = ?, \qquad t \in (0, 1/\varepsilon).$$

Запись $J = J(\varepsilon t)$ подчеркивает, что *J* зависит от времени медленно. Действительно, введем «медленное время» $\tau = \varepsilon t$. Усредненная система принимает вид $J'_\tau = f_0(J)$, следовательно, $J = J(\tau) = J(\varepsilon t)$. Это обстоятельство очень важно не только для расчетов, но и для численного исследования системы.

Теорема (П.Фату, 1928)

$$|I(t) - J(\varepsilon t)| < C_1\varepsilon \quad \text{при} \quad t \in (0, 1/\varepsilon),$$

где C_1 – некоторая положительная постоянная.

Схема доказательства (Н.Н.Боголюбов). Исходная и усредненная системы имеют вид:

$$\begin{cases} \dot{I} = \varepsilon f(I, \phi, \varepsilon), \\ \dot{\phi} = \omega(I) + \varepsilon g(I, \phi, \varepsilon), \end{cases} \qquad \dot{J} = \varepsilon f_0(J), \quad f_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(J, \phi, 0)\, d\phi.$$

Главная идея – сделать замену $I = \bar{I} + \varepsilon u(\bar{I}, \phi)$, усредняющую в первом приближении правую часть уравнения для $\dot{I}$.
Функцию $u \in C^1$ предполагаем периодичной по φ.
Если удалось сделать такую замену, то $|I - \bar{I}| \le C\varepsilon$. Кроме того, $|I - J| \le |I - \bar{I}| + |\bar{I} - J| \le C\varepsilon + |\bar{I} - J|$. Поэтому задача сводится к сравнению решений $\bar{I}$ и J.

Подставим искомую замену в уравнение для $\dot{I}$:

$$\dot{\bar{I}} + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial \bar{I}} \dot{\bar{I}} + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial \phi} \dot{\phi} = \varepsilon f(\bar{I} + \varepsilon u, \phi, \varepsilon).$$

Отсюда находим:

$$\dot{\bar{I}} = \varepsilon \left(f(\bar{I}, \phi, 0) - \frac{\partial u}{\partial \phi} \omega(\bar{I}) \right) + \varepsilon^2 O(||u|| + ||\frac{\partial u}{\partial I}|| + ||\frac{\partial u}{\partial \phi}||).$$

Определим 2π-периодическую по φ функцию u :

$$u(\bar{I}, \phi) = \frac{1}{\omega(\bar{I})} \int_0^{\phi} \left(f(\bar{I}, \xi, 0) - f_0(\bar{I}) \right) d\xi$$

Получим:

$$\begin{aligned} &\dot{\bar{I}} = \varepsilon f_0(\bar{I}) + O(\varepsilon^2), \quad &&\bar{I}(0) = I_0 + O(\varepsilon) \\ &\dot{J} = \varepsilon f_0(J), &&J(0) = I_0, \end{aligned} \quad \Rightarrow |\bar{I}(t) - J(\varepsilon t)| \leq \mathrm{const} \cdot \varepsilon.$$

Поэтому и $|I - J| \leq C_1 \varepsilon$, что и требовалось доказать.

Пример 2. (Уравнение Ван-дер-Поля)

$$\ddot{x} = -x + \varepsilon(1 - x^2)\dot{x}$$

Перейдем на плоскости $(x, \dot{x})$ к полярным координатам:

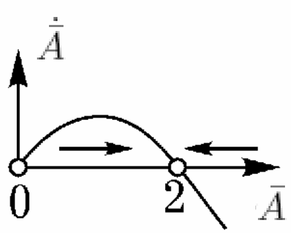
$$x = A\sin\phi, \qquad \dot{x} = A\cos\phi.$$

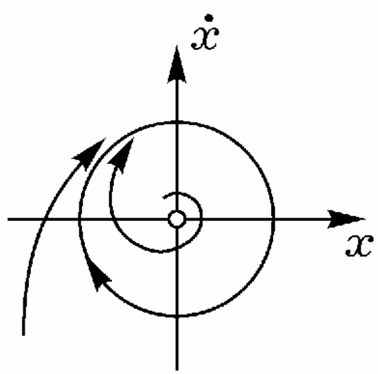
Получим после преобразований:

$$\begin{cases} \dot{A} = \varepsilon A(1 - A^2\sin^2\phi)\cos^2\phi, \\ \dot{\phi} = 1 - \varepsilon(1 - A^2\sin^2\phi)\sin\phi\cos\phi = 1 + O(\varepsilon). \end{cases}$$

Проведем усреднение по быстрой фазе:

$$\dot{\bar{A}} = \varepsilon\bar{A}\left(\frac{1}{2} - \frac{\bar{A}^2}{8}\right).$$





Усредненная система имеет неустойчивую неподвижную точку при $\bar{A} = 0$ и асимптотически устойчивую при $\bar{A} = 2$. Последней соответствует предельный цикл в исходной системе.

Вообще, если усредненная система имеет невырожденную неподвижную точку $J = J^*$, то исходная система имеет периодическое решение $I = J^* + O(\varepsilon)$. Если неподвижная точка гиперболическая, то устойчивость периодического решения такая же, как у неподвижной точки.

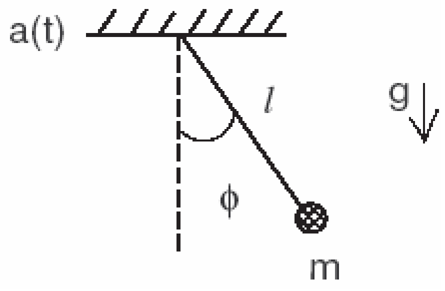
Можно провести последовательно r замен метода усреднения, чтобы убить зависимость от фазы в правой части в членах до r-го порядка по ε. Уравнения примут вид:

$$\begin{cases} \dot{\bar{I}} = \varepsilon f_0(\bar{I}) + \varepsilon^2 f_1(\bar{I}) + \ldots + \varepsilon^r f_{r-1}(\bar{I}) + O(\varepsilon^{r+1}), \\ \dot{\bar{\phi}} = \omega(\bar{I}) + \varepsilon g_0(\bar{I}) + \varepsilon^2 g_1(\bar{I}) + \ldots + \varepsilon^r g_{r-1}(\bar{I}) + O(\varepsilon^{r+1}). \end{cases}$$

Обозначим $\bar{I}_{approx}, \bar{\phi}_{approx}$ решение этой системы при отброшенных слагаемых $O(\varepsilon^{r+1})$. Пусть $I_{approx}, \phi_{approx}$ - соответствующее приближенное решение точной системы. Тогда

$$|I(t) - I(t)_{approx}| < C_1\varepsilon^r, \quad |\phi(t) - \phi(t)_{approx}| < C_2\varepsilon^{r-1} \quad \text{при} \quad 0 < t \le \frac{1}{\varepsilon}.$$

Пример 3. Устойчивость верхнего положения равновесия маятника с быстро колеблющейся точкой подвеса.



$$a(t) = \varepsilon a_0 \sin\frac{\omega t}{\varepsilon}$$

Переход от декартовых к полярным координатам: $x = l\sin\phi, \qquad y = a(t) - l\cos\phi.$

Лагранжиан:

$$\mathcal{L} = \frac{ml^2\dot\phi^2}{2} + ml\dot\phi\dot a\sin\phi + mgl\cos\phi.$$

Преобразование Лежандра:

$$p = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\phi} = ml^2\dot\phi + ml\dot a\sin\phi, \qquad H = p\dot\phi - \mathcal{L}.$$

Гамильтониан: $$H = \frac{(p - ml\dot a\sin\phi)^2}{2ml^2} - mgl\cos\phi.$$

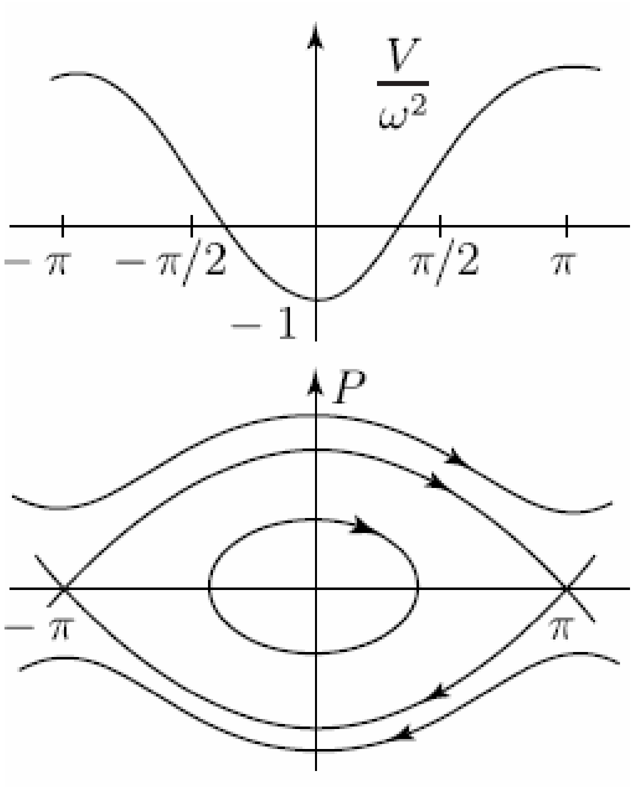
Усредняя по времени, получим:

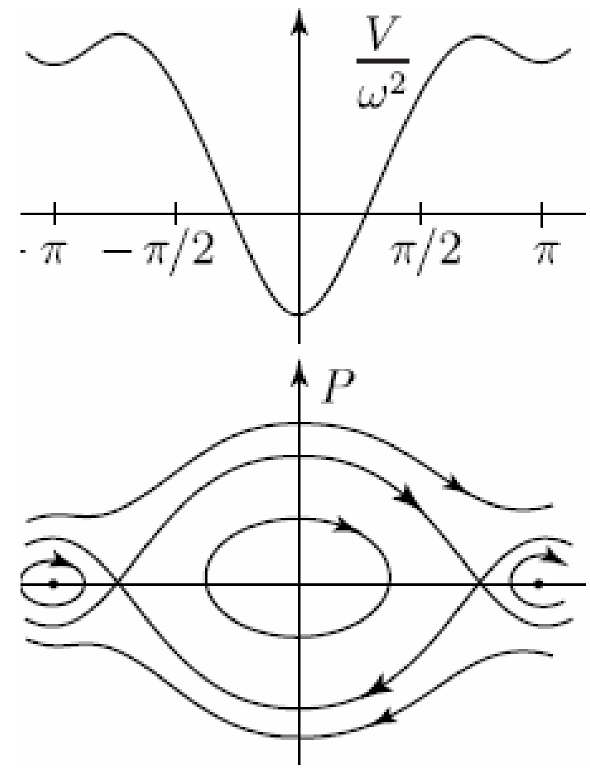
$$< H >_t = \frac{p^2}{2ml^2} - m\left(\frac{a_0\omega}{2}\right)^2\frac{\cos 2\phi}{2} - mgl\cos\phi$$

Пусть φ = π + δφ. Вблизи этого угла гамильтониан имеет вид:

$$h = \frac{p^2}{2ml^2} + m\,\delta\varphi^2 \left(\left(\frac{a_0 \omega}{2} \right)^2 - \frac{gl}{2} \right)$$

При $a_0\omega > \sqrt{2gl}$ верхнее положение равновесия устойчиво.





2. Адиабатические инварианты

2.1 *Адиабатическая инвариантность действия.*

Рассмотрим некоторую возмущенную систему вида

$$\dot{x} = v(x) + \varepsilon w(x, \varepsilon)$$

Функция $I(x)$ называется адиабатическим инвариантом, если

$$\sup_{0 \le t \le 1/\varepsilon} |I(x(t)) - I(x(0))| \underset{\varepsilon \to 0}{\to} 0$$

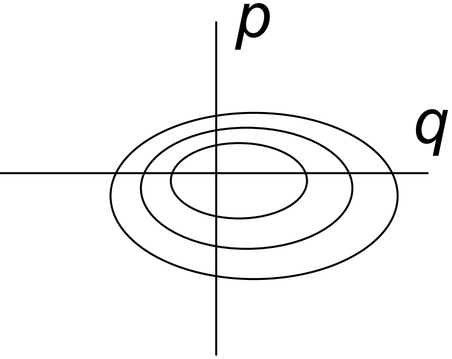
вдоль всех (в рассматриваемой области) фазовых траекторий системы. (Тут существенно, что рассматривается большой интервал времени ~ 1/ε).

Рассмотрим гамильтонову систему с одной степенью свободы, зависящую от медленно изменяющегося со временем параметра:

$$E = E(p, q, \lambda), \quad \lambda = \lambda(\tau), \quad \tau = \varepsilon t, \quad 0 < \varepsilon << 1$$

Функцию $\lambda(\tau)$ будем предполагать достаточно гладкой.

Предположим, что при каждом фиксированном значении λ система имеет замкнутые фазовые кривые на фазовом портрете. Можно ввести переменные действие-угол с помощью канонической замены переменных, задаваемой производящей функцией



$W = W(I, q, \lambda)$:

$$p = \frac{\partial W}{\partial q},\ \phi = \frac{\partial W}{\partial I} \quad , \qquad W = \int_{q_0}^{q} p(h(I,\lambda), x, \lambda)\, dx.$$

Здесь $h = h(I, \lambda)$ - гамильтониан, выраженный в новых переменных. Сделаем теперь замену $(p, q) \mapsto (I, \phi)$ при λ, изменяющемся со временем. Теперь гамильтониан будет иметь вид $H = h(I, \lambda) + \partial W/\partial t$, т.е.

$$H = E + \frac{\partial W}{\partial t} = H_0(I, \tau) + \varepsilon \frac{\partial W}{\partial \tau} = H_0(I, \tau) + \varepsilon H_1(I, \phi, \tau).$$

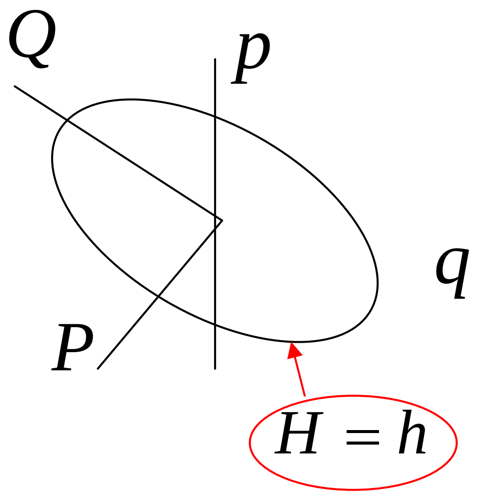
Уравнения движения принимают вид, стандартный для применения метода усреднения.

$$\begin{cases} \dot{I} = -\varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial \phi}, \\ \dot{\phi} = \frac{\partial H_0}{\partial I} + \varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial I}, \\ \dot{\tau} = \varepsilon. \end{cases}$$

усредненная система: $\dot{J} = 0.$

По теореме о точности метода усреднения в одночастотных системах получаем $|I(t) - I(0)| \lesssim \varepsilon$ при $t \in (0, 1/\varepsilon)$. Поэтому действие I – адиабатический инвариант.

Пример 4. (Из четвертой лекции)



$$H=\frac{1}{2}\left(a_{11}p^2+2a_{12}pq+a_{22}q^2\right)$$

Уровень энергии – эллипс. Поворотом можно привести к главным осям:

$$H=\frac{1}{2}\left(AP^2+BQ^2\right)$$

Действие $I(h)$ – площадь внутри эллипса $H = h$, деленная на 2π:

$$\left(\frac{P}{\sqrt{2h/A}}\right)^2+\left(\frac{Q}{\sqrt{2h/B}}\right)^2=1 \Rightarrow I=\frac{h}{\sqrt{AB}}=\frac{h}{\sqrt{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}}$$

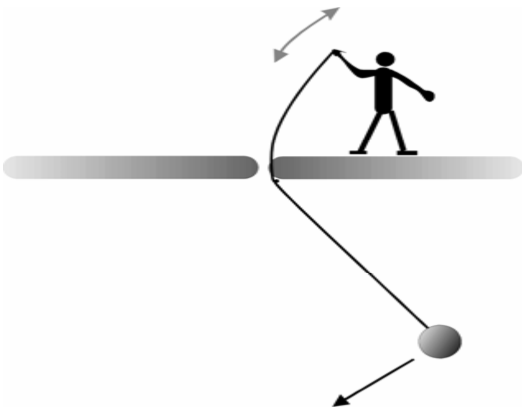
Уравнения движения:

$$\begin{cases}\dot{Q}=AP\\ \dot{P}=-BQ\end{cases} \Rightarrow \ddot{Q}+ABQ=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AB=\omega^2 \Rightarrow \boxed{I=\frac{h}{\omega}}$$

Пусть теперь $a_{ik} = a_{ik}(\lambda)$, $\lambda = \lambda(\varepsilon t)$. Тогда $h / \omega \approx \text{const}$ (с точностью $O(\varepsilon)$ на временах порядка $1/\varepsilon$).

Пример 5. Маятник с медленно изменяющейся длиной.



Гамильтониан ($l = l(\varepsilon t)$):

$$H = \frac{p^2}{2ml^2} - mgl\cos\phi.$$

Будем рассматривать малые колебания:

$$H = \frac{p^2}{2ml^2} + mgl\,\phi^2.$$

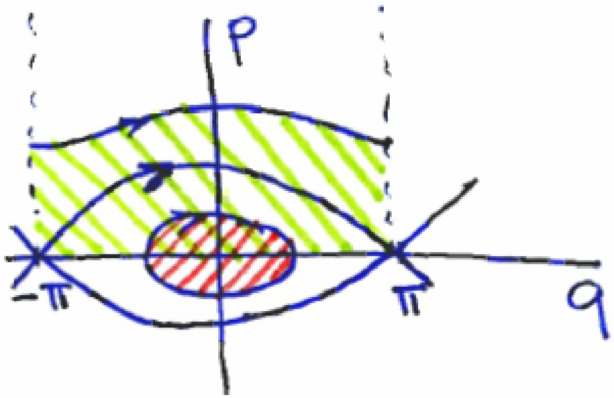
Частота малых колебаний $\omega = \sqrt{g/l}$. Отношение $\frac{H}{\omega}$ - адиабатический инвариант. Следовательно,

$$I = \frac{H}{\omega} \sim \frac{gl\phi_{max}^2}{\sqrt{g/l}} \sim l^{3/2}\phi_{max}^2 \approx \text{const},$$

где ϕ_{max} - амплитуда колебаний маятника. Откуда

$$\boxed{\phi_{max} \sim l^{-3/4}.}$$

Большие колебания маятника.



$$\ddot{q} + \omega^2(\tau)\sin q = 0 \qquad \tau = \varepsilon t$$

$$H = \frac{p^2}{2} - \omega^2(\cos q + 1)$$

Действие определим так:

$I = \frac{S_{\bullet}}{2\pi}$ для замкнутых траекторий;

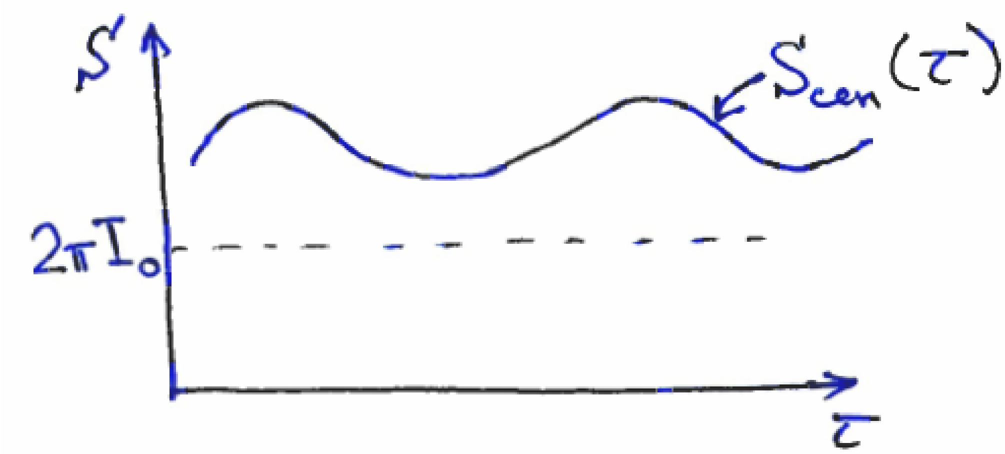
$I = \frac{S_{\bullet}}{\pi}$ для незамкнутых траекторий.

Уравнение сепаратрисы: $\frac{p^2}{2} - \omega^2(\cos q + 1) = 0$

Площадь, ограниченная сепаратрисой:

$$S_{сеп} = 2\int_{-\pi}^{\pi} 2\omega\cos\frac{q}{2}\,dq = 16\,\omega$$

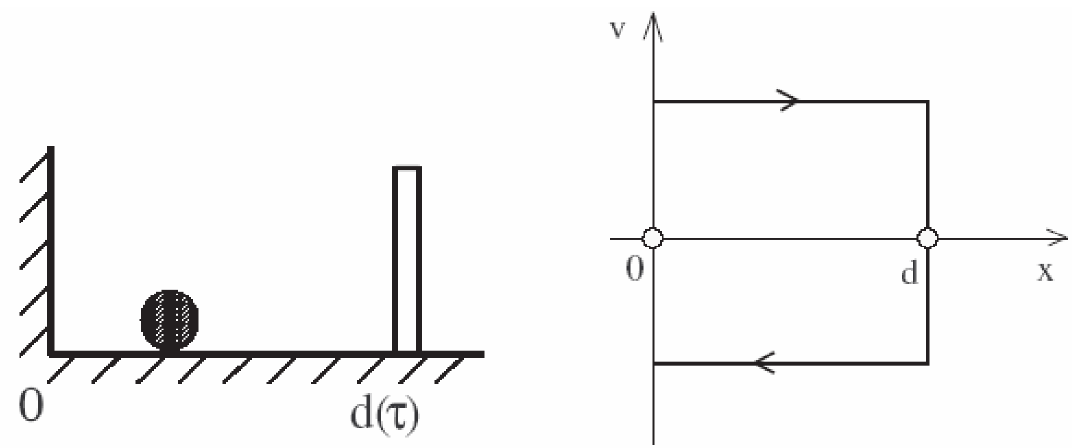
Если маятник при $\tau = 0$ колебался, то $2\pi I_0 < S_{сеп}(0)$



Если прямая S = $2\pi I_0$ лежит всюду ниже графика $S_{cen}(\tau)$, траектория не переходит через сепаратрису. Если же эти графики пресекутся, произойдет переход из колебаний во вращения.

Пример 6.

Одномерное свободное движение шарика между двумя стенками, расстояние между которыми медленно меняется.



Адиабатический инвариант – площадь, ограниченная фазовой траекторией, т.е. $2|v|d(\tau) \approx \text{const}$. Отсюда следует, в частности, что при любом законе движения стенок разогнать шарик можно только за большое время.

2.2 *Процедура исключения быстрой фазы. Улучшенный АИ.*

Рассмотрим гамильтонову систему с одной степенью свободы и медленной зависимостью от времени.

$$H = H_0(I,\tau) + \varepsilon H_1(I,\phi,\tau) \qquad \tau = \varepsilon t$$

Замена: $(I,\phi) \mapsto (\bar{I},\bar{\phi})$ с производящей функцией

$$W = \bar{I}\phi + \varepsilon S_1(\bar{I},\phi,\tau) + \varepsilon^2 S_2(\bar{I},\phi,\tau) + \dots$$

Наша цель – привести гамильтониан к виду

$$\mathcal{H}(\bar{I},\tau) = \mathcal{H}_0(\bar{I},\tau) + \varepsilon\mathcal{H}_1(\bar{I},\tau) + \dots$$

Имеем: $\mathcal{H}(\bar{I},\tau) = H(\bar{I} + \varepsilon\frac{\partial S}{\partial\phi},\phi,\tau) + \varepsilon^2\frac{\partial S}{\partial\tau}$, $\qquad S = S_1 + \varepsilon S_2 + \dots$

В первом приближении

$$\mathcal{H}_1(\bar{I},\tau) = \frac{\partial H_0}{\partial I}\frac{\partial S_1}{\partial\phi} + H_1(\bar{I},\phi,\tau), \;\Rightarrow\; \begin{cases} \mathcal{H}_1(\bar{I},\tau) = < H_1 >^{\phi}, \\ S_1 = \frac{1}{\partial H_0/\partial I}\int\limits_0^{\phi}\left(< H_1 >^{\phi} - H_1\right)\, d\phi + S_1^0(\bar{I}). \end{cases}$$

Сделаем *r* шагов. Гамильтониан примет вид

$$\mathcal{H}(\bar{I},\tau) = H_0(\bar{I}) + \varepsilon\mathcal{H}_1(\bar{I},\tau) + \ldots + \varepsilon^r\mathcal{H}_r(\bar{I},\tau) + \varepsilon^{r+1}\alpha(\bar{I},\bar{\phi},\tau),$$

а уравнения движения

$$\begin{cases} \dot{\bar{I}} = -\varepsilon^{r+1}\frac{\partial\alpha}{\partial\bar{\phi}}, \\ \dot{\bar{\phi}} = \frac{\partial H_0}{\partial\bar{I}} + \ldots + \varepsilon^r\frac{\partial\mathcal{H}_r}{\partial\bar{I}} + \varepsilon^{r+1}\frac{\partial\alpha}{\partial\bar{I}}. \end{cases}$$

Отбросим слагаемые $O(\varepsilon^{r+1})$. В полученной системе значения $\bar{I}$ сохраняются. Решив эту систему и сделав обратную замену, можно получить приближенное решение исходной системы $I(t)_{approx,r}$.

1) $|I(t) - I(t)_{approx,r}| = O(\varepsilon^{r+1})$, $t \in (0, 1/\varepsilon)$.

2) $|I(t) - I(0)| = O(\varepsilon)$, $t \in (0, 1/\varepsilon^r)$.

В лучшем случае, можно достичь экспоненциальной точности.

2.3 *Вечная адиабатическая инвариантность*.

Рассмотрим гамильтонову систему с одной степенью свободы и медленной периодической зависимостью от времени:

$$E(p, q, \tau + 2\pi) = E(p, q, \tau).$$

Рассмотрим область, заполненную замкнутыми траекториями при любом фиксированном *τ* . Гамильтониан E, выраженный в переменных действие-угол (I, ϕ), обозначим $H_0(I, \tau)$.

Определим $\bar{\omega} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \omega(I, \tau)\, d\tau$, где $\omega = \frac{\partial H_0}{\partial I}$.

Теорема (В.И.Арнольд)

Если $\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial I} \neq 0$, то вдоль любой фазовой траектории

$|I(t) - I(0)| = O(\varepsilon)$ при $-\infty < t < \infty$.