

На правах рукописи

**ЧЕРНЫШОВ Александр Александрович**

**ИССЛЕДОВАНИЕ СЖИМАЕМОЙ  
МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ  
В КОСМИЧЕСКОЙ ПЛАЗМЕ  
МЕТОДОМ КРУПНЫХ ВИХРЕЙ**

**01.04.02 – теоретическая физика**

**Автореферат  
диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук**



**Москва 2008**

Работа выполнена в Институте космических исследований Российской академии наук (ИКИ РАН).

**Научный руководитель:**

к.ф.-м.н. Петросян Аракел Саркисович (ИКИ РАН – Институт космических исследований Российской академии наук).

**Официальные оппоненты:**

д.ф.-м.н, профессор, Соколов Дмитрий Дмитриевич (МГУ - Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова).

д.ф.-м.н. профессор, Петров Олег Федорович (ИТЭС ОИВТ РАН - Институт теплофизики экстремальных состояний Объединенный институт высоких температур Российской академии наук).

**Ведущая организация:**

ИПМ РАН - Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша Российской академии наук

Защита состоится 29 апреля 2008 г. в 13 ч. 30 мин. на заседании Диссертационного Совета Д 002.113.03 ИКИ РАН по адресу: Москва, ул. Профсоюзная 84/32, 2-й подъезд, конференц-зал.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИКИ РАН.  
Автореферат разослан 20 марта 2008 г.

Ученый секретарь  
Диссертационного совета,  
к.ф.-м.н. Буринская Т. М.



# Общая характеристика работы

## Актуальность темы

Сжимаемая магнитогидродинамическая (МГД) турбулентность является широко распространенным состоянием космической плазмы во многих астрофизических, гелиофизических, геофизических процессах. Например, в аккреционных дисках МГД-турбулентность вызвана магноторотационной неустойчивостью. Формирование звездных облаков вследствие эффектов магнитного поля и гравитации происходит в турбулентных условиях. Динамика межзвездной и межпланетной среды также имеет турбулентный характер. Большинство турбулентных явлений в физике Солнца описываются в рамках МГД: солнечный ветер, расширение солнечной короны, конвективная зона, фотосфера, солнечный тахоклин. Явления турбулентности наблюдаются в околоземном пространстве, как в солнечном ветре, так и в различных областях магнитосферы Земли, в частности, в дальней области геомагнитного хвоста, наблюдаемые спутниками свойства космической плазмы адекватно можно объяснить только в рамках теории и моделей турбулентности. Магнитогидродинамическая турбулентность является важным процессом при возникновении динамо-процессов и генерации магнитного поля в космических условиях. Турбулентные течения в магнитном поле также широко распространены и в прикладных областях. Среди инженерных применений можно указать возможность управления пограничным слоем и снижение сопротивления потоку, магнитогидродинамические течения в каналах, в процессах отливки стали и в трубах для охлаждения термоядерных реакторов.

Возникновение турбулентности связано с неустойчивостью исходного состояния космической плазмы. Вследствие неустойчивости амплитуда колебаний в электропроводящей жидкости нарастает до нелинейного уровня, при котором становятся существенными сложные процессы взаимодействия и взаимной трансформации колебаний. Как известно, при больших скоростях потока, то есть при больших числах Рейнольдса, течение становится неустойчивым и разбивается на крупномасштабные вихри. Нелинейное взаимодействие между вихрями приводит к непрерывному дроблению их масштабов, происходящему вплоть до малых масштабов, для которых существенно затухание, обусловленное молекулярной вязкостью. Дробление масштабов вихрей соответствует перекачке энергии турбулентных движений из длинноволновой в коротковолновую область спектра. В результате в потоке появляются беспорядочные вихри разных размеров, и скорость потока в каждой точке меняется случайным образом. Кроме того, важнейшей особенностью турбулентности в космических условиях является наличие в ней случайных магнитных полей наряду со

случайными значениями скорости. Для таких течений существенную роль играют эффекты нелинейности, вязкости, диффузии, сжимаемости, трехмерности, поэтому численное моделирование сжимаемой МГД является важным инструментом для исследования заряженной жидкости в таких МГД-течениях. К тому же, плазма в космических условиях, как правило, не доступна для непосредственного экспериментального изучения.

Наиболее подробную информацию о турбулентном течении жидкости можно получить с помощью прямого численного моделирования - DNS (Direct numerical simulation), которое заключается в численном решении полной нестационарной системы магнитогидродинамических уравнений. При таком подходе разрешаются все масштабы движения заряженной жидкости. Метод DNS не требует специальных замыканий для уравнений магнитной гидродинамики. Прямой численный расчет МГД-турбулентности сталкивается с принципиальными трудностями, связанными с большими гидродинамическими и магнитными числами Рейнольдса, которые характерны для исследуемых процессов, так как в этом случае число степеней свободы турбулентного движения велико и минимальное количество узлов на численной сетке должно быть столь большим, что ограничивает применение прямого численного моделирования для изучения турбулентных течений с реальными характерными числами Рейнольдса.

Осборн Рейнольдс предложил статистический подход для исследования турбулентных течений, который заключается в осреднении уравнений движения - RANS (Reynolds averaged Navier-Stokes). В методе RANS все параметры движения разлагаются на среднюю и турбулентную составляющие. В уравнении Навье-Стокса появляются рейнольдсовские напряжения, которые необходимо замкнуть. Следовательно, вся турбулентность моделируется (например,  $k - \varepsilon$  модель), а не высчитывается, как в методе DNS. Метод RANS обычно используется для теоретических исследований средних течений. Этот подход не содержит информации о динамике турбулентности.

Метод крупных вихрей LES (Large eddy simulation) - это метод, который описывает приближенную динамику турбулентности, где крупномасштабная часть турбулентного потока высчитывается непосредственно, а мелкомасштабная - моделируется, то есть LES является промежуточным подходом к изучению турбулентности между DNS и RANS.

В методе LES используется операция фильтрации для разложения характеристик турбулентного движения на крупномасштабную и мелкомасштабную части, что связано с изотропностью, однородностью и универсальностью мелких масштабов турбулентного движения. Мелкомасштабное движение исключается из исходной системы

уравнений движения с применением процедуры фильтрации и дальше их влияние на движение моделируется с использованием подсеточных моделей SGS (subgrid scale) (или, другое название, SFS (subfilter scale)), выраженных через отфильтрованные параметры турбулентных течений. Крупномасштабное движение рассчитывается из решения отфильтрованных нестационарных уравнений магнитной гидродинамики. LES является методом для моделирования течений с большими числами Рейнольдса, так как в методе крупных вихрей предполагается, что энергия переносится от больших масштабов к малым только внутри инерционного интервала, поэтому число степеней свободы будет меньше, чем в методе DNS, следовательно, LES требует значительно меньших вычислительных затрат по сравнению с DNS.

Изначально метод крупных вихрей развивался для моделирования гидродинамической турбулентности нейтральной жидкости для изучения задач метеорологии и океанологии. Большая часть работ была выполнена для несжимаемых течений. Использование LES к сжимаемым средам встречается значительно реже, вследствие увеличения сложности задачи из-за необходимости решения уравнения энергии. В отфильтрованном уравнении энергии появляются сразу несколько дополнительных подсеточных (SGS) слагаемых, которые необходимо параметризовать. Первые применения метода LES к сжимаемым течениям рассматривали транспортное уравнение для внутренней энергии на единицу массы, для давления или для удельной энтальпии. Метод LES к течениям электропроводящей жидкости применялся и исследовался крайне мало. Все предыдущие работы в этом направлении ограничивались только рассмотрением несжимаемой жидкости для решения промышленных задач. Тем не менее, многие течения электропроводящей жидкости не могут быть описаны в рамках несжимаемой среды, а необходимо рассматривать сжимаемые уравнения в приближении политропного соотношения между плотностью и давлением или теплопроводящую жидкость с использованием уравнения энергии. Применение LES для сжимаемой теплопроводящей МГД-жидкости значительно усложняется из-за того, что нужно решать уравнение энергии, в котором появляются дополнительные слагаемые из-за наличия магнитного поля. К тому же, после фильтрации появляются добавочные подсеточные члены, требующие разработки теории для их параметризации.

Исследование сжимаемой турбулентности, как в гидродинамике нейтральной жидкости, так и в магнитогидродинамике является трудной задачей, поскольку не существует аналитической или приближенной теории таких явлений. Однако, несмотря на существенную роль сжимаемости в космической плазме, целый ряд наблюдений показывает воспроизведение колмогоровского спектра флуктуаций плотности. Для интерпретации таких наблюдений была использована асимптотическая

теория "почти несжимаемой" (nearly incompressible) среды, которая описывает флуктуации плотности в гидродинамике нейтрального и магнитного газа в режиме переноса пассивного скаляра. Однако в силу ограничений метода прямого численного моделирования ранее не удавалось получить спектры плотности и кинетической энергии и показать их совпадения и реализацию пассивного режима для флуктуаций плотности в сжимаемой МГД турбулентности на основе полной трехмерной системы уравнений магнитной гидродинамики.

## **Цель работы**

Разработать метод крупных вихрей для исследования сжимаемой магнитогидродинамической турбулентности политропной плазмы. Расширить параметризацию подсеточных явлений на случай присутствия эффектов сжимаемости и магнитного поля. Исследовать применимость различных подсеточных параметризаций для различных параметров подобия.

Разработать метод крупных вихрей для теплопроводящей плазмы в сжимаемой МГД-турбулентности и разработать теорию принципиально новых подсеточных слагаемых, возникающих в методе крупных вихрей из-за присутствия магнитного поля и флуктуаций температуры.

Осуществить численное моделирование методом крупных вихрей затухающей сжимаемой МГД-турбулентности в политропном газе и теплопроводящей плазме. Сравнить результаты моделирования метода крупных вихрей с результатами, полученные методом прямого численного моделирования.

Исследовать спектры флуктуаций плотности и энергии в сжимаемой магнитогидродинамической турбулентной плазме для политропного уравнения состояния. Показать возможность существования режима слабосжимаемых турбулентных пульсаций, когда флуктуации плотности являются пассивным скаляром.

Применить результаты моделирования для интерпретации известных спутниковых данных о флуктуациях плотности локальной межзвездной среды. Исследовать свойства анизотропии сжимаемой турбулентности и намагниченности плазмы в условиях локальной межзвездной среды.

## **Научная новизна работы**

Метод крупных вихрей ранее хорошо зарекомендовал себя для изучения гидродинамических течений атмосферы и океана, а также многих промышленных течений. Все имеющиеся предыдущие работы

рассматривали либо течения несжимаемой жидкости, в том числе и магнитной, либо течения сжимаемой нейтральной жидкости без магнитного поля. В диссертационной работе впервые метод крупных вихрей сформулирован и реализован для изучения сжимаемых турбулентных течений космической плазмы, как в случае политропного газа, так и для теплопроводящей плазмы в магнитогидродинамическом приближении. Применение этого метода к изучению космической плазмы позволило впервые продемонстрировать наличие нетривиального режима, при котором спектры флуктуаций плотности воспроизводят спектры кинетической энергии турбулентности, и сделать вывод о режиме пассивного переноса плотности в сжимаемой магнитогидродинамической турбулентности, а также изучить временную динамику намагниченности плазмы и свойств анизотропии. Эти результаты позволили подтвердить гипотезы относительно спектров флуктуаций турбулентности локального межзвездного газа.

### **Практическая и научная ценность работы**

Полученные в диссертации результаты увеличивают потенциальные возможности для моделирования сжимаемых МГД-течений, поскольку предложенный метод крупных вихрей позволяет исследовать турбулентные течения с существенно более высокими числами Рейнольдса, что особенно важно для проблем космической плазмы.

В работе определены наилучшие подсеточные модели при различных числах подобия для моделирования сжимаемой политропной космической плазмы. Предложенные новые параметризации подсеточных слагаемых для описания турбулентности теплопроводящей плазмы могут быть использованы для изучения процессов в различных инженерных течениях, например, возможность управления пограничным слоем и снижение сопротивления потоку, магнитогидродинамические течения в каналах, в процессах отливки стали и в трубах для охлаждения термоядерных реакторов.

Результаты исследований слабосжимаемого режима МГД-турбулентности объяснили имеющиеся данные наблюдений локального межзвездного газа и могут быть использованы для планирования их новых наблюдений в космических проектах.

### **Обоснованность и достоверность полученных результатов**

Достоверность полученных в диссертационной работе результатов обеспечивается сравнением результатов, полученных методом крупных вихрей, с результатами исследования сжимаемой МГД-турбулентности

методом прямого численного моделирования, применением хорошо обоснованных численных методов, устойчивостью и сходимостью использованных разностных схем. Достоверность результатов третьей главы обеспечивается сравнением с имеющимися данными наблюдений локальной межзвездной среды и приближенными теориями.

## **Публикации**

Основные результаты работы опубликованы в 6 статьях в реферируемых российских и зарубежных изданиях, из которых 4 из списка журналов, рекомендованных ВАК. Результаты работы представлены в 11 тезисах докладов российских и международных конференций.

## **Апробация работы**

Результаты, изложенные в диссертации, были представлены на российских и международных научных конференциях и симпозиумах:

- XLVII и XLVIII научных конференциях МФТИ, Москва, 2004 – 2005;
- Конференциях молодых ученых, посвященных дню космонавтики, ИКИ РАН, Москва, 2005 – 2006;
- XIII научной школе "Нелинейные волны-2006", конференции молодых ученых, Нижний Новгород, 2006;
- XXVIII конференции молодых ученых механико-математического факультета МГУ, Москва, 2006;
- European Geosciences Union, EGU, Vienna, Austria, 2005;
- Conference on Turbulence and Interactions (TI2006), Porquerolles, France, 2006;
- 8th International School/Symposium for Space Simulations (ISSS-8), Kauai, USA, 2007;
- International School of Space Science "Turbulence and Waves in Space Plasmas", L'Aquila, Italy, 2007.

## **Личный вклад автора**

Автор принимал участие в формулировке задач и выборе методов их решения. Все численные и теоретические результаты, представленные в настоящей диссертации, а также сравнение с



данными наблюдений, разработка численных алгоритмов, были получены лично автором диссертации.

## **Структура и объем диссертации**

Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, заключения и списка цитированной литературы. Объем диссертации – 132 страницы. Библиография включает 144 наименования. Диссертация содержит 54 рисунка, 2 таблицы.

## **Содержание работы**

**Во введении** обосновывается актуальность работы, сформулированы её цели, дается обзор литературы по данной тематике, приведены сведения о научной новизне и практической значимости работы, а также о личном вкладе соискателя, сформулированы основные положения, выносимые на защиту, и приведены сведения о структуре диссертации.

**Первая глава** посвящена разработке теории метода крупных вихрей для сжимаемой магнитогидродинамической турбулентности политропной плазмы и исследованию затухающей сжимаемой МГД-турбулентности при различных числах подобия. Модель политропного газа используется и эффективно применяется при исследовании и моделировании сжимаемой турбулентности нейтральной и магнитной жидкости, турбулентности солнечного ветра, турбулентности в межзвездном газе, а также в других задачах астрофизической турбулентности. Это приводит к тому, что вместо громоздкого и сложного уравнения сохранения энергии для замыкания системы уравнений используется политропное соотношение между плотностью и давлением:  $p = \rho^\gamma$ . В этом случае система уравнений сжимаемой магнитной гидродинамики сводится к более простому виду.

В методе крупных вихрей к исходным уравнениям применяется операция фильтрации. Каждый физический параметр разлагается на крупномасштабную (отфильтрованную) и мелкомасштабную составляющие. Причем, эффекты на больших масштабах высчитываются непосредственно, а на мелких - моделируются. Для фильтрации уравнений магнитной гидродинамики в методе LES использован фильтр, удовлетворяющий свойству нормировки:

$$\overline{f}(x) = \int_D f(x')G(x, x'; \overline{\Delta})dx' \quad (1)$$

здесь  $G(x, x'; \overline{\Delta})$  - фильтр;  $f$  - одна из характеристик течения;  $D$  - область течения;  $\overline{\Delta}$  - ширина фильтра;  $x_j = (x, y, z)$  - оси Декартовой системе координат.

Для упрощения уравнений, описывающих турбулентное МГД-движение с переменной плотностью, применялась фильтрация по Фавру (другое название - средневзвешенная фильтрация), для того чтобы избежать появления дополнительных подсеточных слагаемых:  $\tilde{f} = \overline{\rho f} / \overline{\rho}$ . В работе получены следующие отфильтрованные уравнения МГД в безразмерном виде:

$$\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{\rho} \tilde{u}_j}{\partial x_j} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \overline{\rho} \tilde{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_j + \frac{\overline{\rho} \gamma}{\gamma M_s^2} \delta_{ij} - \frac{1}{\text{Re}} \tilde{\sigma}_{ij} + \frac{\overline{B}^2}{2M_A^2} - \frac{1}{M_A^2} \overline{B}_i \overline{B}_j) = - \frac{\partial \tau_{ji}^u}{\partial x_j} \quad (3)$$

$$\frac{\partial \overline{B}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\tilde{u}_j \overline{B}_i - \overline{B}_j \tilde{u}_i) - \frac{1}{\text{Re}_m} \frac{\partial^2 \overline{B}_i}{\partial x_j^2} = - \frac{\partial \tau_{ji}^b}{\partial x_j} \quad (4)$$

$$\frac{\partial \overline{B}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (5)$$

где  $\rho$  - плотность;  $u_j$  - скорость в направлении  $x_j$ ;

$\sigma_{ij} = 2\mu S_{ij} - \frac{2}{3}\mu S_{kk}\delta_{ij}$  - вязкий тензор напряжений;  $S_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i})$  - тензор

скорости деформации;  $B_j$  - магнитное поле в направлении  $x_j$ ;  $\mu$  - динамический (молекулярный) коэффициент вязкости;  $\eta$  - коэффициент магнитной диффузии;  $\delta_{ij}$  - символ Кронекера. В системе МГД уравнений (2) – (5) использовались следующие безразмерные параметры подобия:  $\text{Re}$  - гидродинамическое число Рейнольдса,  $\text{Re}_m$  - магнитное число Рейнольдса,  $M_s$  - число Маха,  $M_A$  - альфвеновское (магнитное) число Маха.

Для сравнения в этой главе также выведены уравнения МГД, отфильтрованные с использованием обычной процедуры фильтрации и средневзвешенной фильтрации. Показано, что после обычной операции фильтрации появляются дополнительные слагаемые, связанные с переносом массы, по сравнению с видом уравнений, отфильтрованных по Фавру.

Вследствие фильтрации по Фавру системы уравнений МГД политропной плазмы появляются подсеточные слагаемые в правой части уравнений (3) и (4):  $\tau_{ij}^u = \bar{\rho}((u_j u_i)^\sim - \tilde{u}_j \tilde{u}_i) - \frac{1}{M_A^2}(\overline{B_i B_j} - \bar{B}_j \bar{B}_i)$  -

подсеточный тензор напряжений и  $\tau_{ij}^b = (\overline{u_i B_j} - \bar{B}_j \tilde{u}_i) - (\overline{B_i u_j} - \tilde{u}_j \bar{B}_i)$  - магнитный подсеточный тензор напряжений, которые необходимо параметризовать, выразив их через крупномасштабные значения характеристик течения. Учет сжимаемости течения приводит к усложнению вида тензора подсеточных напряжений в уравнении количества движения, связанной с появлением отфильтрованной плотности по сравнению с несжимаемым течением. Однако магнитный тензор подсеточных напряжений, возникающий в уравнении индукции, сохраняет такой же вид, как и для несжимаемого МГД-течения.

В данной главе обобщены различные модели замыкания подсеточных слагаемых на случай сжимаемой МГД-турбулентности, а именно:

модель Смагоринского для МГД-турбулентности:

$$\tau_{ij}^u - \frac{1}{3} \tau_{kk}^u \delta_{ij} = -2C_1 \bar{\rho} \bar{\Delta}^2 |\tilde{S}^u| (\tilde{S}_{ij} - \frac{1}{3} \tilde{S}_{kk} \delta_{ij}) \quad (6)$$

$$\tau_{ij}^b = -2D_1 \bar{\Delta}^2 |j| \bar{J}_{ij} \quad (7)$$

$$\tau_{kk}^u = 2Y_1 \bar{\rho} \bar{\Delta}^2 |\tilde{S}^u|^2 \quad (8)$$

модель Колмогорова для МГД-турбулентности:

$$\tau_{ij}^u - \frac{1}{3} \tau_{kk}^u \delta_{ij} = -2C_2 \bar{\rho} \bar{\Delta}^{4/3} (\tilde{S}_{ij} - \frac{1}{3} \tilde{S}_{kk} \delta_{ij}) \quad (9)$$

$$\tau_{ij}^b = -2D_2 \bar{\Delta}^{4/3} \bar{J}_{ij} \quad (10)$$

$$\tau_{kk}^u = 2Y_2 \bar{\rho} \bar{\Delta}^{4/3} |\tilde{S}^u| \quad (11)$$

модель, основанная на перекрестной спиральности скорости и магнитного поля, для МГД-турбулентности:

$$\tau_{ij}^u - \frac{1}{3} \tau_{kk}^u \delta_{ij} = -2C_3 \bar{\rho} \bar{\Delta}^2 |\tilde{S}_{ij}^u \tilde{S}_{ij}^b|^{1/2} (\tilde{S}_{ij} - \frac{1}{3} \tilde{S}_{kk} \delta_{ij}) \quad (12)$$

$$\tau_{ij}^b = -2D_3 \bar{\Delta}^2 \text{sgn}(\bar{j} \tilde{\omega}) |\bar{j} \tilde{\omega}|^{1/2} \bar{J}_{ij} \quad (13)$$

$$\tau_{kk}^u = 2Y_3 \bar{\rho} \bar{\Delta}^2 |\tilde{f}| |\tilde{S}^u| \quad (14)$$

модель подобия масштабов для МГД-турбулентности:

$$\tau_{ij}^u = \bar{\rho}((\tilde{u}_j \tilde{u}_i)^{\sim} - \tilde{u}_j \tilde{u}_i) - \frac{1}{M_A^2} (\overline{\tilde{B}_i \tilde{B}_j} - \bar{\tilde{B}}_j \bar{\tilde{B}}_i) \quad (15)$$

$$\tau_{ij}^b = (\overline{\tilde{u}_i \tilde{B}_j} - \bar{\tilde{B}}_j \tilde{u}_i) - (\overline{\tilde{B}_i \tilde{u}_j} - \tilde{u}_j \bar{\tilde{B}}_i) \quad (16)$$

и смешанная модель для МГД-турбулентности:

$$\tau_{ij}^u - \frac{1}{3} \tau_{kk}^u \delta_{ij} = -2C_5 \bar{\rho} \bar{\Delta}^2 |\tilde{S}^u| (\tilde{S}_{ij} - \frac{1}{3} \tilde{S}_{kk} \delta_{ij}) + \bar{\rho}((\tilde{u}_j \tilde{u}_i)^{\sim} - \tilde{u}_j \tilde{u}_i) - \frac{1}{M_A^2} (\overline{\tilde{B}_i \tilde{B}_j} - \bar{\tilde{B}}_j \bar{\tilde{B}}_i) \quad (17)$$

$$\tau_{ij}^b = -2D_5 \bar{\Delta}^2 |\bar{j}| \bar{J}_{ij} + (\overline{\tilde{u}_i \tilde{B}_j} - \bar{\tilde{B}}_j \tilde{u}_i) - (\overline{\tilde{B}_i \tilde{u}_j} - \tilde{u}_j \bar{\tilde{B}}_i) \quad (18)$$

$$\tau_{kk}^u = 2Y_5 \bar{\rho} \bar{\Delta}^2 |\tilde{S}^u|^2 \quad (19)$$

В формулах (6) - (19) использовались следующие обозначения:

$$|\tilde{S}^u| = (2S_{ij} S_{ij})^{1/2}, \quad \bar{J}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{B}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{B}_j}{\partial x_i} \right), \quad \tilde{\omega} - \text{крупномасштабная завихренность,}$$

$\bar{j}$  - крупномасштабная плотность электрического тока,  $(..)^{\sim}$  обозначает, что операция фильтрации относится ко всему выражению в скобках.

Все модели (кроме модели подобия масштабов) содержат константы  $C_k, Y_k, D_k$  ( $k = 1, 2, 3, 5$ ), которые необходимо определить. Для того чтобы решить проблему, связанную с выбором значений констант, была использована динамическая процедура, обобщенная в данной работе на случай сжимаемых МГД-уравнений, которая определяет значение модельной константы на каждом временном шаге.

В этой главе также представлены численные методы, которые использовались в работе при моделировании сжимаемой МГД-турбулентности. Для интеграции по времени использовался модифицированный явный метод Рунге-Кутта третьего порядка точности, который требует меньше ресурсов оперативной памяти по сравнению со стандартным методом Рунге-Кутта. Был разработан и создан численный код с конечно-разностными схемами четвертого порядка точности для системы уравнений магнитной гидродинамики, записанной в консервативной форме. Однако для нелинейных слагаемых применяется кососимметричная форма, которая обеспечивает более точные результаты, так как уменьшаются ошибки, связанные с дискретизацией при использовании конечно-разностного подхода для моделировании турбулентных течений. Для разделения турбулентного течения на крупномасштабные и мелкомасштабные вихри применялся фильтр Гаусса четвертого порядка точности. Так как в работе рассматривается трехмерное сжимаемое турбулентное МГД-

течение, то использовалось последовательное применение одномерных фильтров.

Для оценки эффективности различных предложенных подсеточных замыканий LES использовались результаты, полученные прямым численным моделированием МГД-турбулентности в различных диапазонах магнитного числа Рейнольдса, гидродинамического числа Рейнольдса и числа Маха. Всего было рассмотрено семь различных случаев с варьированием начальных параметров вычислений. Приведены результаты расчетов сжимаемых МГД-течений методом LES с использованием пяти подсеточных параметризаций.

Показано, что при уменьшении магнитного числа Рейнольдса разница между подсеточными моделями уменьшается для магнитной энергии и все предложенные подсеточные модели демонстрируют хорошее согласование с результатами DNS при малых значениях магнитного числа Рейнольдса. При увеличении магнитного числа Рейнольдса растет роль подсеточных замыканий в моделировании сжимаемой МГД-турбулентности и уменьшается скорость диссипации магнитной энергии. Наилучшие результаты показали модели Смагоринского, Колмогорова и модель, основанная на перекрестной спиральности для временной эволюции магнитной энергии. Такое же поведение наблюдается и для перекрестной спиральности: роль подсеточных параметризаций растет при увеличении магнитного числа Рейнольдса. Для кинетической энергии при уменьшении магнитного числа Рейнольдса наблюдалось большее расхождение в результатах LES при применении различных подсеточных параметризаций. Модель подобия масштабов продемонстрировала наилучшие результаты, остальные подсеточные замыкания увеличили точность расчетов. Для временной динамики турбулентных напряжений, как магнитных, так и кинетических, характерно увеличение влияния на результаты моделирования МГД-турбулентности подсеточных параметризаций при увеличении магнитного числа Рейнольдса. Роль анизотропии в расчетах и расхождение LES- и DNS-результатов для анизотропии турбулентности увеличивались при уменьшении магнитного числа Рейнольдса.

При изменении гидродинамического числа Рейнольдса результаты расчетов вели себя качественно похожим образом, это связано с тем, что начальные условия для магнитного поля, поля скоростей не изменялись, поэтому в наших вычислениях влияние на выбор подсеточной параметризации от гидродинамического (или тейлоровского) числа Рейнольдса зависит слабо. Подсеточные модели Смагоринского, Колмогорова, смешанная и модель, основанная на перекрестной спиральности скорости и магнитного поля, показывают адекватные результаты и хорошее приближение к DNS-результатам.

Число Маха оказывает существенное влияние на результаты вычислений. При увеличении звукового числа Маха увеличивалось расхождение в результатах DNS и LES для кинетической энергии. Модель Смагоринского и модель, основанная на перекрестной спиральности, для кинетической энергии показали наилучшее согласование с DNS при различных числах Маха. Для магнитной энергии, наоборот, наблюдалось уменьшение разброса в результатах при увеличении числа Маха. Следует заметить, что при уменьшении числа Маха магнитная энергия быстрее выходит на стационарный уровень. Для перекрестной спиральности магнитного поля и скорости модель Смагоринского показала лучшие результаты, как для высоких чисел Маха, так и для низких. Асимметрия компонент скорости, рассчитанная с использованием LES, лучше совпадает с результатами DNS при увеличении числа Маха. На асимметрию компонент магнитного поля выбор подсеточных параметризаций практически не оказал влияния. При увеличении числа Маха турбулентные напряжения, рассчитанные при помощи LES, лучше согласовались с результатами DNS.

Подсеточные модели меньше всего оказали влияние на временную эволюцию пологости и асимметрии (модель без подсеточных замыканий также демонстрирует сравнительно хорошее согласование с DNS результатами), это связано с тем, что анизотропия и перемежаемость являются свойствами крупномасштабных структур, а различия между подсеточными моделями и моделью без подсеточных замыканий имеют место на мелких масштабах турбулентного течения.

Показано, что наилучшие результаты демонстрируют расширенная модель Смагоринского для МГД-случая и модель, основанная на перекрестной спиральности магнитного поля и поля скоростей. Модель подобия масштабов не обеспечивала достаточной диссипацией кинетическую и магнитную энергию и эту модель следует использовать только вместе с моделями вихревой вязкости (например, с моделью Смагоринского), что является основной идеей смешанной модели.

**Вторая глава** диссертации посвящена разработке метода крупных вихрей для сжимаемой магнитогидродинамической турбулентности теплопроводящей плазмы, где для замыкания системы МГД-уравнений использовалось уравнение полной энергии, и исследованию сжимаемой МГД-турбулентности при различных числах Маха.

В главе представлена полная система уравнений сжимаемой магнитной гидродинамики электро- и теплопроводящей жидкости, исходные уравнения МГД приводятся к безразмерному виду. Получены отфильтрованные по Фавру уравнения для полной системы МГД-уравнений теплопроводящей жидкости, которая используется в методе

крупных вихрей для моделирования трехмерной сжимаемой турбулентности:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_j}{\partial x_j} = 0 \quad (20)$$

$$\frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_j + \frac{\bar{\rho}^\gamma}{\gamma M_s^2} \delta_{ij} - \frac{1}{\text{Re}} \tilde{\sigma}_{ij} + \frac{\bar{B}^2}{2M_A^2} - \frac{1}{M_A^2} \bar{B}_i \bar{B}_j) = - \frac{\partial \tau_{ji}^u}{\partial x_j} \quad (21)$$

$$\frac{\partial \bar{B}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\tilde{u}_j \bar{B}_i - \bar{B}_j \tilde{u}_i) - \frac{1}{\text{Re}_m} \frac{\partial^2 \bar{B}_i}{\partial x_j^2} = - \frac{\partial \tau_{ji}^b}{\partial x_j} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{E}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} [(\tilde{E} + \bar{P}) \tilde{u}_j - \frac{1}{M_A^2} \bar{B}_i \bar{B}_j \tilde{u}_i] + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \frac{\tilde{q}_j}{\text{Pr Re } M_s^2 (\gamma - 1)} - \frac{1}{\text{Re}} \tilde{\sigma}_{ij} \tilde{u}_i \right] - \\ \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \frac{\eta}{\text{Re}_m M_a^2} \bar{B}_i \left( \frac{\partial \bar{B}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{B}_j}{\partial x_i} \right) \right] = - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{\gamma M_s^2} Q_j + \frac{1}{2} J_j + \frac{1}{2M_a^2} V_j - \frac{1}{M_s^2} G_j \right) \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь  $E = \rho e + \frac{1}{2} \rho u_i u_i + \frac{1}{2M_a^2} B_i B_i$  - полная энергия,  $e = \frac{T \rho}{\gamma(\gamma-1)M_s^2}$  - внутренняя энергия,  $\tilde{q}_j = -k \left( \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j} \right)$  - диссипация, связанная с теплопроводностью (закон Фурье). Для замыкания системы используется уравнение состояния в виде:  $\bar{p} = \frac{\tilde{T} \bar{\rho}}{\gamma M_s^2}$ .

Наличие уравнения для полной энергии в системе МГД-уравнений значительно усложняет решение задачи методом крупных вихрей. Влияние мелкомасштабной турбулентности на отфильтрованную часть уравнений магнитной гидродинамики определяется через подсеточные слагаемые в правой части уравнений (21) – (23). Для определения тензора подсеточных напряжений  $\tau_{ij}^u$  и магнитного подсеточного тензора напряжений  $\tau_{ij}^b$  применялась модель Смагоринского для МГД-турбулентности (6) – (8), подробно рассмотренная в первой главе. Для определения подсеточного потока тепла  $Q_j = \bar{\rho}((u_j T)^\sim - \tilde{u}_j \tilde{T})$  и турбулентной подсеточной диффузии  $J_j = \bar{\rho}((u_j u_k u_k)^\sim - \tilde{u}_j (u_k u_k)^\sim)$  в уравнении полной энергии использовались параметризации в виде

$$Q_j = -C_s \frac{\bar{\Delta}^2 \bar{\rho} |\tilde{S}^u|}{\text{Pr}_T} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j} \quad (24)$$

$$J_j = \tilde{u}_k \tau_{jk}^u \quad (25)$$

В отличие от гидродинамики нейтрального газа, в магнитогидродинамике заряженной жидкости появляются сразу несколько новых подсеточных слагаемых в отфильтрованном уравнении полной энергии, для которых в данной главе разработана теория для их параметризаций. Для того чтобы получить подсеточные модели для подсеточных слагаемых в уравнении энергии, возникающие из-за наличия магнитного поля, была использована теория, основанная на вычислении обобщенных центральных моментов. Данный подход в диссертационной работе был расширен и применен к МГД-случаю, в итоге для потока подсеточной магнитной энергии  $V_j = (\overline{B_k B_k u_j} - \overline{B_j B_i \tilde{u}_j})$  и подсеточной энергии взаимодействия магнитного натяжения и скорости  $G_j = (\overline{B_j B_k u_k} - \tilde{u}_k \overline{B_k B_k})$  была получена следующая подсеточная модель:

$$\frac{1}{2} V_j - G_j \cong \overline{B_k} \tau_{jk}^b \quad (26)$$

Также в данной главе приведены соотношения для определения модельных констант в рассмотренных подсеточных замыканиях при помощи динамической процедуры.

Во второй главе представлены результаты моделирования затухающей сжимаемой магнитогидродинамической турбулентности методом LES при различных звуковых числах Маха: когда течение слабосжимаемое; когда сжимаемость играет существенную роль; третий случай соответствует появлению сильных разрывов в сверхзвуковом сжимаемом МГД-течении. Полученные численные результаты LES проанализированы на основе сравнения с результатами численных экспериментов, выполненных прямым численным моделированием для теплопроводящей заряженной жидкости. Изучена временная динамика кинетической, магнитной энергии, перекрестной спиральности между магнитным полем и скоростью, средней температуры, температурной асимметрии, параметра, характеризующего флуктуации температуры, при различных числах Маха. Показано, что анизотропия главным образом свойство крупномасштабных структур, и различия между подсеточными замыканиями и моделью без подсеточных параметризаций имеют место в основном на мелких масштабах турбулентного течения.

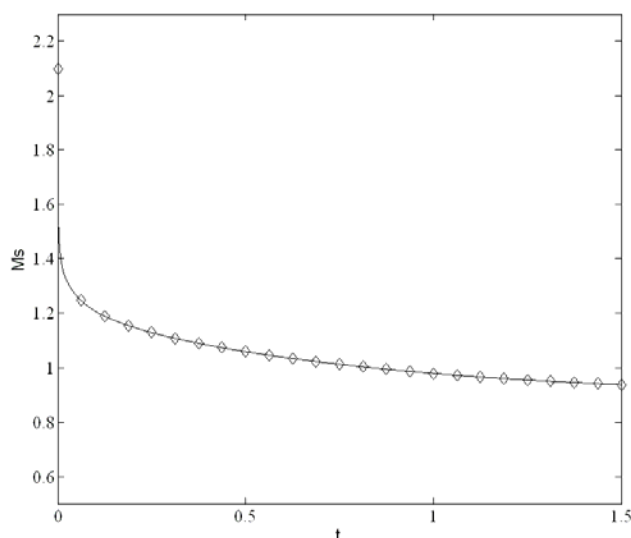
Продемонстрировано, что на кинетическую и магнитную энергию учет подсеточных слагаемых в уравнении полной энергии почти не оказывает никакого эффекта, даже при высоких числах Маха, в то же время для температуры (соответственно и для внутренней энергии) наличие подсеточных моделей в уравнении полной энергии является важным условием для повышения точности вычислений термодинамических величин. Указано, что при увеличении значения



числа Маха увеличиваются осцилляции кинетической энергии и температуры, так как при повышении звукового числа Маха увеличивается влияние вязкости и возрастает роль нелинейных эффектов, что приводит к усилению осцилляций и флуктуаций характеристик турбулентного течения.

В данной главе показано, что LES-метод с использованием явной средневзвешенной фильтрации демонстрирует хорошие результаты при моделировании теплопроводящей плазмы в сжимаемой МГД-турбулентности при различных числах Маха.

**В третьей главе**, используя преимущества метода крупных вихрей, исследуется нетривиальный режим сжимаемой магнетогидродинамической турбулентности космической плазмы, когда исходно сверхзвуковые флуктуации переходят в слабосжимаемый режим. Изучаются спектры плотности и энергии турбулентности в этом режиме, изменение намагниченности плазмы со временем и свойства анизотропии сжимаемой МГД-турбулентности. Полученные результаты используются для интерпретации данных о флуктуациях плотности в локальной межзвездной среде.

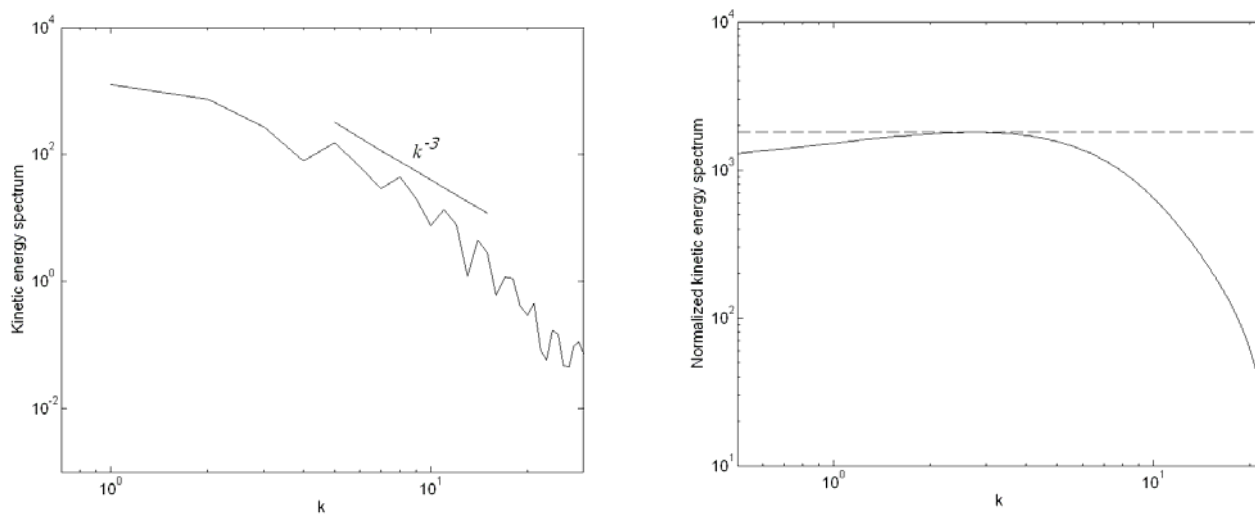


**Рис. 1.** Затухание турбулентного мелкомасштабного числа Маха со временем. Наблюдается переход из сверхзвукового режима к дозвуковому.

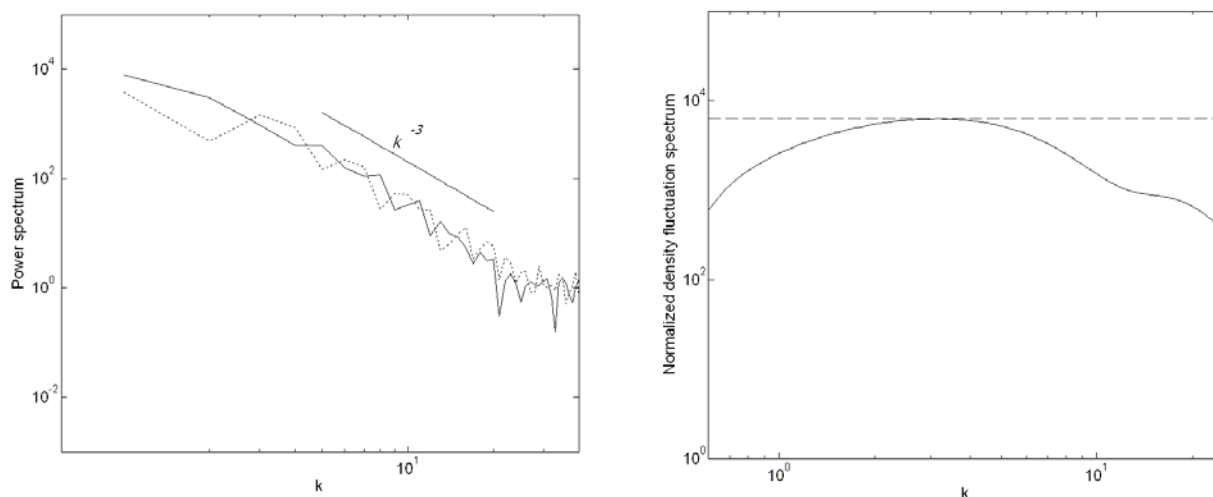
Метод крупных вихрей, разработанный в первой главе, используется для моделирования сжимаемой затухающей МГД-турбулентности в политропном случае. Показано, что имеется возможность существования режима слабосжимаемых турбулентных пульсаций, когда флуктуации плотности являются пассивным скаляром. Для этого получена временная эволюция турбулентного мелкомасштабного числа Маха и дивергенции скорости. Как видно из рис. 1, локальное турбулентное число Маха

уменьшается со временем со сверхзвукового значения до дозвукового режима. Показано, что турбулентный каскад, связанный с нелинейными взаимодействиями в комбинации с диссипативными эффектами на мелких масштабах, приводит к тому, что сверхзвуковые плазменные флуктуации затухают достаточно сильно к дозвуковым флуктуациям в электропроводящем течении, и МГД-турбулентность становится

слабосжимаемой. Таким образом, результаты численного моделирования показали, что существенно сжимаемое турбулентное течение становится слабосжимаемым.



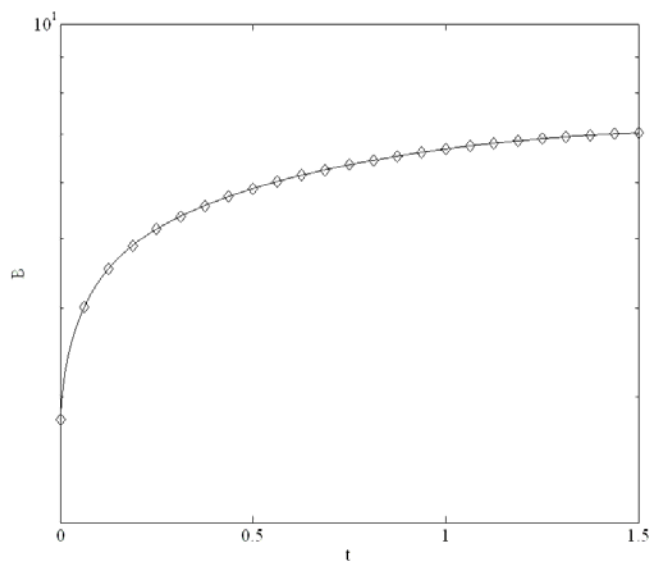
**Рис.2.** Спектр кинетической энергии (слева). Нормализованный (умноженный на  $k^{5/3}$ ) сглаженный спектр кинетической энергии (справа). Видно, что степенной показатель спектра близок к  $k^{-3}$  для большей части турбулентного каскада. Однако существует четко выраженный инерционный интервал колмогоровского типа  $k^{-5/3}$ .



**Рис.3.** Спектр плотности - сплошная линия, спектр флуктуаций плотности - пунктирная линия (слева). Нормализованный (умноженный на  $k^{5/3}$ ) сглаженный спектр флуктуаций плотности (справа). На рисунке (слева) оба графика имеют показатель спектра близкий к  $k^{-3}$ . Также существует четко выраженный инерционный интервал колмогоровского типа  $k^{-5/3}$  для флуктуаций плотности (справа), что подтверждает наблюдательные данные.

Из рис. 2 и 3 видно, что спектры кинетической энергии, плотности и флуктуаций плотности демонстрируют практически аналогичное поведение в Фурье-пространстве и имеют близкие показатели степени. Проиллюстрировано также, что в спектрах кинетической энергии (рис. 2) и флуктуаций плотностей (рис. 3) существует инерционный интервал турбулентности колмогоровского типа, причем практически при таких же волновых числах. Таким образом, сделан вывод, что флуктуации плотности являются пассивной примесью в умеренно сжимаемом течении дозвуковой турбулентности, что объясняет данные наблюдений со спутников турбулентности локального межзвездного газа.

В этой главе также показано, что со временем уменьшаются энергосодержащие крупные масштабы турбулентности, амплитуда спектра энергии также ослабевает, что соответствует диссипации рассматриваемого сжимаемого МГД-течения. Отмечено, что увеличивается диссипативный интервал в турбулентном каскаде энергии и уменьшается инерционный интервал, что соответствует уменьшению со временем гидродинамического числа Рейнольдса в затухающей турбулентности.



**Рис.4.** Временная эволюция турбулентной плазменной беты в сжимаемой МГД турбулентности. Плазма из сильно намагниченной в начальный промежуток времени со временем становится менее намагниченной.

Переход плазмы от существенно сжимаемого турбулентного течения к слабосжимаемому МГД-течению в локальной межзвездной среде не только преобразовывает сверхзвуковое движение в дозвуковое, но также приводит к ослаблению намагниченности плазмы. В режиме, когда существенно сжимаемые плазменные флуктуации затухают, намагниченность плазмы падает и плазменная бета (отношение плазменного давления к магнитной энергии) с низкого значения увеличивается до состояния с высоким значением, как видно из рис. 4.

Из временной динамики сжимаемого МГД-течения следует, что магнитозвуковые флуктуации ослабевают быстрее, чем альфвеновские. Частицы плазмы, связанные с магнитными силовыми линиями, выталкиваются из их гироорбит вследствие того, что

увеличивается доминирующая роль плазменного давления по сравнению с магнитной энергией. Это приводит, в конечном счете, к ослаблению намагниченности плазмы, а следовательно, плазменных флуктуаций, и переходу к режиму с высоким значением плазменной беты и дозвуковому слабосжимаемому течению.

В данной главе продемонстрировано, что МГД-турбулентность в условиях локальной межзвездной среды является анизотропной, что подтвердило данные наблюдений. Получено различное поведение компонент скорости в спектральном каскаде при малых волновых числах для  $x$ -,  $y$ - и  $z$ -компонент поля скорости и почти отсутствие различий при больших Фурье-модах, что означает возникновение турбулентных анизотропных каскадов, главным образом, на больших масштабах. Также показано, что при больших значениях волнового числа, что соответствует мелким масштабам, спектр является изотропным.

**В заключении** диссертации сформулированы основные выводы и результаты работы.

## **Положения, выносимые на защиту**

1. Сформулирован метод крупных вихрей для сжимаемой МГД-турбулентности политропной космической плазмы, показано, что в этом случае подсеточные модели получаются комбинацией и обобщением известных подсеточных слагаемых в гидродинамике сжимаемой нейтральной жидкости и несжимаемой магнитной жидкости.

2. Исследованы предложенные подсеточные параметризации и выявлены подсеточные модели, которые демонстрируют наиболее точные результаты при моделировании затухающей сжимаемой МГД-турбулентности при различных числах подобия. Показано, что расширенная модель Смагоринского для сжимаемого МГД-случая и модель, основанная на перекрестной спиральности магнитного поля и скорости, обеспечивают наиболее точные численные результаты.

3. Разработан метод крупных вихрей для сжимаемой МГД-турбулентности электро- и теплопроводящей жидкости и показано, что появляются принципиально новые подсеточные слагаемые в отфильтрованном уравнении полной энергии вследствие наличия магнитного поля. Предложена теория подсеточных турбулентных течений для новых подсеточных слагаемых для замыкания системы отфильтрованных по Фавру МГД-уравнений. Проведено моделирование сжимаемой МГД-турбулентности при различных числах Маха и показана применимость метода крупных вихрей к

моделированию теплопроводящей плазмы при малых и умеренных числах Маха.

4. Исследована динамика флуктуаций плотности в космической плазме методом крупных вихрей. Установлено, что исходно сильно сжимаемые флуктуации становятся слабосжимаемыми и спектр флуктуаций плотности воспроизводит спектр кинетической энергии, это соответствует тому, что флуктуации плотности переносятся магнитогидродинамическим течением в режиме пассивной примеси. Это позволило подтвердить гипотезу о слабосжимаемой природе флуктуаций плотности, наблюдаемых в локальной межзвездной среде.

5. Исследованы свойства спектров энергии со временем. Установлено, что со временем уменьшаются энергосодержащие крупные масштабы турбулентности, амплитуда спектров также ослабевает. Показано, что увеличивается диссипативный интервал в энергетическом каскаде и уменьшается инерционный интервал. Исследованы свойства анизотропии МГД-турбулентности космической плазмы в условиях локального межзвездного газа. Показано, что крупномасштабное магнитогидродинамическое течение является анизотропным, а мелкомасштабное - изотропным в турбулентности локальной межзвездной среды.

## Публикации по теме диссертации

1. Chernyshov A. A., Karelsky K. V., Petrosyan A. S. *Subgrid-scale modeling in large-eddy simulations of compressible magnetohydrodynamic turbulence*// Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2006. V. 21. N. 1. P. 1-20.

2. Chernyshov A. A., Karelsky K. V., Petrosyan A. S. *Large-eddy simulation of magnetohydrodynamic turbulence in compressible fluid* //Physics of Plasmas. 2006. V. 13. N. 3. P. 032304-032304-9.

3. Chernyshov A. A., Karelsky K. V., Petrosyan A. S. *Subgrid-scale modelling of compressible magnetohydrodynamic turbulence in heat-conducting plasma*// Physics of Plasmas. 2006. V. 13. N. 10. P. 104501-104501-4.

4. Chernyshov A. A., Karelsky K. V., Petrosyan A. S. *Development of large eddy simulation for modeling of decaying compressible magnetohydrodynamic turbulence*// Physics of Fluids. 2007. V. 19. N. 5. P. 055106-055106-14.

5. Chernyshov A. A., Karelsky K. V., Petrosyan A. S. *Assessment of subgrid-scale models for decaying compressible MHD turbulence*// Flow, Turbulence and Combustion. 2008. V. 20 N. 1 P. 21-35.

6. Chernyshov A. A., Karelsky K. V., Petrosyan A. S. *Large Eddy Simulation of Compressible Magnetohydrodynamic Turbulence in Heat-conducting Plasma*// In Advances in Turbulence XI. Proceedings of the EUROMECH European Turbulence Conference. 2007. P. 20-22. ISSN 0930-8989. ISBN 978-3-540-72603-6. Springer, Berlin, Heidelberg, New York.

055(02)2

Ротап rint ИКИ РАН  
Москва, 117997, Профсоюзная, 84/32

---

Подписано к печати 14.03.2008

---

Заказ 2128

Формат 70x108/32

Тираж 100

0,8 уч.-изд.л.