

Лекция 9. Хаос в одномерных отображениях и диссипативных системах.

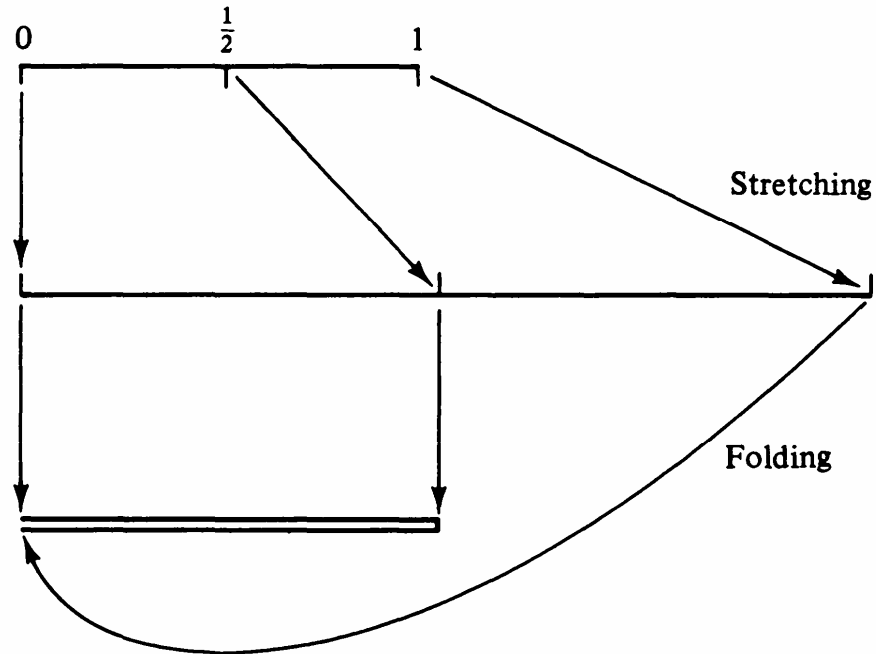
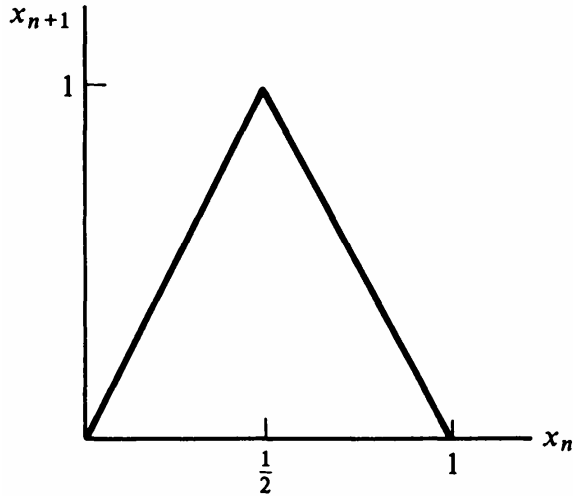
1. Одномерные отображения.
2. Универсальность Фейгенбаума.
3. Аттрактор Рёсслера.

1. Одномерные отображения.

1.1 Треугольное отображение (*tent map*)

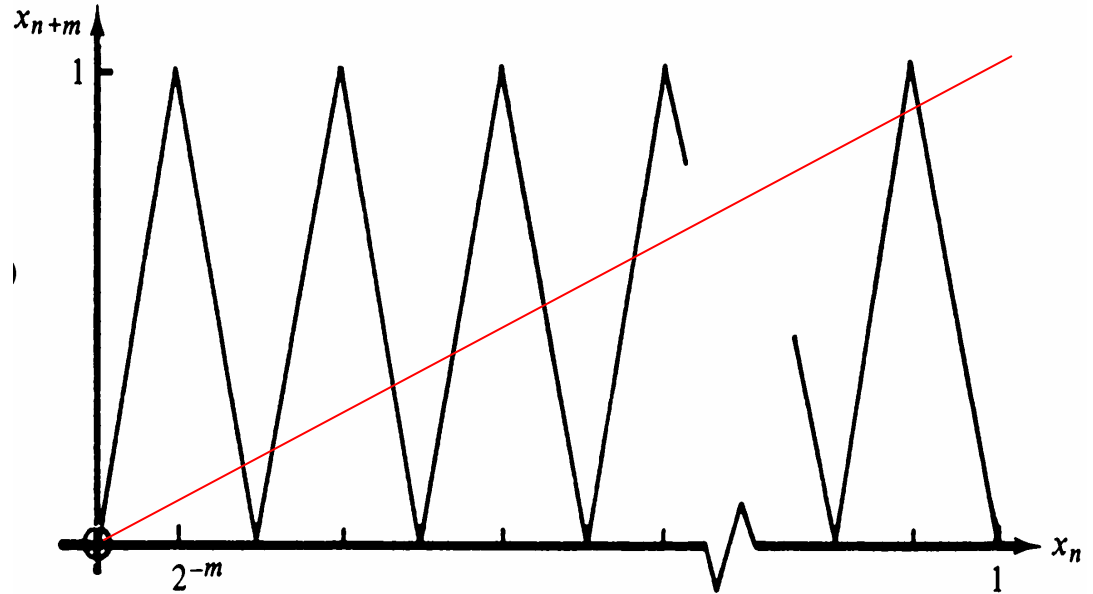
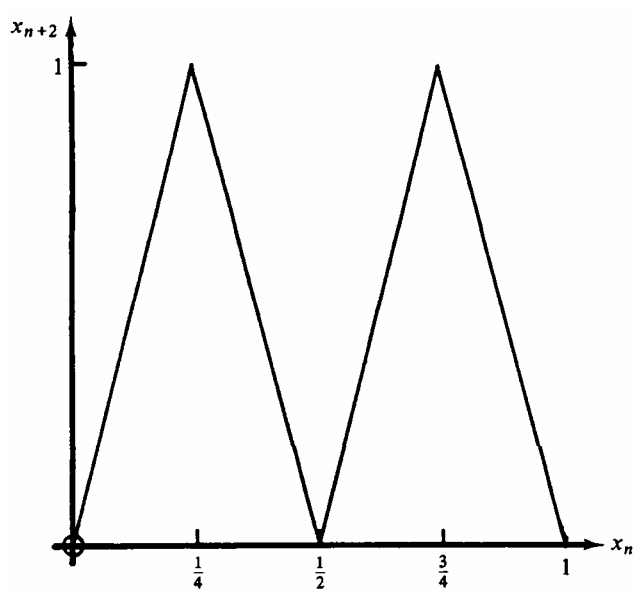
$$x_{n+1} = 1 - 2|x_n - \frac{1}{2}|$$

$$x_{n+1} = M(x_n)$$



Растяжение приводит к экспоненциальному разбеганию близких траекторий. Складывание возвращает образ в интервал $(0, 1)$ и вызывает необратимость отображения (образ имеет два прообраза).

$$x_{n+m} = M^m(x_n)$$



Из рисунка видно, что если начальная точка известна с точностью $\pm 2^{-m}$, то положение ее образа после m и более итераций отображения предсказать нельзя.

Точки пересечения графика с прямой $x_{n+m} = x_n$ задают 2^m неподвижных точек отображения M^m . Из них 2 – неподвижные точки отображения M . Остальным соответствуют периодические орбиты M .

Если $m = p$, где p – простое число, то число периодических орбит периода p : $N_p = (2^p - 2)/p$.

Пусть $\bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{p-1}, \bar{x}_p, \dots$, где $\bar{x}_p = \bar{x}_0$, -- p -периодическая орбита. Возьмем в качестве начального условия точку $\bar{x}_j + \delta_0$, близкую к точке периодической орбиты.

После p итераций получим

$$\bar{x}_j + \delta_p = M^p(\bar{x}_j + \delta_0)$$

Откуда $\delta_p = \lambda_p \delta_0$, где

$$\lambda_p = \left. \frac{dM^p(x)}{dx} \right|_{x=\bar{x}_j} = \left. \frac{dx_{n+p}}{dx_n} \right|_{x_n=\bar{x}_j}.$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \frac{dx_{n+p}}{dx_n} &= \frac{dx_{n+1}}{dx_n} \frac{dx_{n+2}}{dx_{n+1}} \dots \frac{dx_{n+p}}{dx_{n+p-1}} \\ &= M'(x_n)M'(x_{n+1}) \dots M'(x_{n+p-1}), \end{aligned}$$

$\lambda_p = M'(\bar{x}_0)M'(\bar{x}_1) \dots M'(\bar{x}_{p-1})$ для всех точек орбиты.

Поскольку для треугольного отображения $|M'(x)| = 2$, $|\lambda_p| = 2^p > 1$, и все периодические орбиты неустойчивы.

Треугольное отображение – хаотическая система.

Разбегание траекторий характеризуется *показателем*

Ляпунова: для отображения $x_{n+1} = f(x_n)$

$$\lambda \approx \frac{1}{n} \ln \left| \frac{\delta_n}{\delta_0} \right|$$

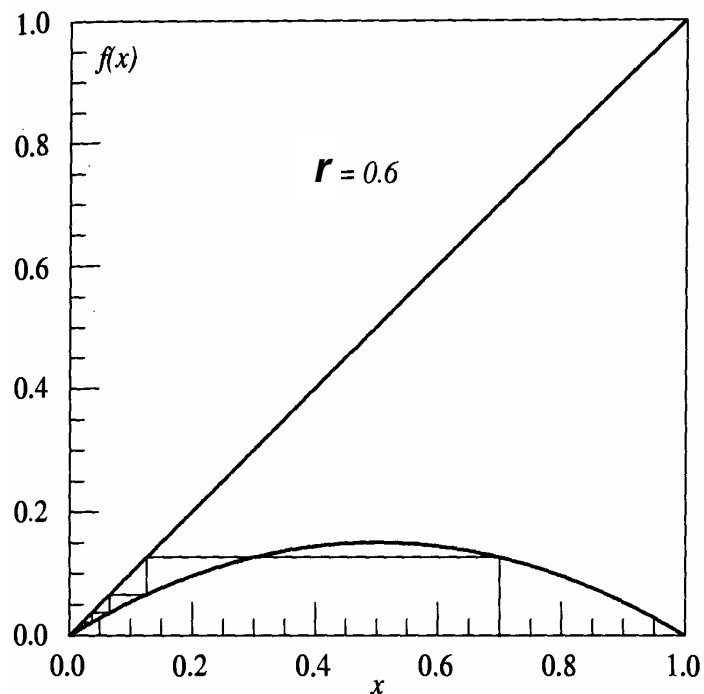
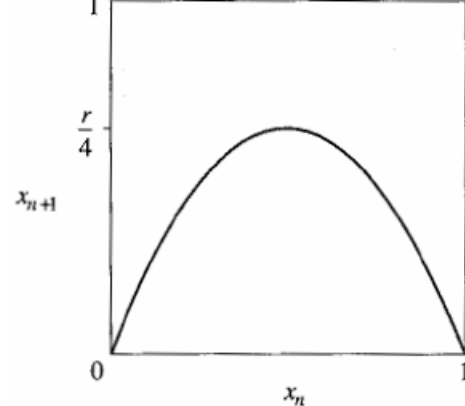
$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)| \right\}$$

Показатель Ляпунова для треугольного отображения вдоль типичной траектории равен $\lambda = \ln 2 > 0$.

Типичная траектория треугольного отображения покрывает интервал $(0, 1)$ равномерно.

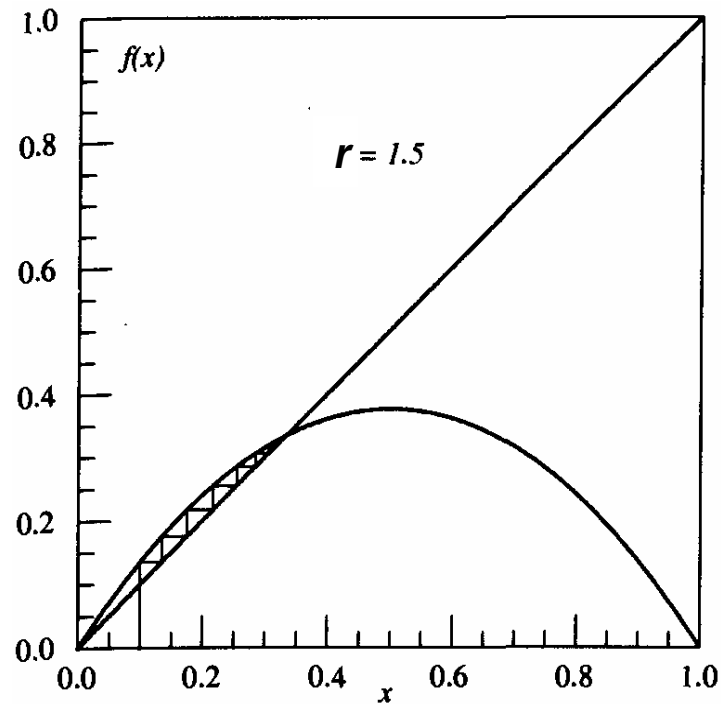
1.2 Логистическое отображение

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n), \quad 0 \leq x_n \leq 1, \quad 0 \leq r \leq 4$$



Притягивающая неподвижная точка:

$$x^* = 0$$



Притягивающая неподвижная точка:

$$x^* = 1 - \frac{1}{r}$$

Рассмотрим случай $r = 4$: $x_{n+1} = 4x_n(1 - x_n)$.

Выполним замену $x \rightarrow y$: $x = \sin^2\left(\frac{\pi y}{2}\right) = \frac{1}{2}[1 - \cos(\pi y)]$.

Подставляя, получим: $\sin^2(\pi y_{n+1}/2) = \sin^2(\pi y_n)$.

$$(\pi y_{n+1}/2) = \pm(\pi y_n) + s\pi, \quad s - \text{целое}$$

Знак и величина s выбираются из условия $y \in (0,1)$.

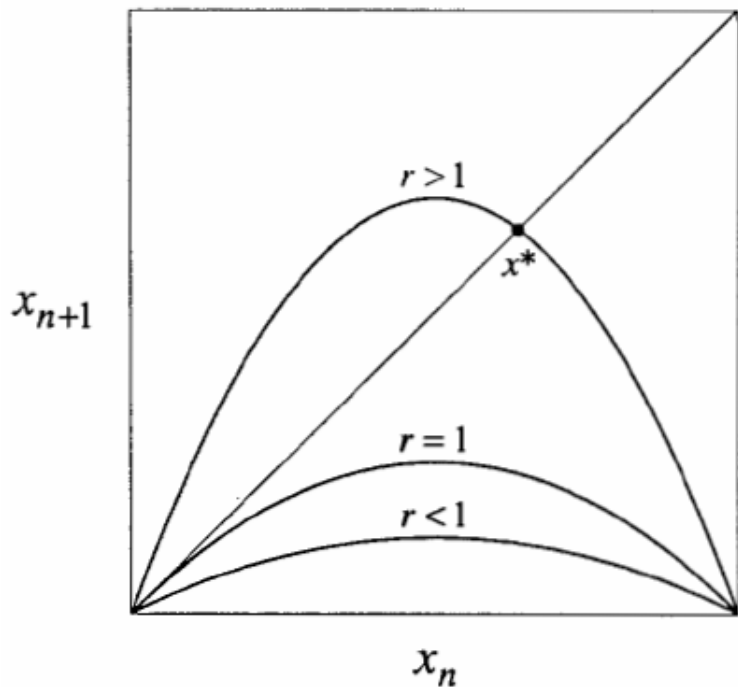
Получаем в точности треугольное отображение для y :

$$y_{n+1} = 2y_n, \quad \text{если} \quad 0 \leq y_n \leq \frac{1}{2},$$

$$y_{n+1} = 2 - 2y_n, \quad \text{если} \quad \frac{1}{2} \leq y_n \leq 1$$

Следовательно, при $r = 4$ динамика логистического отображения является хаотической.

Что происходит при $1 < r < 4$?



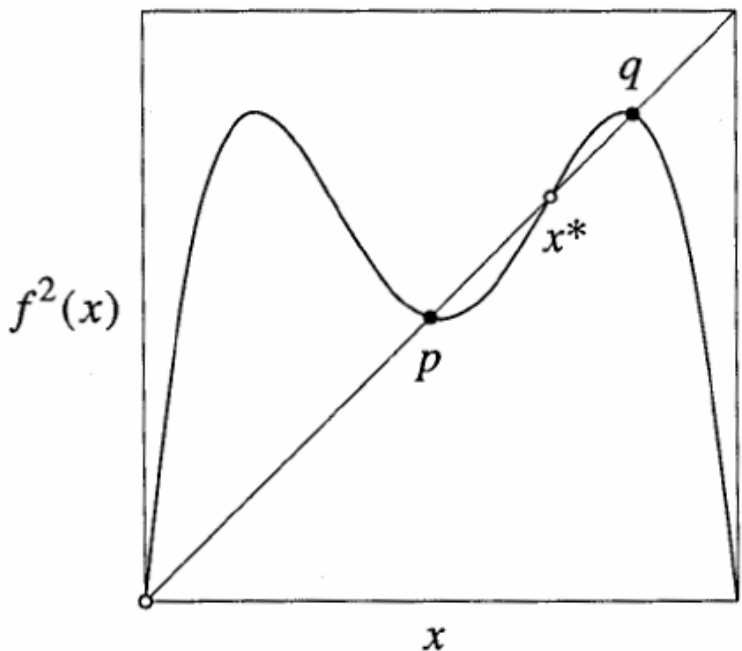
При $r = 1$ происходит транскритическая бифуркация: точка $x = 0$ теряет устойчивость и рождается устойчивая неподвижная точка $x^* = 1 - \frac{1}{r}$

При дальнейшем росте r растет наклон графика в точке x^* . При $r = 3$ имеем $f'(x^*) = -1$, и происходит следующая бифуркация: рождение цикла периода 2.

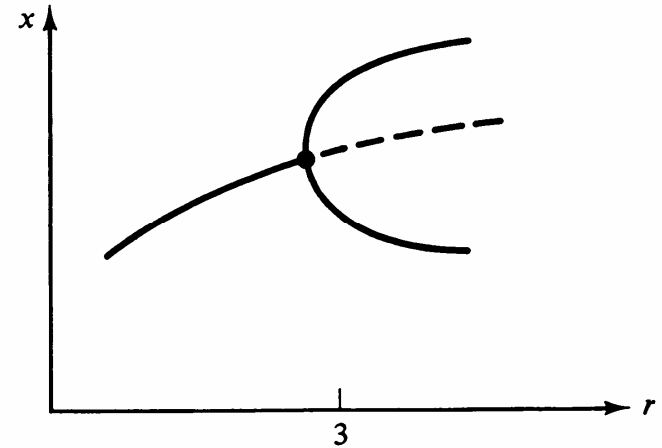
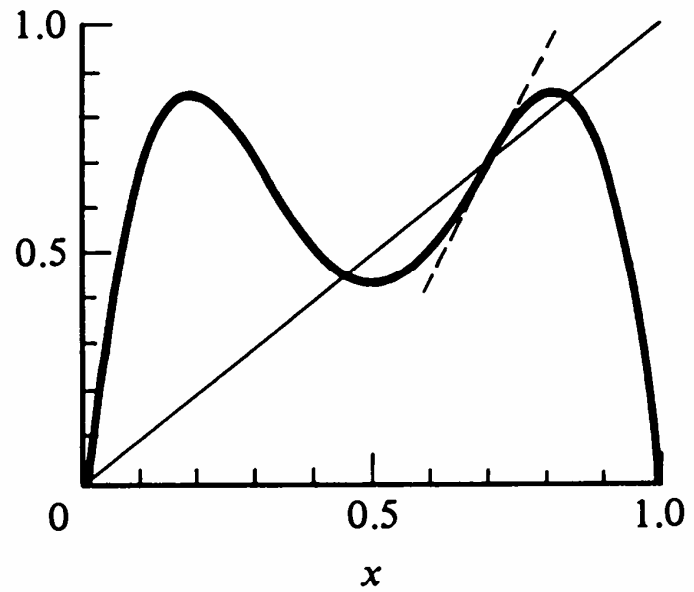
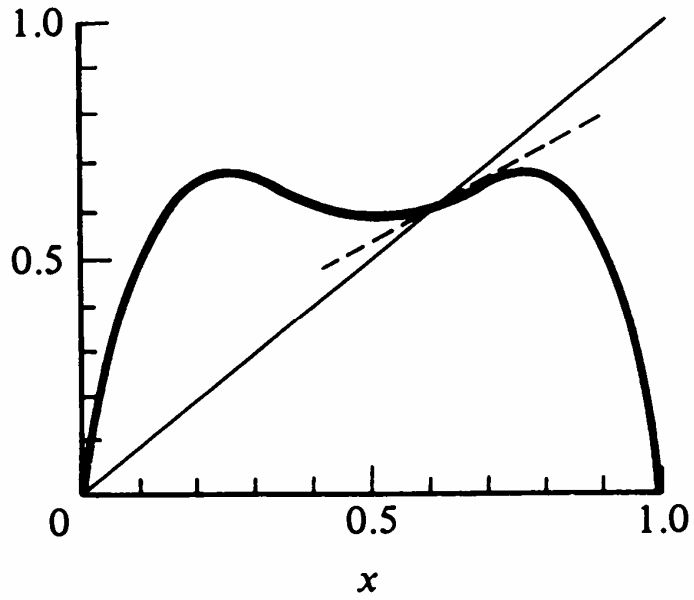
$f(p) = q$, $f(q) = p$. То есть, точки p и q – неподвижные точки отображения $f^2(x) \equiv f(f(x))$:

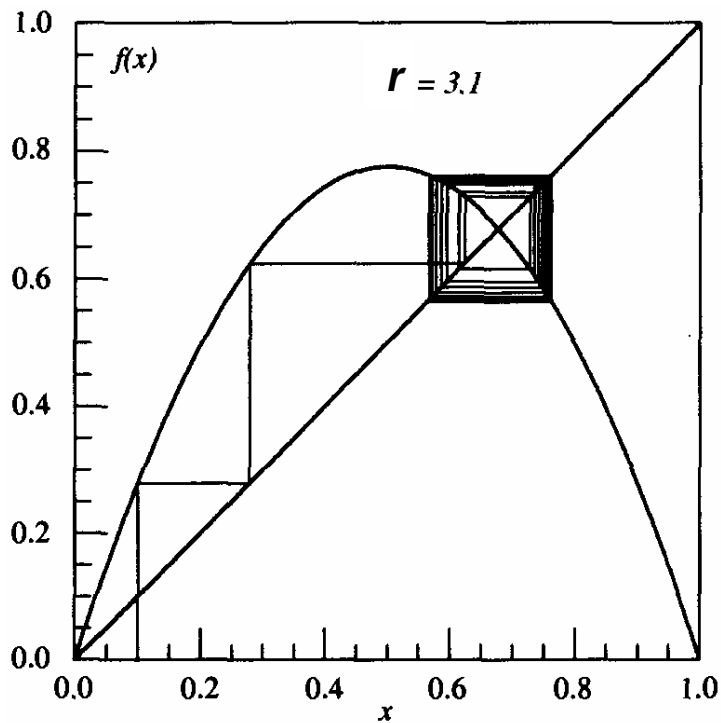
$$p, q = \frac{r+1 \pm \sqrt{(r-3)(r+1)}}{2r}$$

Этот цикл существует при всех $r > 3$.



Бифуркация рождения цикла периода 2.



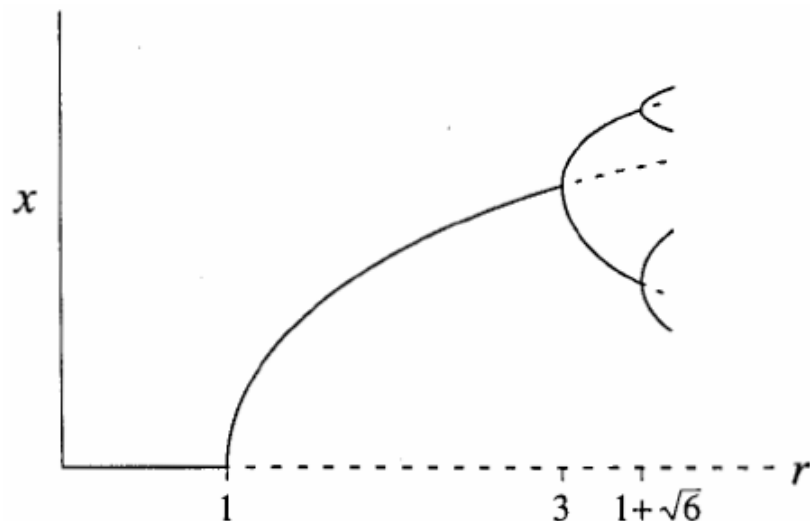


Вопрос об устойчивости этого цикла сводится к вопросу об устойчивости неподвижной точки $f^2(x) = x$.

$$\lambda = \frac{d}{dx}(f(f(x)))_{x=p} = f'(f(p))f'(p) = f'(q)f'(p).$$

Вычисляя, получим: $\lambda = 4 + 2r - r^2$.

Цикл устойчив при $|4 + 2r - r^2| < 1$,
т.е. при $3 < r < 1 + \sqrt{6}$.



Бифуркационная диаграмма.

Каскад бифуркаций удвоения периода предельных циклов:

$r_1 = 3$
 $r_2 = 3.449\dots$
 $r_3 = 3.54409\dots$
 $r_4 = 3.5644\dots$
 $r_5 = 3.568759\dots$
 \vdots
 $r_\infty = 3.569946\dots$

(period 2 is born)

4

8

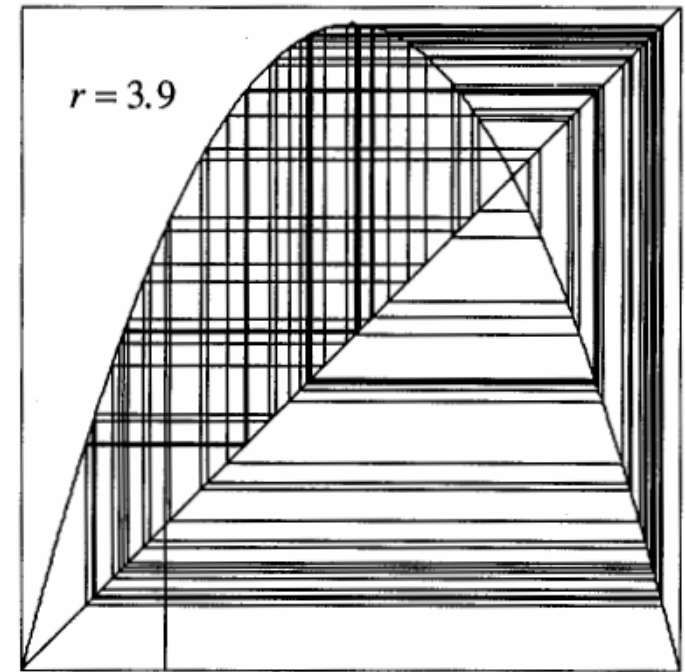
16

32

\vdots

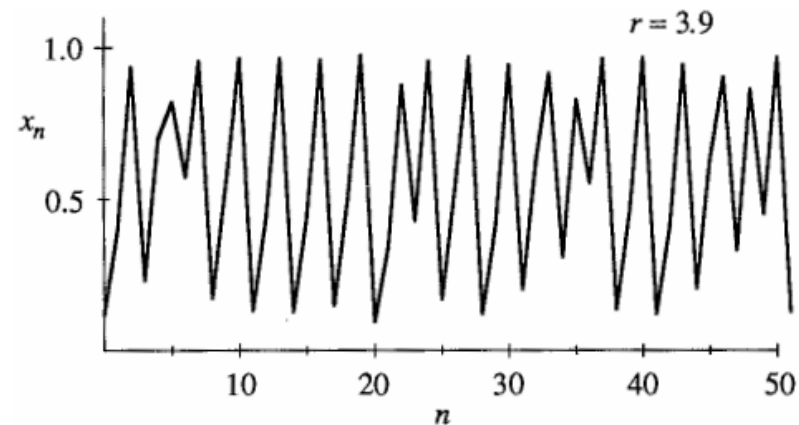
∞

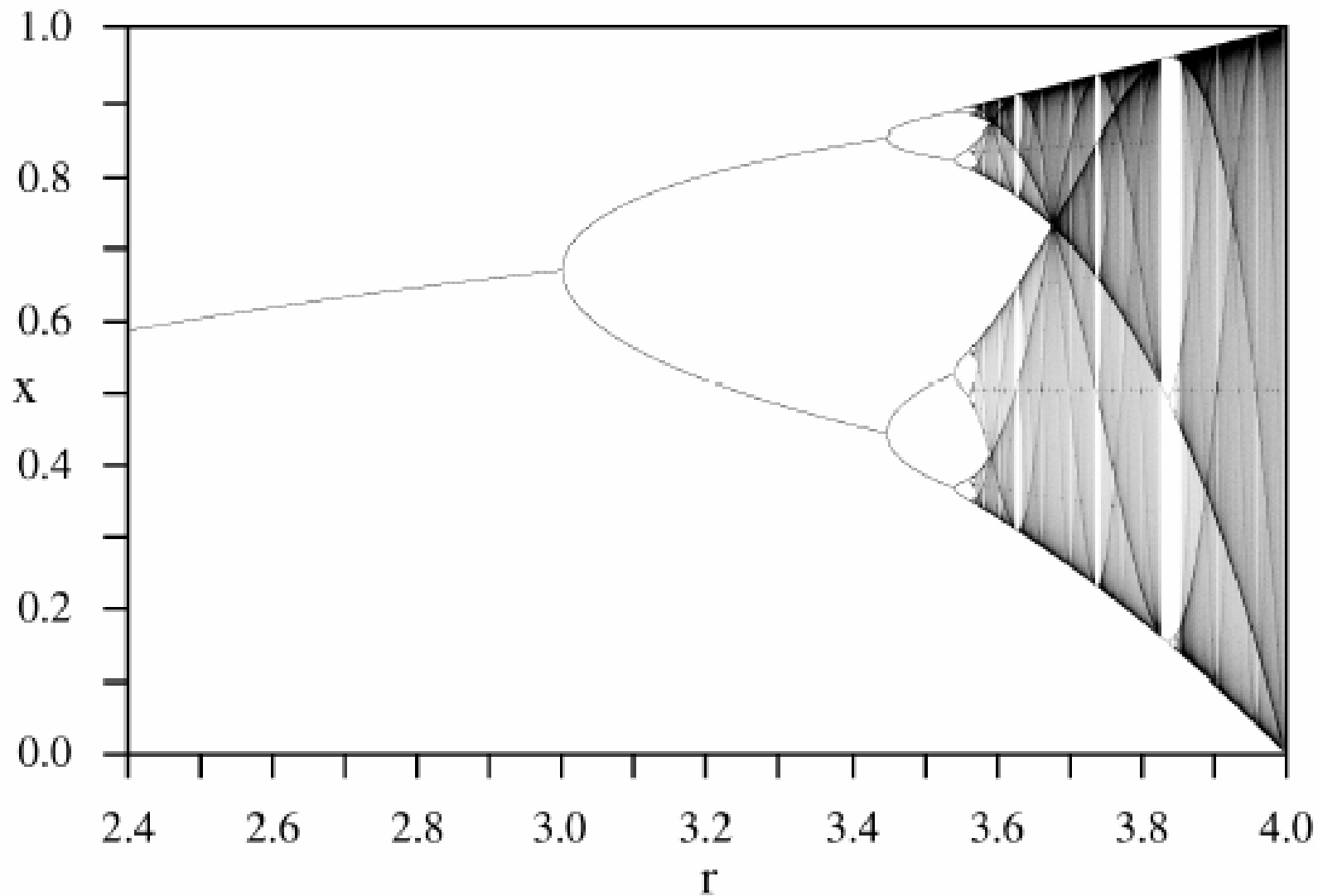
x_{n+1}



x_n

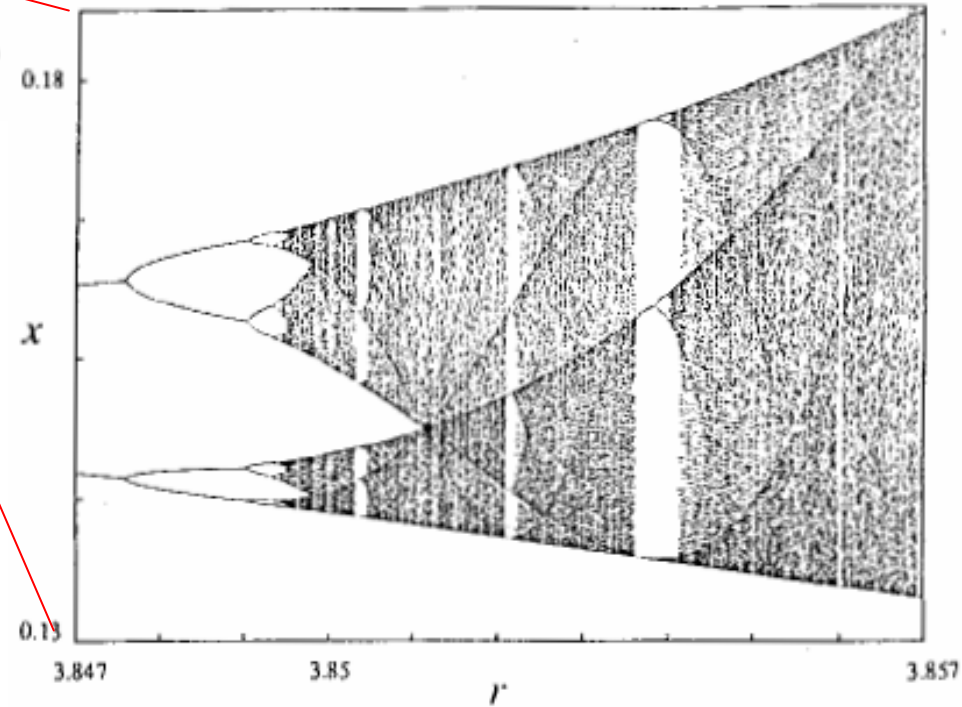
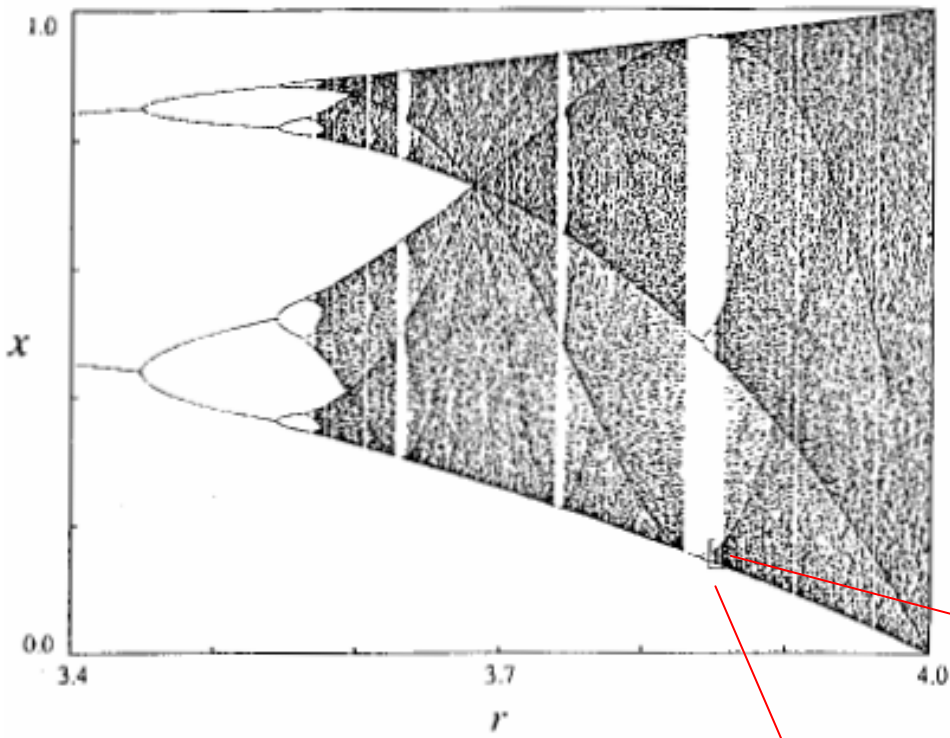
Что происходит при $r > r_\infty$?



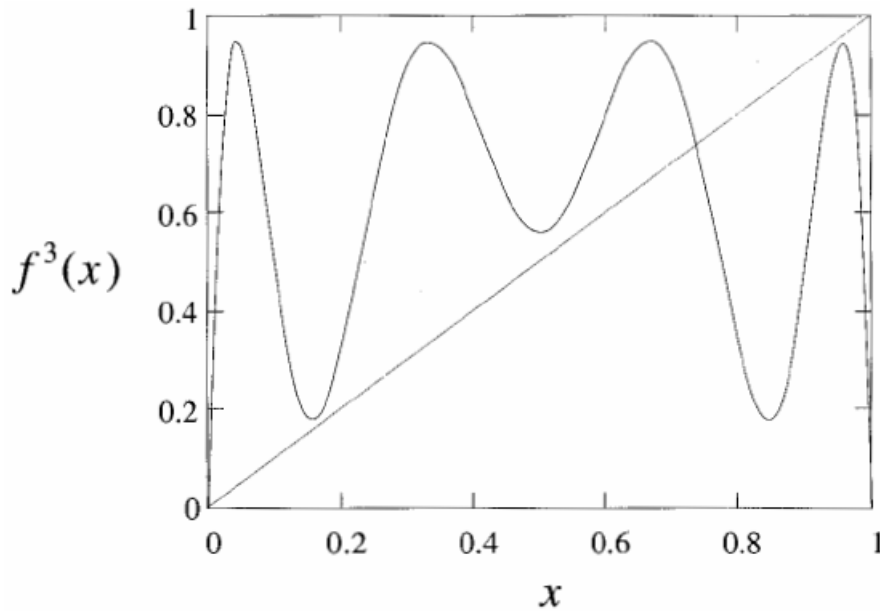


Структура притягивающих множеств логистического отображения в зависимости от r .

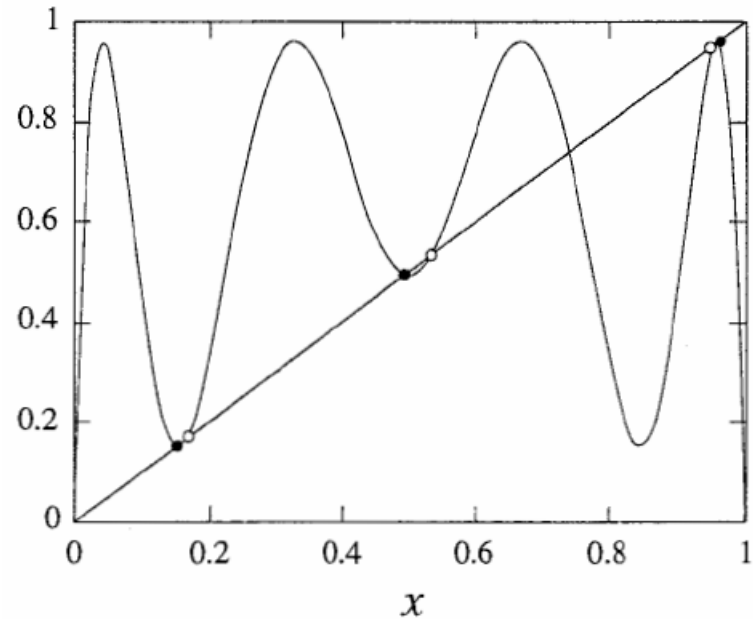
«Самоподобие» картинки.



«Окно» периода 3.

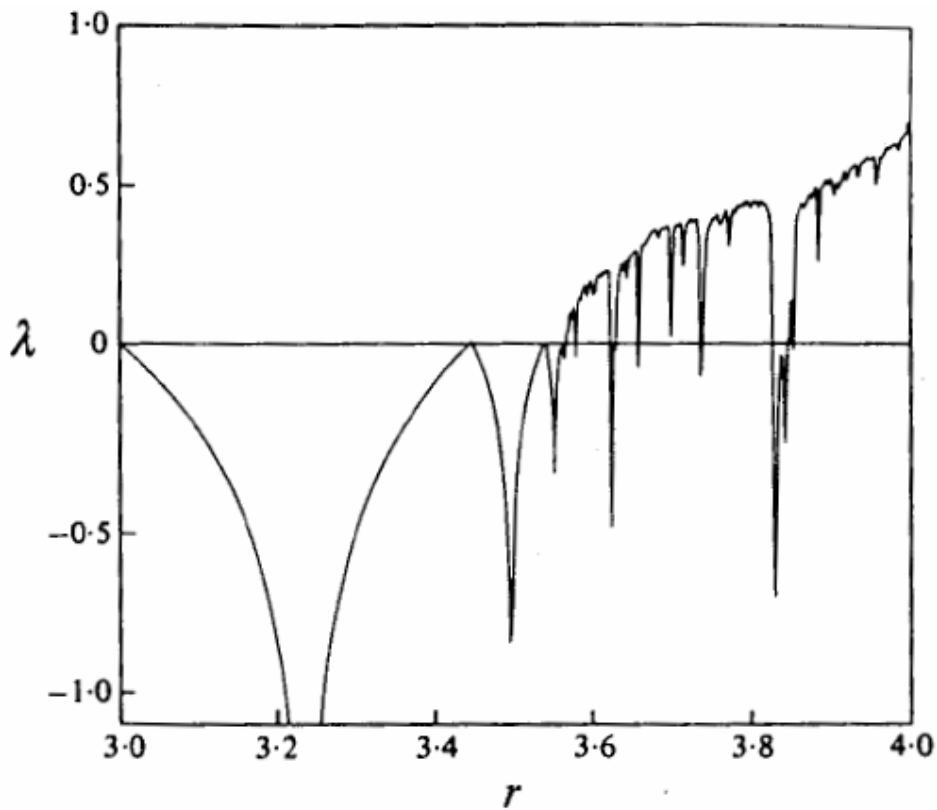


$$r < r^*$$



$$r > r^*$$

При $r = r^* = 1 + \sqrt{8} = 3.8284\dots$ происходит *тангенциальная бифуркация* (похожая на «седло-узел»). При этом рождаются устойчивые неподвижные точки отображения f^3 , соответствующие циклу периода 3.

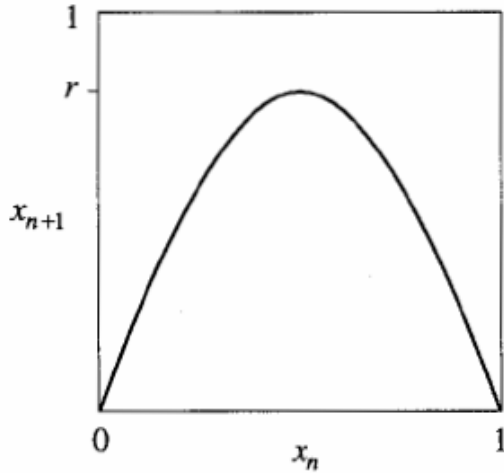


Зависимость показателя Ляпунова для логистического отображения.

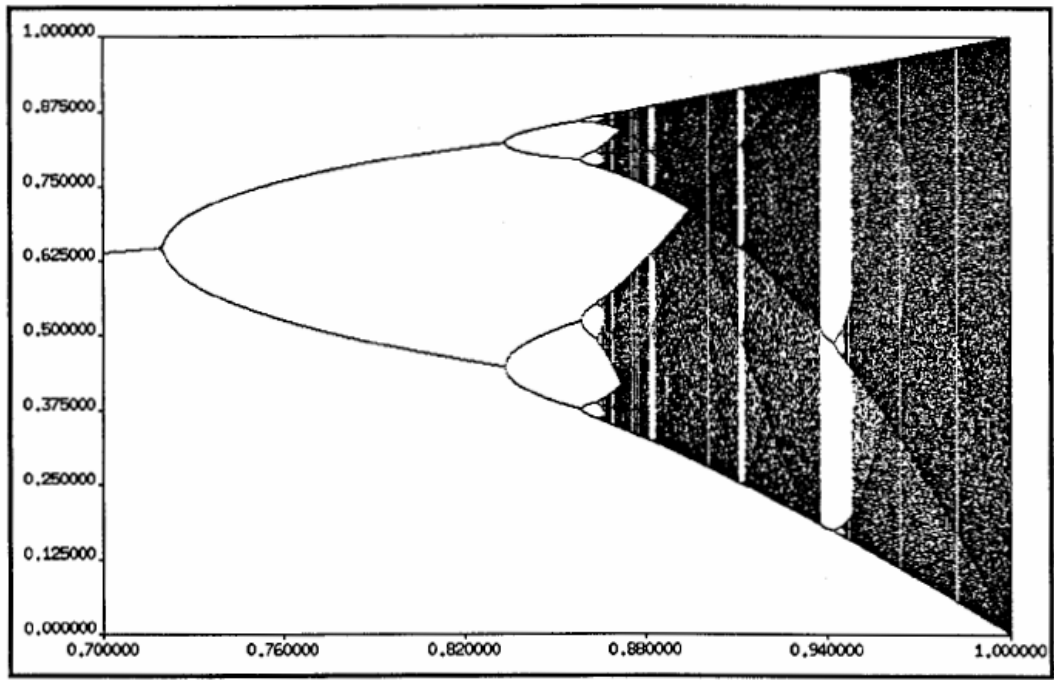
$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)| \right\} \quad \text{от } r$$

2. Универсальность Фейгенбаума.

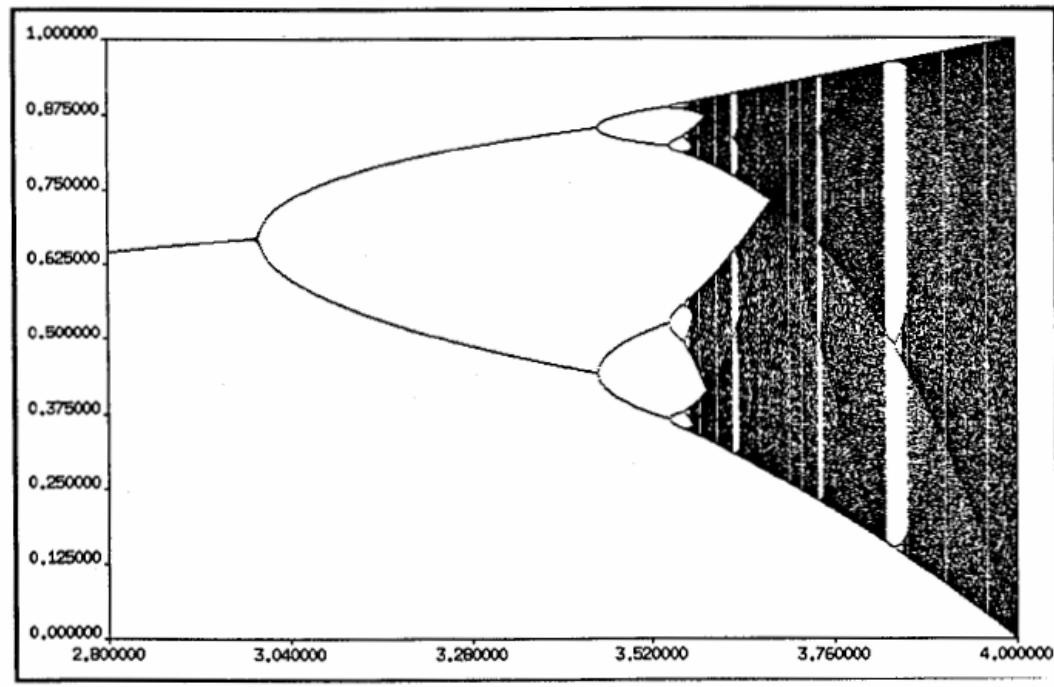
Рассмотрим отображение $x_{n+1} = r \sin \pi x_n$, $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq x \leq 1$.



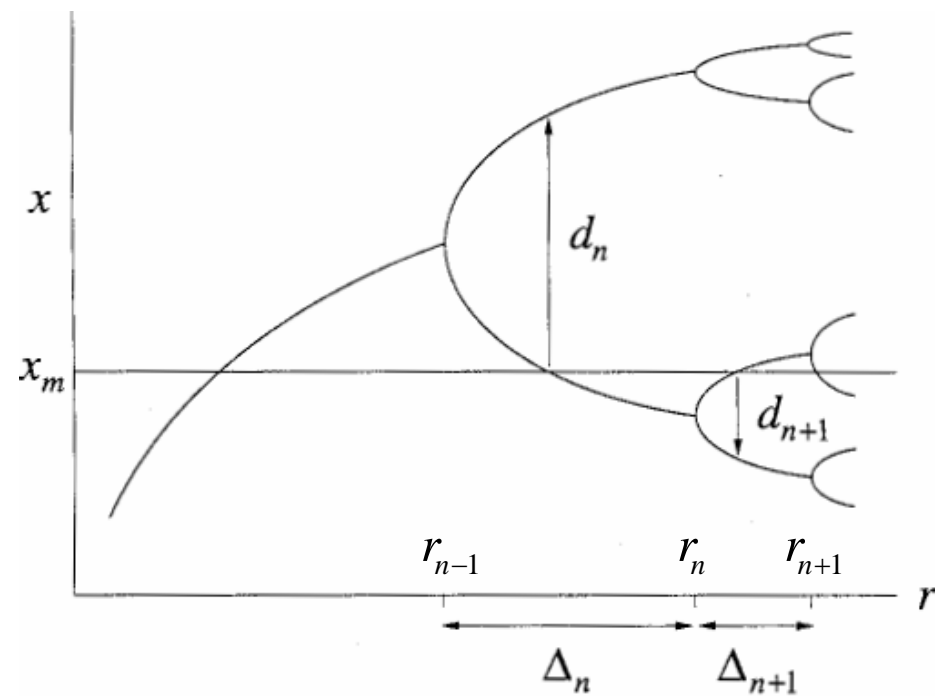
Сравним структуру притягивающих множеств в зависимости от r для этого отображения и для логистического.



$$x_{n+1} = r \sin \pi x_n$$



$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$$



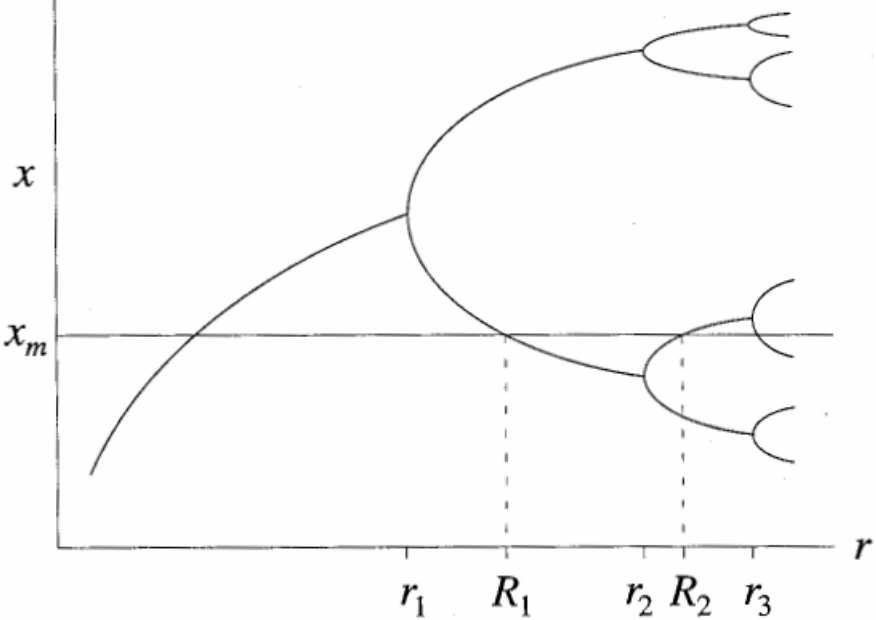
Пусть функция $f(x)$, задающая отображение, имеет единственный максимум при $x = x_m$ (такие отображения называют унимодальными).

М.Фейгенбаум (1978, 1979) заметил и доказал, что для унимодальных отображений

с квадратичным максимумом последовательность бифуркаций удвоения обладает *универсальными* свойствами:

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n - r_{n-1}}{r_{n+1} - r_n} = 4.669 \dots, \text{ т.е. } \Delta_n / \Delta_{n+1} \rightarrow \delta \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

$$\frac{d_n}{d_{n+1}} \rightarrow \alpha = -2.5029 \dots, \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

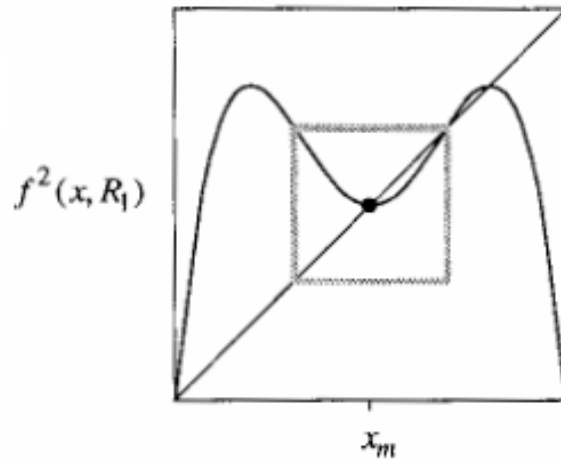
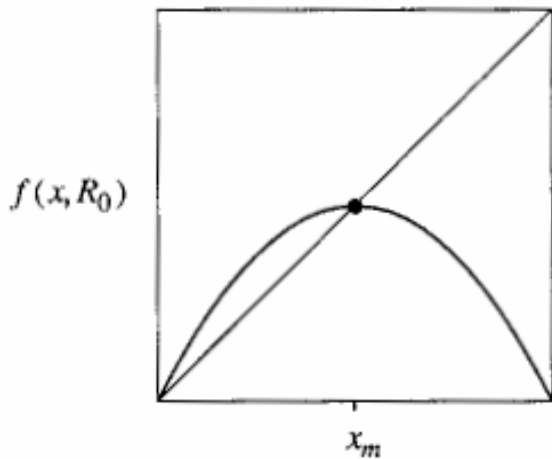


Назовем периодическую траекторию $\{x_1, \dots, x_{2^n}\}$ *суперустойчивой*, если

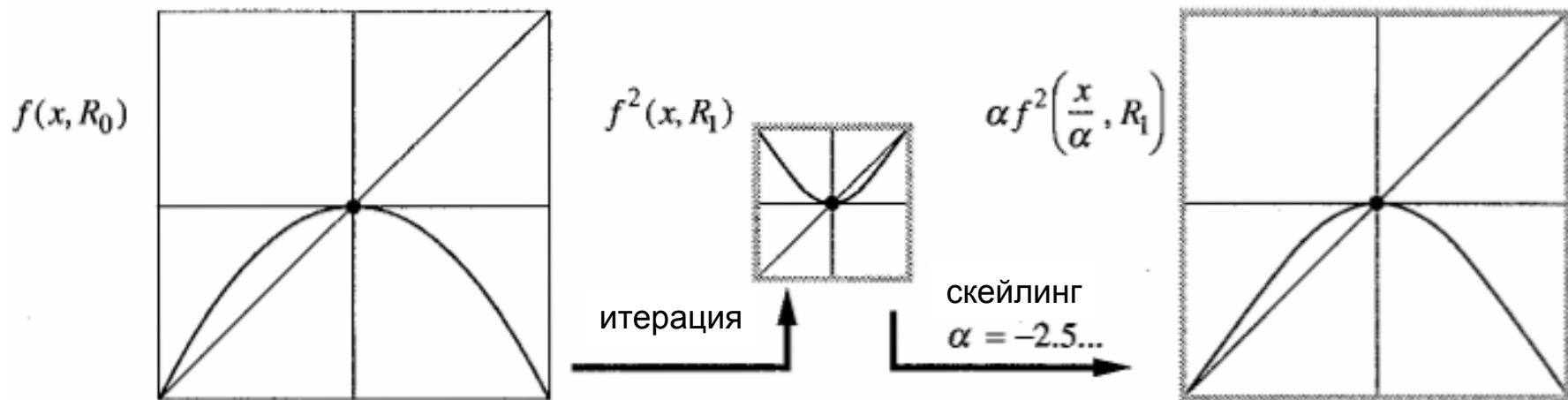
$$\lambda = \prod_{j=1}^{2^n} f'(x_j) = 0$$

(Следовательно, суперустойчивая траектория содержит точку $x = x_m$).

Сравним графики функций $f(x, R_0)$ и $f^2(x, R_1)$:



Замена: $x \rightarrow x - x_m$



Видно, что $f(x, R_0) \approx \alpha f^2\left(\frac{x}{\alpha}, R_1\right)$. После n перенормировок получим

$$f(x, R_0) \approx \alpha^n f^{(2^n)}\left(\frac{x}{\alpha^n}, R_n\right).$$

Численный анализ подсказывает, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^n f^{(2^n)}\left(\frac{x}{\alpha^n}, R_n\right) = g_0(x),$$

где $g_0(x)$ – универсальная (независящая от f) функция с суперустойчивой неподвижной точкой.

Если начать не с $f(x, R_0)$, а с $f(x, R_i)$, приходим к

$$g_i(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^n f^{(2^n)}\left(\frac{x}{\alpha^n}, R_{n+i}\right).$$

$g_i(x)$ – универсальная функция с суперустойчивой периодической траекторией периода 2^i

При $R_i = R_\infty$ получаем

$$f(x, R_\infty) \approx \alpha f^2\left(\frac{x}{\alpha}, R_\infty\right).$$

Соответствующая предельная функция $g(x)$ удовлетворяет уравнению

$$g(x) = \alpha g^2\left(\frac{x}{\alpha}\right).$$

Надо задать граничные условия. Поскольку $f(x)$ имеет максимум в нуле, полагаем $g'(0) = 0$. Кроме того, можно положить $g(0) = 1$ (это определяет масштаб x). Теперь надо искать $g(x)$ и α .

$$g(x) = \alpha g^2\left(\frac{x}{\alpha}\right).$$

При $x = 0$ имеем: $g(0) = \alpha g(g(0))$. Поскольку $g(0) = 1$,

$$\alpha = 1/g(1)$$

Ищем $g(x)$ в виде ряда: $g(x) = 1 + c_2 x^2 + c_4 x^4 + \dots$ (здесь предполагается, что максимум квадратичный). Этот ряд надо подставить в уравнение и приравнять коэффициенты при одинаковых степенях x . Фейгенбаум получил $c_2 \approx -1.5276$, $c_4 \approx 0.1048$, откуда $\alpha \approx -2.5029$, что согласуется с численными результатами. Можно найти и значение δ (см. более строгое и подробное изложение, например, в Г.Шустер, «Детерминированный хаос. Введение», Москва Мир, 1988).

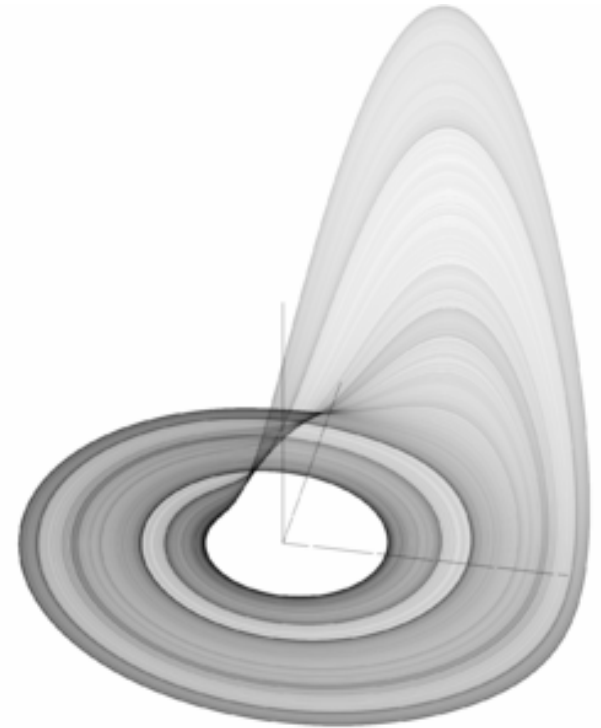
3. Аттрактор Рёсслера

Рассмотрим систему

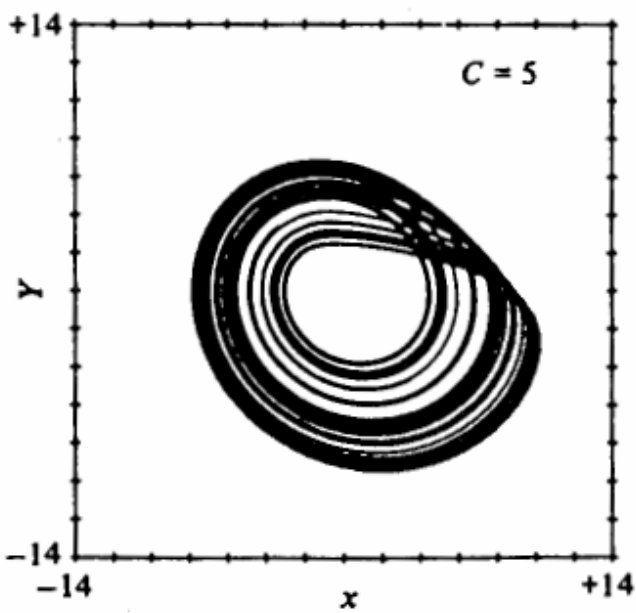
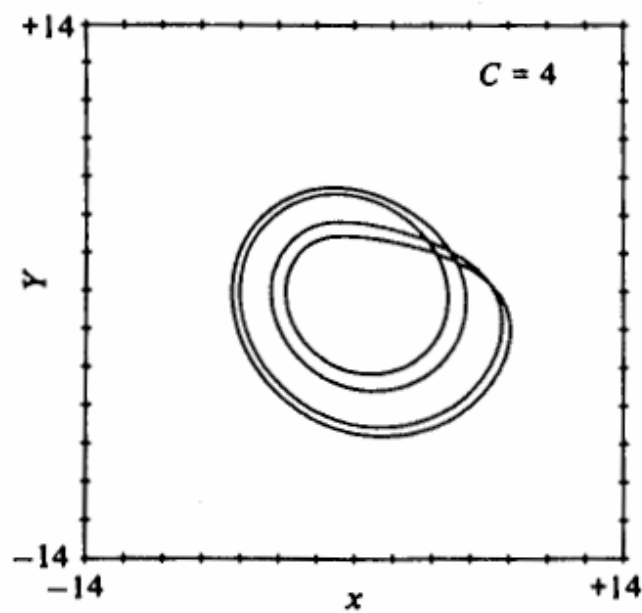
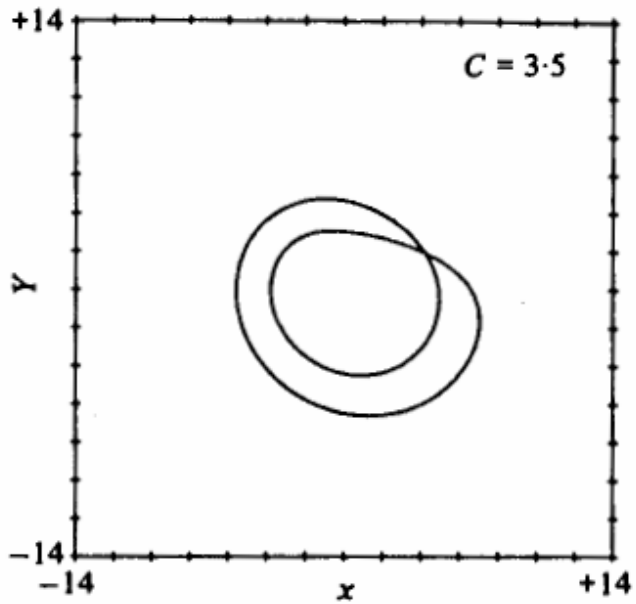
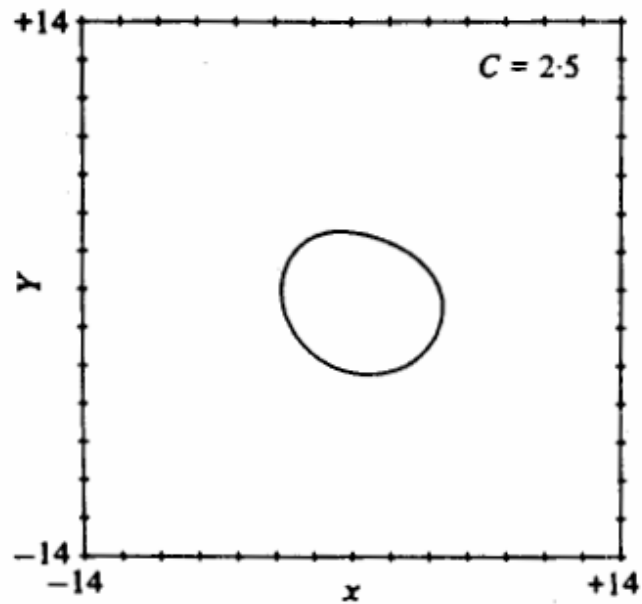
$$\dot{x} = -y - z$$

$$\dot{y} = x + ay$$

$$\dot{z} = b + z(x - c)$$

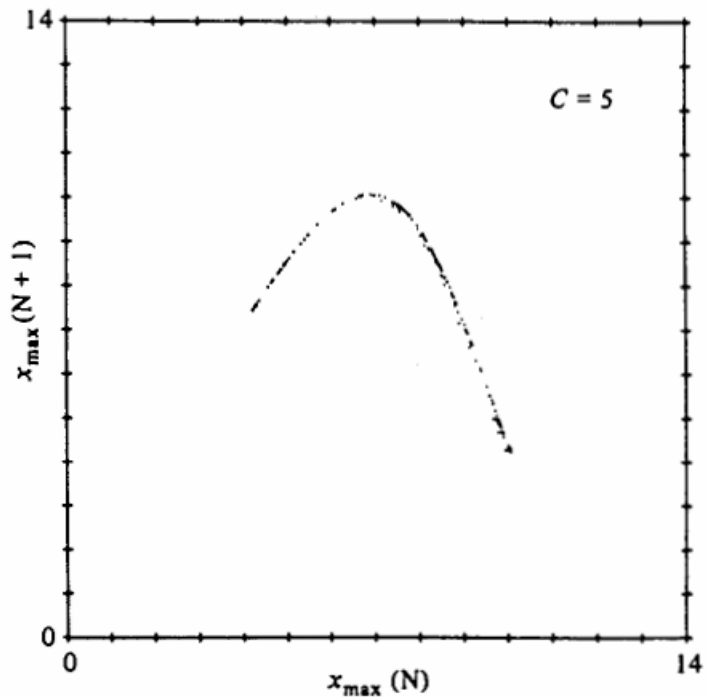


Зафиксируем $a = b = 0.2$, и будем менять параметр c . При каждом значении c будем строить притягивающее множество.



Переход к хаосу осуществляется через каскад бифуркаций удвоения периода цикла. Последовательность бифуркационных значений параметра дает значение δ , близкое к универсальной константе Фейгенбаума.

Рассмотрим график x_{n+1} от x_n , где x_i – максимальное значение x на i -ом витке при движении по странному аттрактору Ресслера. Видно, что динамика с высокой точ-



ностью описывается унимодальным отображением.

Для системы Ресслера можно также построить картинку, показывающую структуру притягивающих множеств от параметра. Видно, что она похожа на универсальную.

