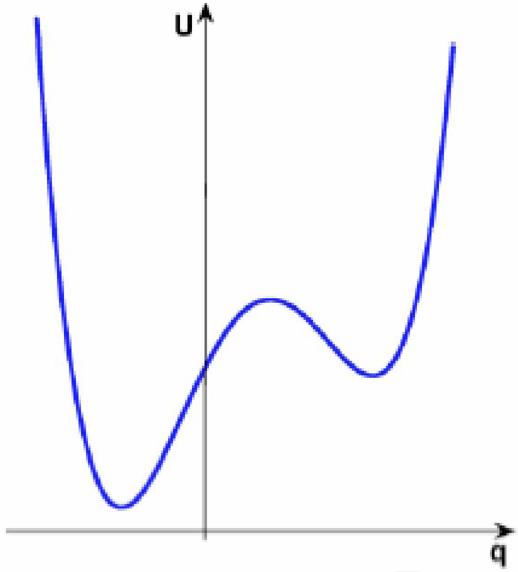
Лекция 8. Разрушение адиабатической инвариантности на сепаратрисах и резонансах.

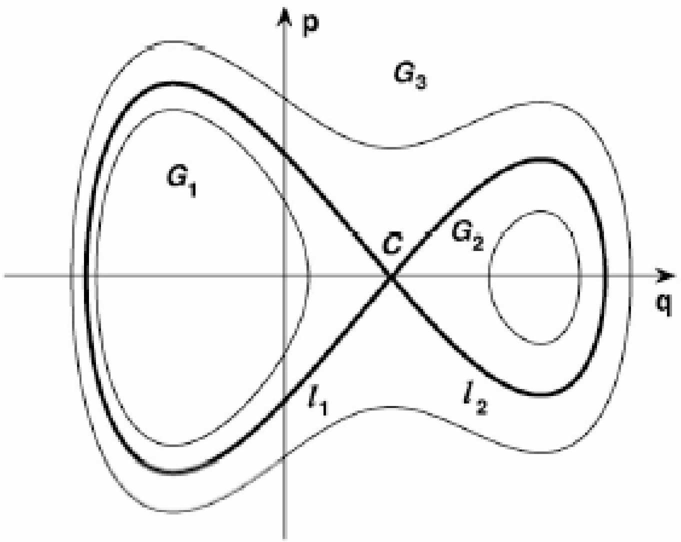
1. Системы с переходами через сепаратрису.
2. Рассеяние на резонансе и захват в резонанс.

1. Системы с переходами через сепаратрису.

1.1 *Переход через сепаратрису в адиабатическом приближении*

$H = H(p, q, \tau)\,, \quad \tau = \varepsilon t$

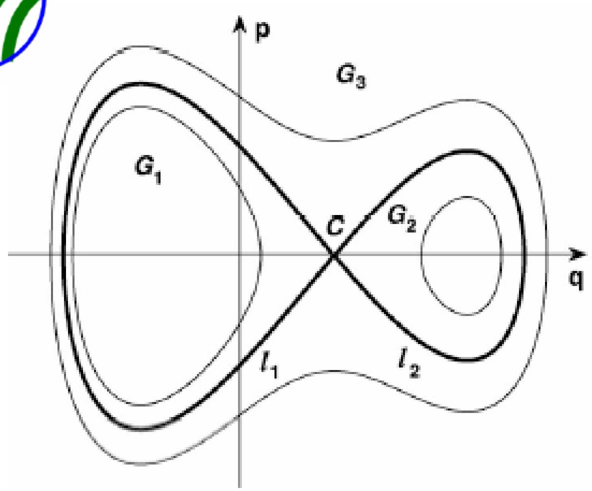




Пусть площади $S_{1,2}(\tau)$ областей $G_{1,2}$ растут:

$$dS_i/d\tau = \Theta_i(\tau) > 0\,, \quad i = 1, 2$$

В каждой из областей можно стандартным способом ввести переменные действие-угол (I, φ).



В адиабатическом приближении адиабатический инвариант (действие) сохраняется в ходе эволюции в каждой из областей. Пусть движение начинается в области G_3 при $I = I_-$. Тогда переход через сепаратрису произойдет в момент времени τ_*, который определяется из уравнения $S_3(\tau_*) = 2\pi I_-$. После перехода фазовая точка попадает в одну из двух областей G_i. Начальные условия, соответствующие захватам в G_1 и G_2, при малых ε сильно перемешаны. Можно определить вероятность захвата в G_i, i = 1,2:

$$P_i(M_0) = \lim_{\delta\to 0} \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\operatorname{mes} U_i^{\delta,\varepsilon}}{\operatorname{mes} U^{\delta}}$$

Можно доказать, что
$$P_i = \frac{\Theta_i(\tau_*)}{\Theta_1(\tau_*) + \Theta_2(\tau_*)}$$

1.2 *Квазислучайный скачок АИ при переходе через сепаратрису*

При движении вблизи сепаратрисы частота мала, и стандартный метод усреднения не работает. В главном приближении

$$T_i \cong -a_i \ln|h|$$

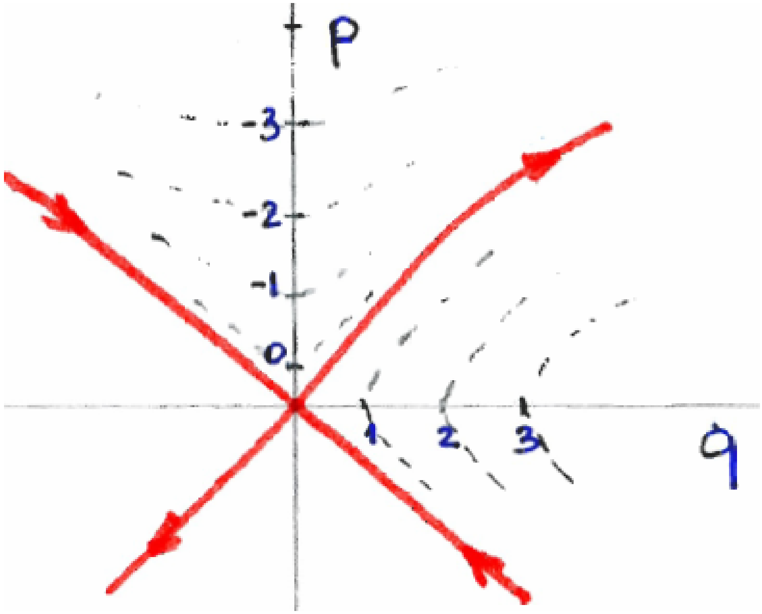
С учетом формулы $\frac{\partial h}{\partial I} = \omega = \frac{2\pi}{T}$ получим:

$$2\pi I \cong S_i - a_i h \ln|h|$$

Улучшенный АИ: $J(p,q,\tau) = I + \varepsilon u(p,q,\tau)$ (для *u* можно получить формулу)

Справедлива формула: $\frac{\partial I}{\partial \tau} = -\frac{1}{2\pi} \oint\limits_{H=h} \frac{\partial H}{\partial \tau}\, dt$

Следовательно, $\oint\limits_{l_i} \frac{\partial H}{\partial \tau}\, dt = -\Theta_i$. За один оборот вблизи сепаратрисы энергия в главном приближении изменяется на величину $\boxed{\Delta h = -\varepsilon\Theta_i}$.



Занумеруем точки пересечения траектории с осями, как показано на рисунке. Тогда при приближении к сепаратрисе имеем:

$$h_{n+1} \cong h_n - \varepsilon \Theta_3$$

$$\tau_{n+1} \cong \tau_n - \varepsilon\left[\frac{a}{2}\ln h_n + a\ln(h_n + \Theta_2\varepsilon) + \frac{a}{2}\ln h_{n+1}\right]$$

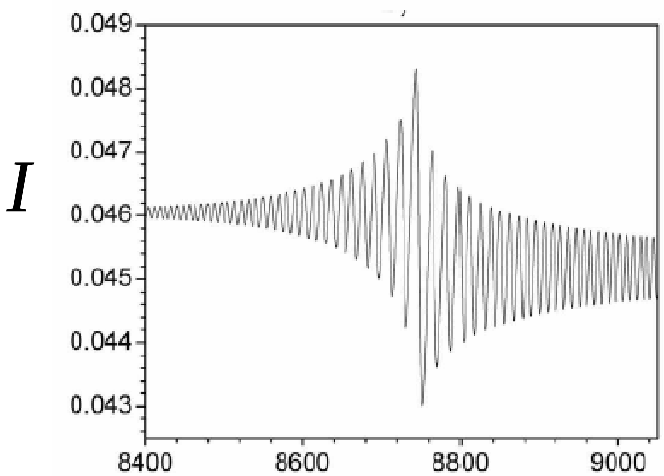
$$2\pi I_n \cong S_3(\tau_0) + \Theta_3(\tau_n - \tau_0) - 2ah_n\ln h_n$$

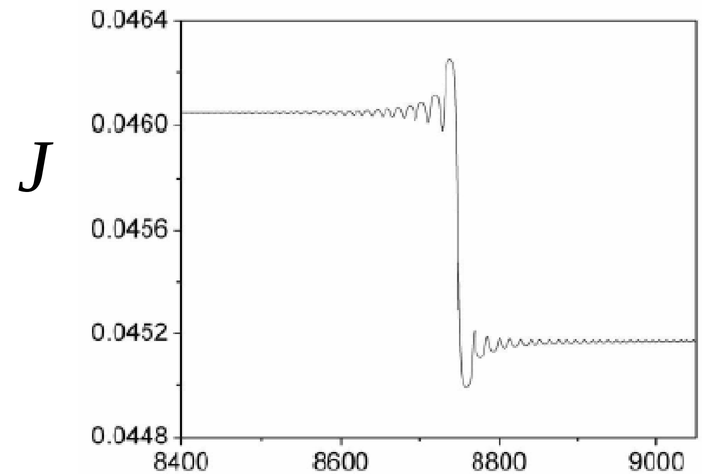
И аналогичные формулы после перехода. Надо просуммировать, и окончательно получим (А.И.Нейштадт 1986):

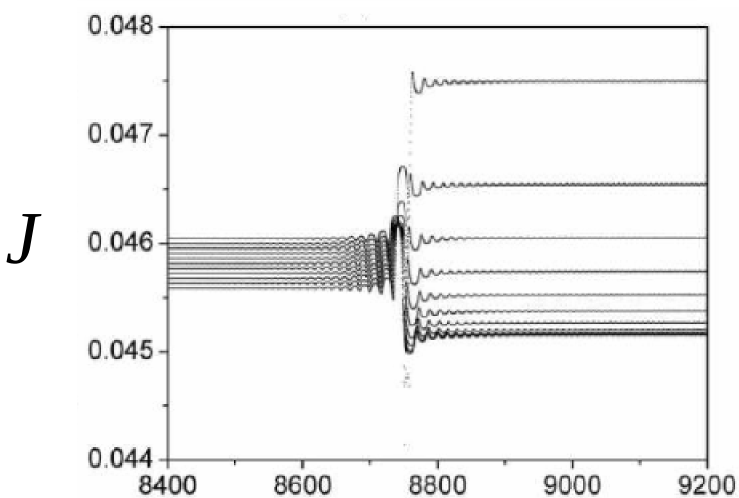
$$2\pi J_+ \cong S_i(\tau_*) + \varepsilon\ln\varepsilon\, a\,\Theta_i\left(\xi_i - \frac{1}{2}\right)\left[1 - \frac{2\Theta_i}{\Theta_3}\right]$$

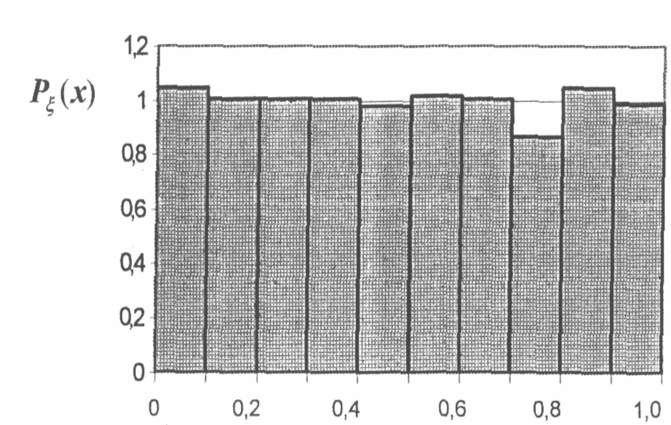
где $\xi_i = \dfrac{|h_1|}{\varepsilon\Theta_i}$

Величина $\xi_i \in (0,1)$ изменяется на величину порядка 1 при изменении начальных условий на величину порядка ε. Ее можно рассматривать как случайную величину, равномерно распределенную на (0,1). Поэтому скачок АИ также содержит случайную компоненту порядка ε ln ε.





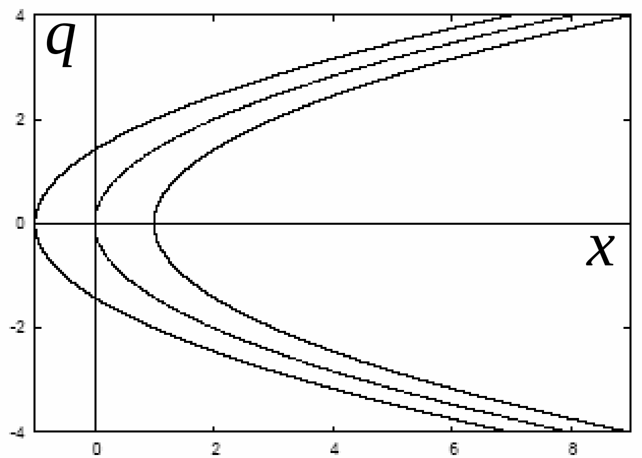




Если зависимость от медленного времени периодическая, то вся область фазовой плоскости, заметаемая сепаратрисой, становится областью хаотической динамики. Размер этой области – величина порядка 1, не зависящая от значения малого параметра. Время развития хаоса велико – больше по порядку, чем $1/\varepsilon$. Такой хаос называется иногда адиабатическим.

Пример 1. Движение иона в параболическом магнитном поле (Л.М.Зелёный, Й.Бюхнер 1989)

Магнитное поле $\mathbf{B} = (B_0 q/L, 0, B_n)$, силовые линии – параболы $B_n x - B_0 q^2/(2L) = \mathrm{const}$. Векторный потенциал:



$$\mathbf{A} = (0, B_n x - B_0 q^2/(2L), 0)$$

Гамильтониан системы:

$$H = \frac{1}{2m}\left[y^2 + \left(\eta - \frac{e}{c}\left(B_n x - B_0 \frac{q^2}{2L}\right)\right)^2 + p^2\right]$$

Введем малый параметр $\boxed{\varepsilon = \frac{B_n}{B_0}\sqrt{L/\rho}}$

Здесь $\rho = cmv/(eB_0)$ - ларморовский радиус, v - характерная скорость частицы. Обезразмеривая, получим систему с двумя степенями свободы

$$H = \frac{1}{2}\left[y^2 + p^2 + \left(x - \frac{1}{2}q^2\right)^2\right]$$

Канонически сопряженные переменные: (p, q) и (y, $\varepsilon^{-1}x$).

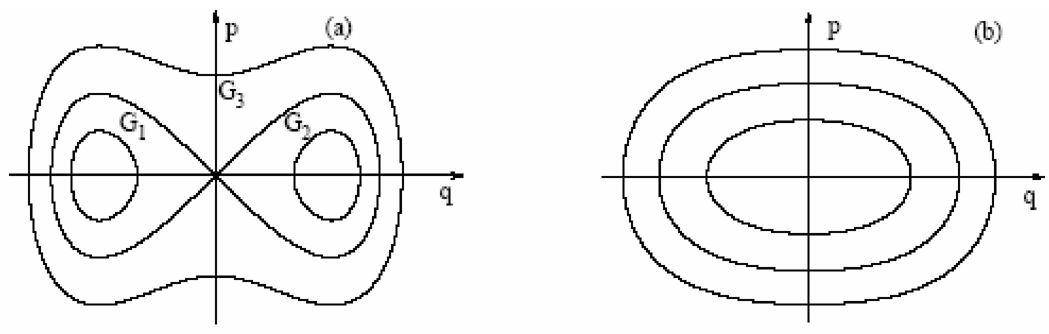
Уравнения движения:

$$\dot q = p$$
$$\dot p = xq - \frac{q^3}{2}$$

(быстрые переменные)

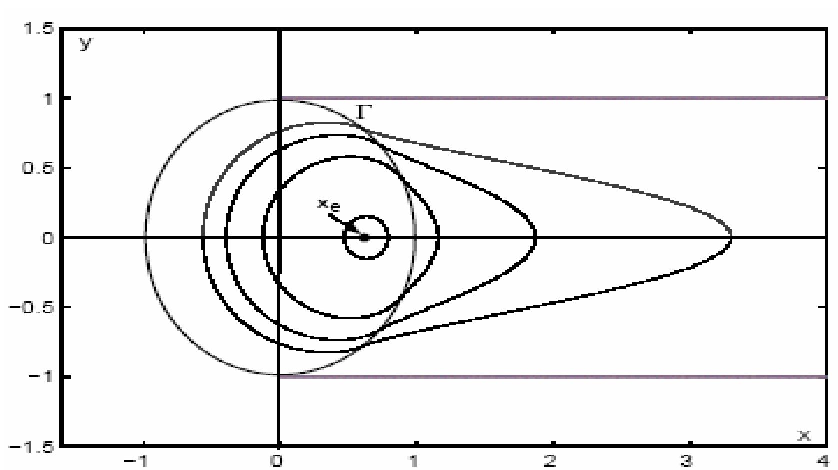
$$\dot x = \varepsilon y$$
$$\dot y = -\varepsilon x + \varepsilon \frac{q^2}{2}$$

(медленные переменные)



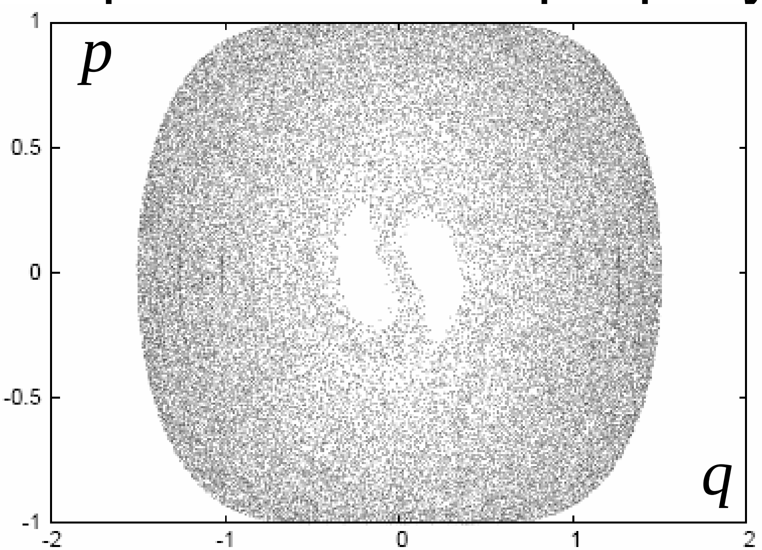
Быстрая плоскость:

a) $x > 0$, b) $x < 0$.



Медленная плоскость.

При медленной периодической эволюции переменных y,x сепаратриса на быстрой плоскости «дышит», при этом площадь, ей ограниченная периодически изменяется. Поэтому есть область, где фазовые траектории многократно пересекают сепаратрису на плоскости быстрых переменных.



Это область адиабатического хаоса, в которой происходит разрушение адиабатической инвариантности магнитного момента (действия на плоскости быстрых переменных).

Благодаря дополнительной симметрии в этой области имеется большое число островков устойчивости, соответствующих устойчивым периодическим траекториям системы (А.И.Нейштадт и др. 2008).

2. Рассеяние на резонансе и захват в резонанс.

2.1 *Резонансные явления в системах с быстрыми и медленными движениями*

Рассмотрим систему с гамильтонианом

$$H = H_0(p, q, I) + \varepsilon H_1(p, q, I, \varphi),$$

где парами канонически сопряженных переменных являются

$$(p, \varepsilon^{-1} q) \in \mathbb{R}^2, \qquad (I, \varphi) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{T}^m$$

Уравнения движения:

$$\dot{p} = -\varepsilon \frac{\partial H_0}{\partial q} - \varepsilon^2 \frac{\partial H_1}{\partial q}$$

$$\dot{q} = \varepsilon \frac{\partial H_0}{\partial p} + \varepsilon^2 \frac{\partial H_1}{\partial p}$$

$$\dot{I} = -\varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial \varphi}$$

(медленные переменные)

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H_0}{\partial I} + \varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial I}$$

(быстрые фазы)

Можно попытаться усреднить по быстрым фазам.
Усредненная система (адиабатическое приближение):

$$\dot{p} = -\varepsilon \frac{\partial H_0}{\partial q}, \quad \dot{q} = \varepsilon \frac{\partial H_0}{\partial p}, \quad \dot{I} = 0$$

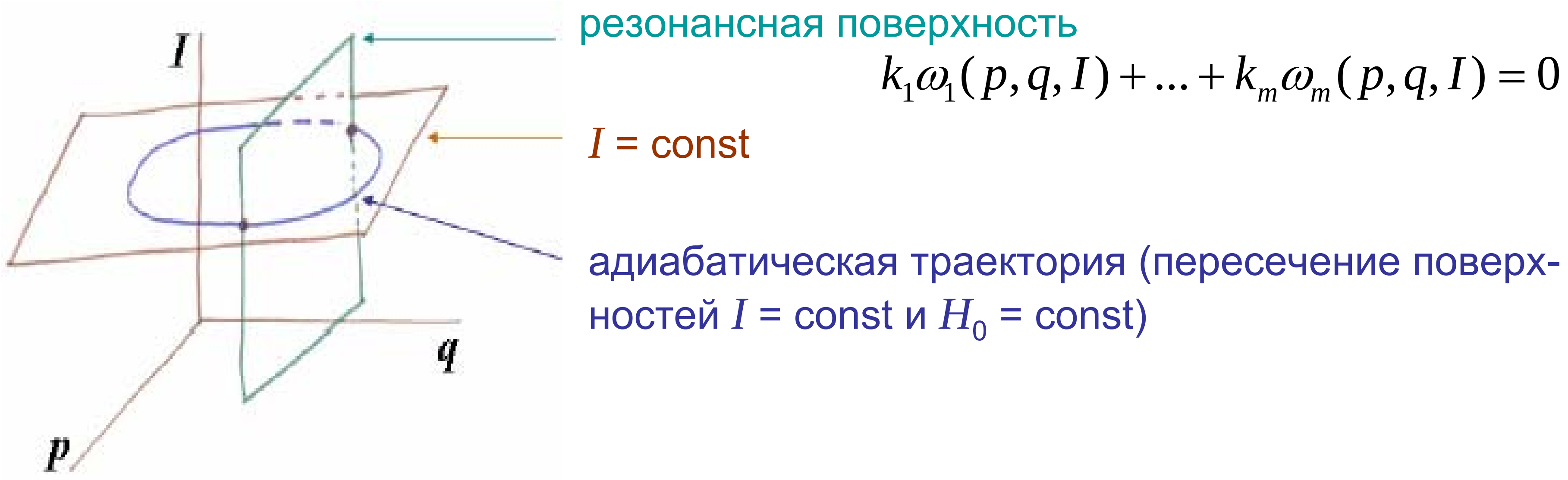
Вдоль траектории адиабатического приближения $I = \mathrm{const}$.
Следовательно, I – хороший кандидат на роль набора адиабатических инвариантов в точной системе.

Но: разложим в ряд Фурье правую часть уравнения $\dot{I} = -\varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial \varphi}$

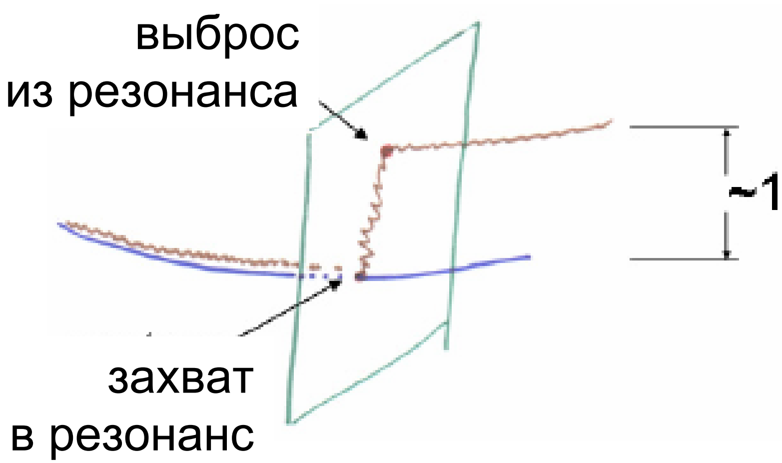
Получим $\sum f_k e^{i(k,\varphi)}, \quad k \in Z^m, \quad k \neq 0$. В *резонансе*

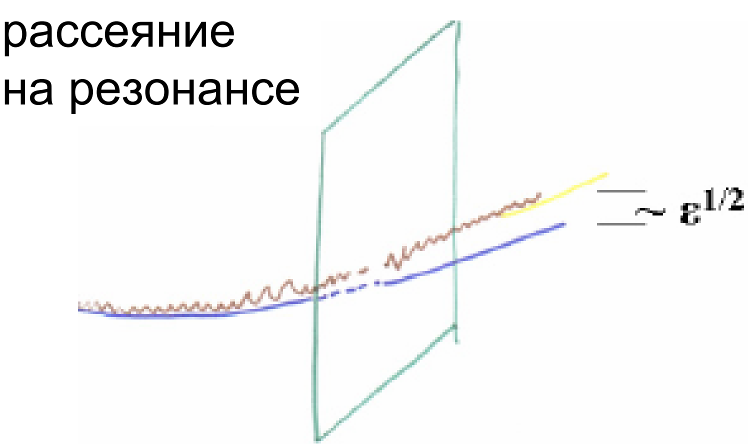
$$\boxed{k_1\omega_1 + \ldots + k_m\omega_m = 0,} \quad \omega_j = \frac{\partial H_0}{\partial I_j}$$

соответствующая гармоника не осциллирует, и усреднение по ней не правомерно.

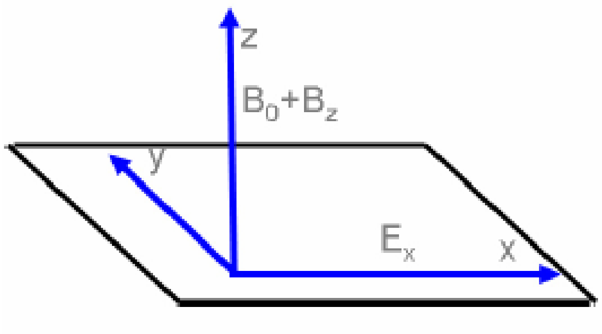


Оказывается, что при пересечении резонансной поверхности могут происходить следующие явления:





Пример 2. (Артемьев, Зелёный, Нейштадт и др. 2009)



Заряженная частица в однородном магнитном поле B_0 и ортогонально распространяющейся электромагнитной волне. Магнитное поле волны:

$$B_z = -\tilde{B}\sin(ky - \omega t)$$

Электрическое поле волны:

$$E_x = \frac{\tilde{B}\omega}{kc}\sin(ky - \omega t)$$

Уравнения движения:

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{e}{mc}(B_0 + B_z)\,\dot{y} + \frac{e}{m}E_x \\ \ddot{y} = -\frac{e}{mc}(B_0 + B_z)\,\dot{x} \end{cases}$$

Уравнения движения после обезразмеривания:

$$\begin{cases} \dot{v}_x = b_z v_\phi \sin\phi + (b_0 - b_z \sin\phi)\, v_y \\ \dot{v}_y = -\,(b_0 - b_z \sin\phi)\, v_x \\ \dot{\phi} = k v_y - \omega \end{cases}$$

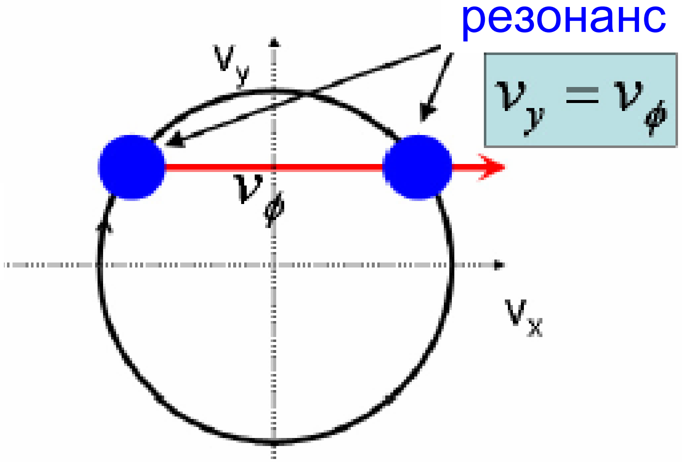
Предположения:

$$v_x, v_y, v_\phi, b_0, b_z \sim 1$$

$$k \gg 1, \quad \omega \gg 1$$

Где $\phi = k(y - v_\phi t), v_\phi = \omega/k.$
Усредненная по ϕ система описывает ларморовское вращение:

$$\begin{cases} \dot{v}_x = b_0 v_y \\ \dot{v}_y = -b_0 v_x \end{cases}$$



Перепишем уравнения, выразив y, v_y через $\phi, \dot{\phi}$:

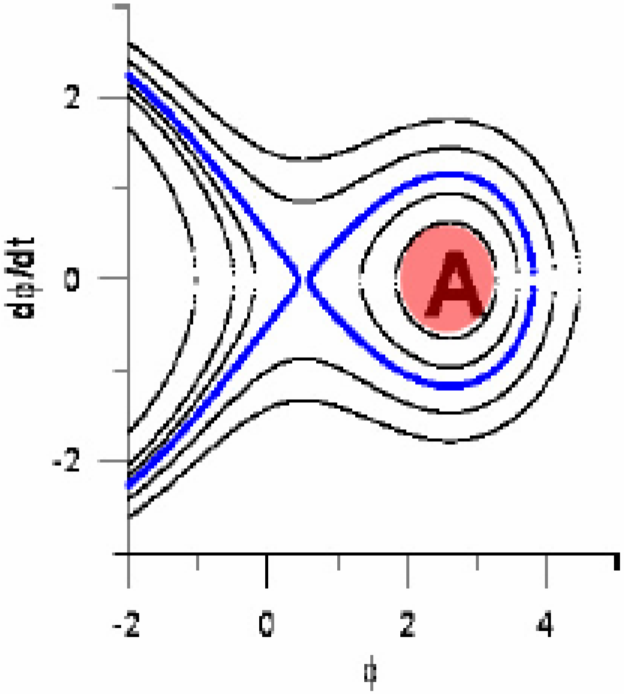
$$\begin{cases} \dot{v}_x = b_z v_\phi \sin\phi + (b_0 - b_z \sin\phi)\left(\dot{\phi}/k + v_\phi\right) \\ \ddot{\phi} = -k\,(b_0 - b_z \sin\phi)\, v_x \end{cases}$$

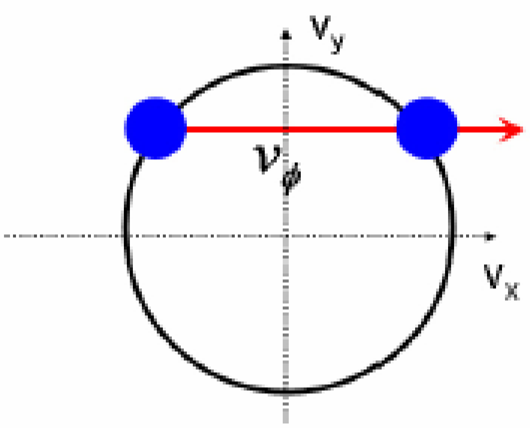
Вблизи резонанса $\dot{\phi} \approx 0.$ Поэтому в главном приближении

$$\begin{cases} \dot{v}_x = b_0 v_\phi \\ \ddot{\phi} = -k\,(b_0 - b_z \sin\phi)\, v_x \end{cases}$$

$$k \gg 1$$

Здесь v_x - медленная переменная, а $\phi, \dot{\phi}$ - быстрые переменные. Это уравнение маятника с крутящим моментом и медленно изменяющимся параметром. Такого типа уравнения всегда возникают при исследовании систем вблизи резонанса.





Пусть $b_z > b_0$. Тогда на фазовом портрете быстрой системы

$$\ddot{\phi} = -kv_x\,(b_0 - b_z \sin\phi)$$

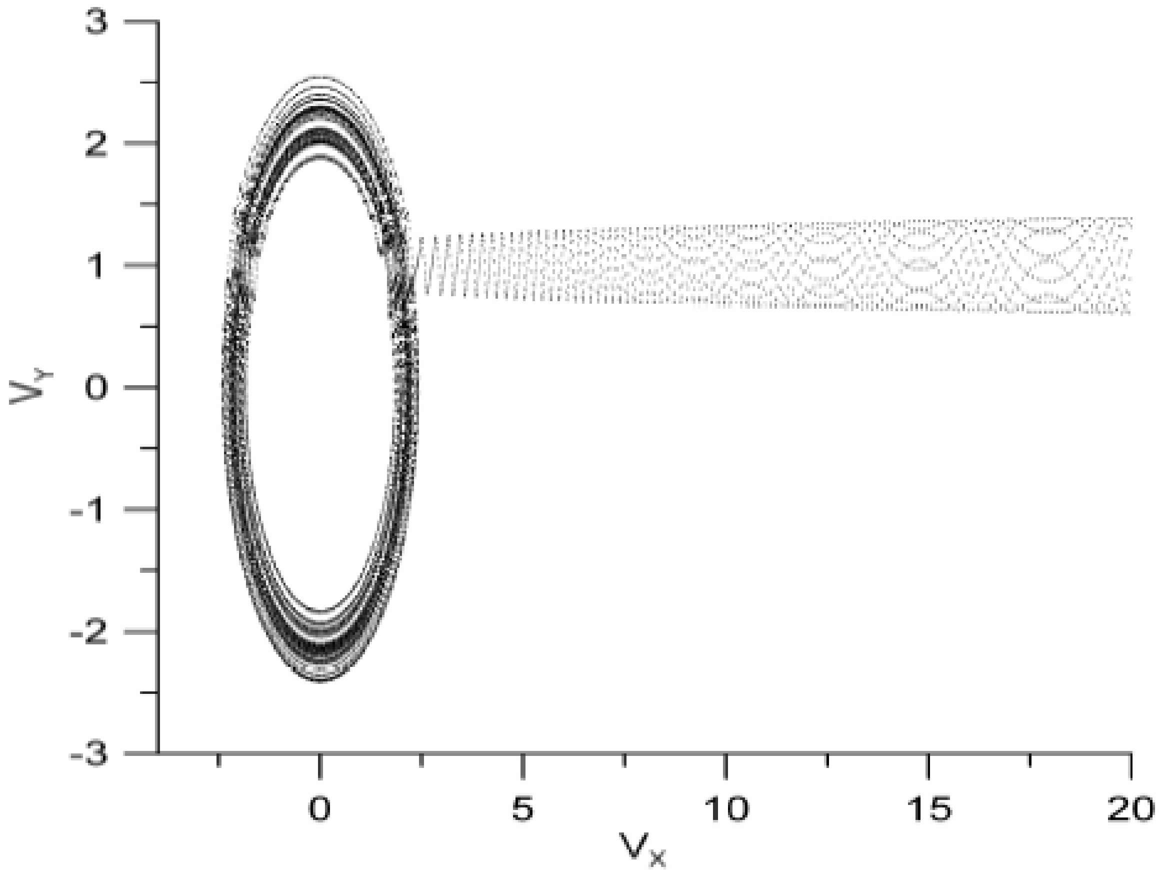
есть сепаратриса.
Площадь A, ограниченная фазовой траекторией на портрете – АИ.
Поэтому, если площадь S, ограниченная сепаратрисой растет, возможен захват.

$$S \propto \sqrt{k|v_x|}.$$

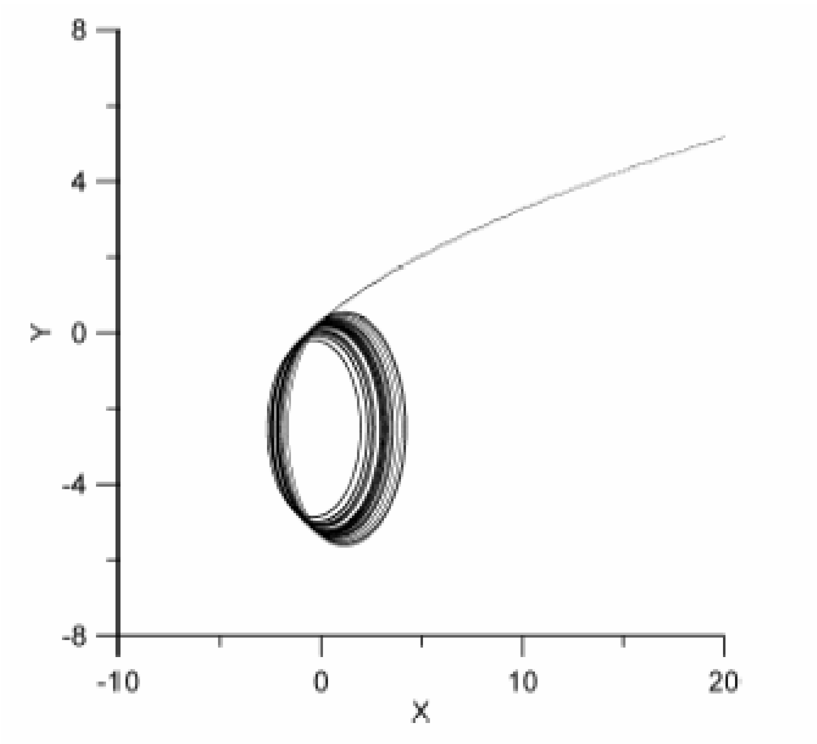
Захват в резонанс возможен при

$$v_x > 0$$

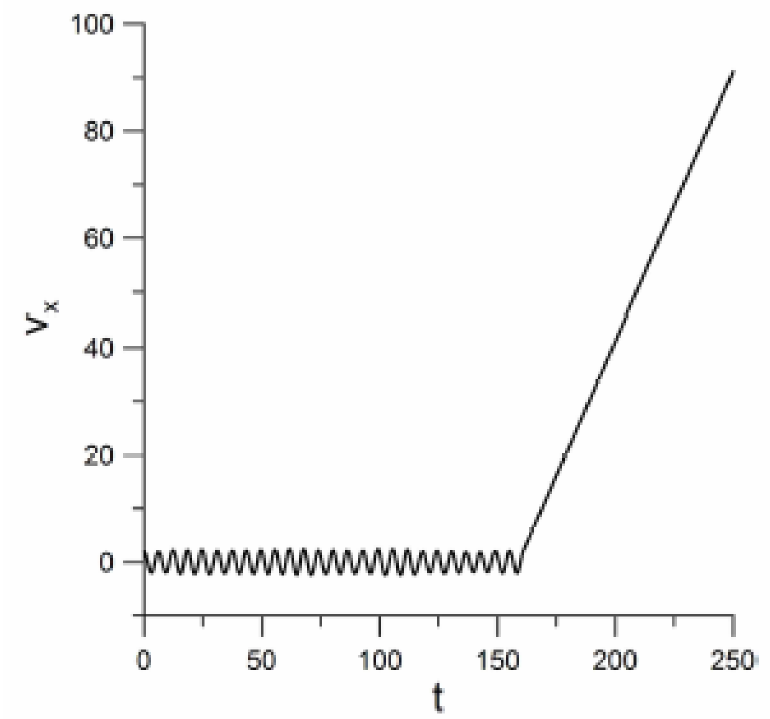
(там, где S растет со временем).



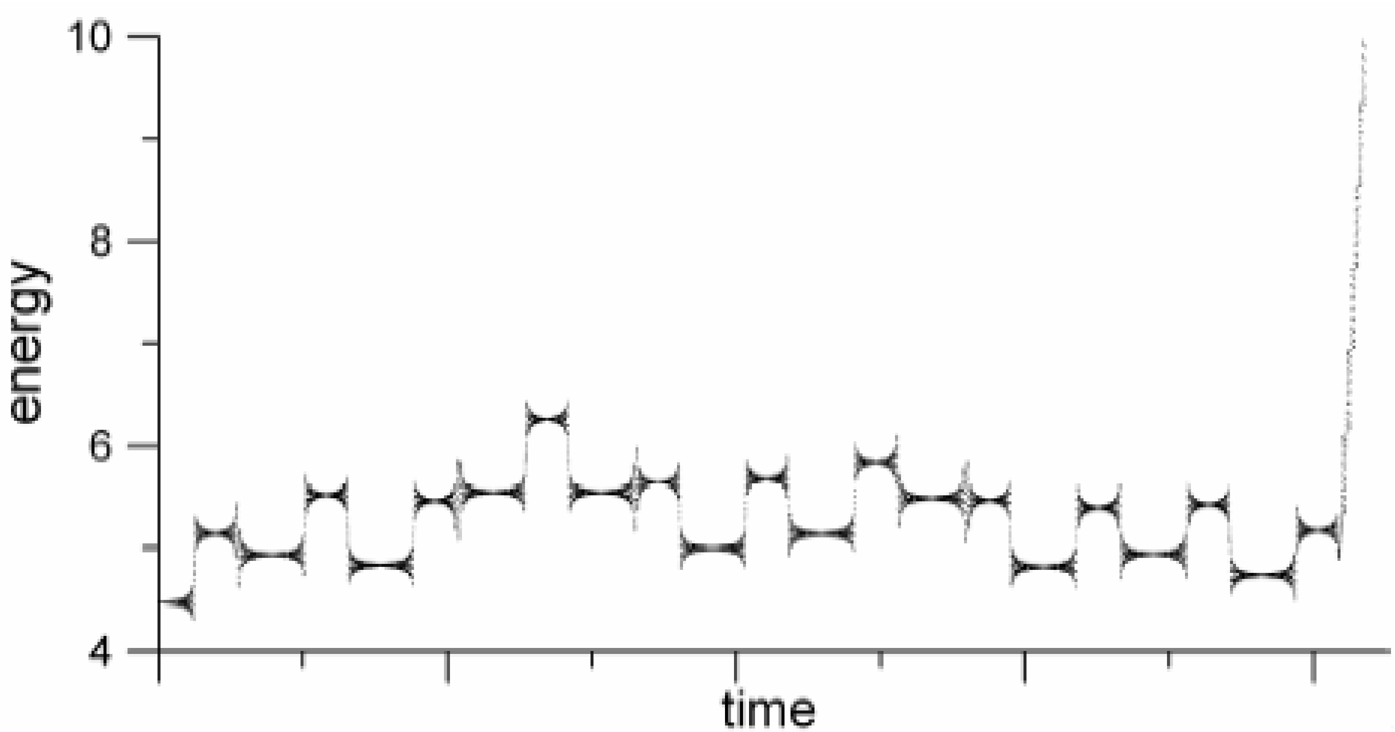
Рассеяние на резонансе и захват в резонанс на плоскости скоростей (v_x, v_y). Поскольку площадь S монотонно растет вдоль движения захваченной частицы, выброс из резонанса в этой задаче невозможен.



Движение на плоскости координат (*x*, *y*).



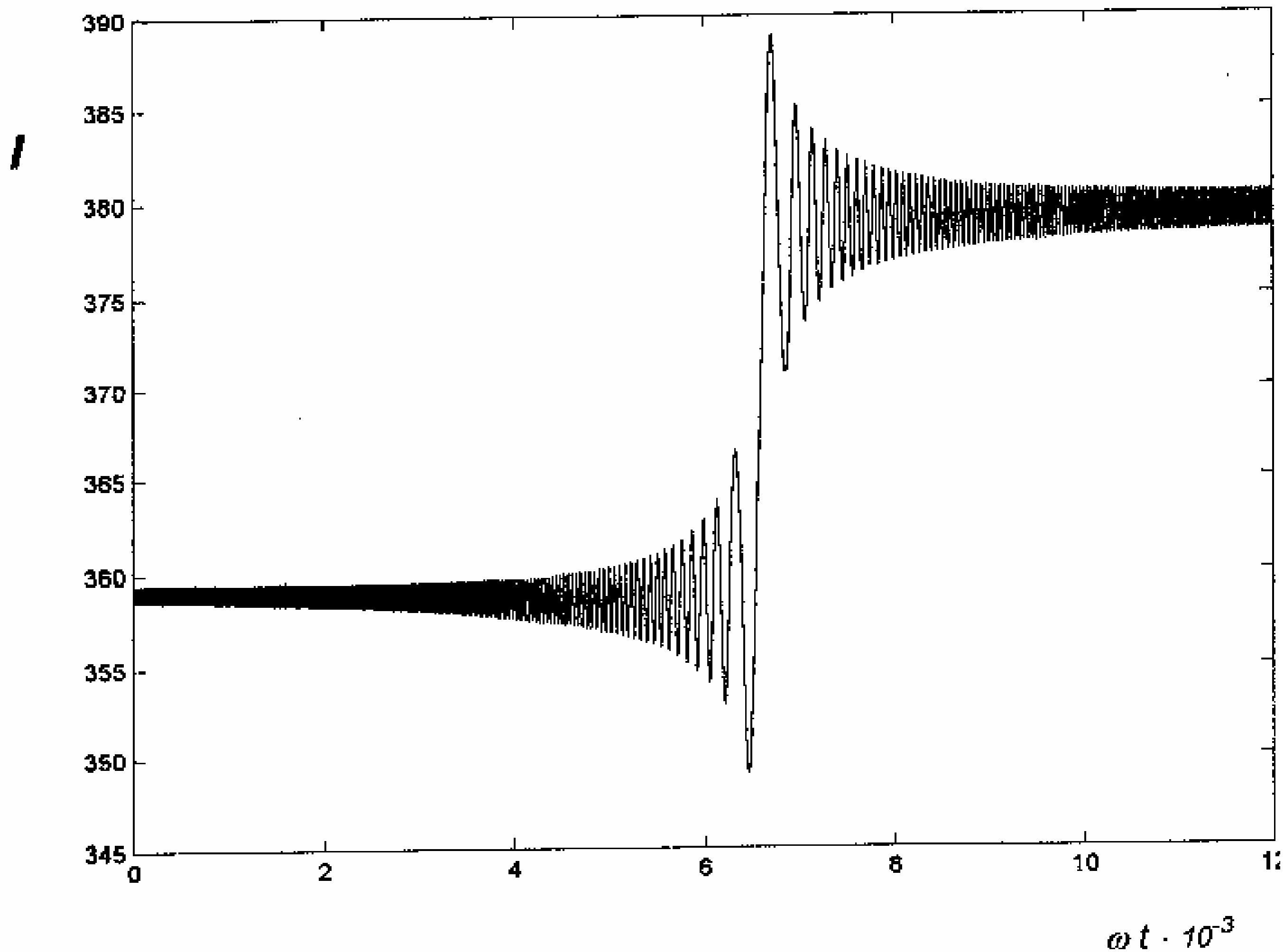
Зависимость x-компоненты скорости от времени.



Зависимость энергии частицы от времени. Вероятность захвата в резонанс мала:

$$P = Sv_{\phi}/(4\pi k v_x^2) \sim k^{-1/2}$$

Однако вероятность захватиться после $k^{1/2}$ прохождений через резонанс (за время, соответствующее $k^{1/2}$ лармо-ровским периодам), есть величина порядка 1.



Скачок адиабатического инварианта на резонансе.