

На правах рукописи

ПЕТРОСЯН Аракел Саркисович

**ТУРБУЛЕНТНОСТЬ И РАЗРЫВЫ В СЛОЖНЫХ
ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЯХ ЖИДКОСТИ И ПЛАЗМЫ**

01.04.02 – теоретическая физика

**Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук**



Москва 2009

Работа выполнена в Институте космических исследований Российской академии наук (ИКИ РАН).

Официальные оппоненты:

д.ф.-м.н, профессор, Жмур Владимир Владимирович (Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН),

чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н, профессор, Петров Олег Федорович (Институт теплофизики экстремальных состояний Объединенный институт высоких температур РАН).

д.ф.-м.н, профессор, Соколов Дмитрий Дмитриевич (Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова).

Ведущая организация: Институт физики атмосферы им. А. М. Обухова РАН (г. Москва).

Защита состоится 11 ноября 2009 г. в 11 ч. 00 мин. на заседании Диссертационного Совета Д 002.113.03 ИКИ РАН по адресу: Москва, ул. Профсоюзная 84/32, 2-й подъезд, конференц-зал.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИКИ РАН.
Автореферат разослан _____ 2009 г.

Ученый секретарь
Диссертационного совета,
кандидат физ.-мат. наук



Буринская Т. М.

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Турбулентность и разрывы являются характерными особенностями гидродинамических течений жидкости и плазмы. Хорошо развитая теория и методы численного моделирования таких течений, как правило, ограничиваются упрощенными моделями, не учитывающими реальные природные условия, такие как неоднородность границ, многофазность, наличие сдвигов, совместное влияние магнитного поля и сжимаемости среды. Такие течения характерны для океана, атмосферы Земли и планет, а также для космической среды и требуют единых подходов для построения их теоретических моделей и для исследования их пространственно-временной динамики. Фактически речь идет об изучении многомасштабных процессов в реальных природных сплошных средах путем нестандартного усреднения исходных гидродинамических уравнений.

Многие известные течения атмосферы и океана в реальных условиях являются гетерогенными из-за наличия примеси и неоднородными из-за присутствия препятствий, неровностей подстилающей поверхности. Зачастую хорошо развитая теория течений на ровной границе и модели, предложенные на основе этой теории, не описывают адекватно физические процессы в таких потоках. Исследования динамики реальных природных течений являются сложной и важной задачей. Особую роль играют точные решения для таких течений, поскольку позволяют исследовать их нелинейную динамику и изучать пределы применимости идеализированных моделей. Точные решения являются фундаментальными также для разработки приближенных моделей и для изучения адекватности компьютерных расчетов реальным течениям. Наличие второй фазы, помимо традиционных проблем адекватности расчетов, делает актуальной задачу разработки моделей и алгоритмов, минимизирующих вычислительные ресурсы. Динамика атмосферных и океанических течений во многом определяется свойствами гидродинамической турбулентности. Классическая теория однородной турбулентности описывает диссипацию геофизических течений, в то время как в реальных сложных природных течениях такое взаимодействие может быть нетривиальным.

Сжимаемая магнитогидродинамическая (МГД) турбулентность является широко распространенным состоянием космической плазмы во многих астрофизических, гелиофизических, геофизических процессах. Например, в аккреционных дисках МГД-турбулентность вызвана магнито-ротационной неустойчивостью. Большинство турбулентных явлений в физике Солнца описываются в рамках МГД: солнечный ветер,

расширение солнечной короны, конвективная зона, фотосфера, солнечный тахоклон. Турбулентность наблюдается в околоземном пространстве как в солнечном ветре, так и в различных областях магнитосферы Земли, в частности, в дальней области геомагнитного хвоста наблюдаемые спутниками свойства космической плазмы адекватно можно объяснить только в рамках теории и моделей сжимаемой турбулентности. Сжимаемые турбулентные течения в магнитном поле также широко распространены и в прикладных областях. Среди инженерных применений можно указать возможность управления пограничным слоем и снижение сопротивления потоку.

Нелинейная динамика таких течений в реальных физических условиях существенно усложняется при учете обсуждаемых факторов. Зачастую изучение таких явлений сталкивается с невозможностью разрешения полных систем гидродинамических уравнений, на всех описываемых ими масштабах, что делает актуальной задачу адекватного упрощения исходных моделей, привлечения новых теоретических идей и разработки новых методов численного моделирования. Именно решению этих вопросов и посвящена данная диссертация.

Задача об обтекании сложной границы течениями тяжелой жидкости со свободной поверхностью в присутствии источников является фундаментальной для моделирования крупномасштабных течений атмосферы и океана. Это, прежде всего, связано с тем, что улучшение разрешения таких моделей делает необходимым учет особенностей рельефа границы и поэтому требует глубокого понимания процессов на малых масштабах и их нетривиального влияния на крупном масштабе. Уравнения Эйлера, полностью описывающие гидродинамику природных и лабораторных течений идеальной жидкости, настолько сложны, что при наличии комплексной границы даже в предположении несжимаемости, баротропности и отсутствии вращения, не поддаются численному интегрированию в задачах с достаточно сильным изменением геометрии подстилающей поверхности. По этой причине разработка приближенных моделей и вычислительных методов, альтернативных решению исходных трехмерных уравнений гидродинамики, является актуальной проблемой.

Необходимость редукции исходных уравнений в классе задач со свободной поверхностью привела после предположения гидростатичности распределения давления, усреднения поля скорости по глубине потока и пренебрежения изменением горизонтальных скоростей вдоль линий, коллинеарных вектору силы тяжести, к построению Стокером математической модели более низкого порядка. Данная модель известна как модель мелкой воды, поскольку редукция осуществляется разложением исходных уравнений по малому параметру, определяемому отношением глубины жидкости к

характерному линейному размеру. При наличии внешнего источника, например, силы Кориолиса, область применения модели не ограничена условием малости глубины жидкости по сравнению с характерными линейными размерами, поскольку в этом случае двумерность течения есть следствие вращения, а не тонкости слоя. Уравнения мелкой воды, являясь системой нелинейных гиперболических уравнений, аппроксимируют полную систему уравнений Эйлера, описывающую течения несжимаемой жидкости со свободной поверхностью в поле силы тяжести при пренебрежении эффектами вертикальной неоднородности горизонтального поля скорости.

Уравнения мелкой воды широко используются для описания различных физических явлений, например для изучения крупномасштабных атмосферных и океанических течений, для моделирования Большого Красного Пятна в атмосфере Юпитера, для описания течений в береговых зонах морей и океанов, моделирования цунами, распространения волн прорыва и приливных бор в реках, распространения тяжелых газов и примесей в атмосфере Земли.

Нелинейный характер уравнений мелкой воды в случае неоднородной подстилающей поверхности означает, что использование аналитических методов решения может иметь успех только при очень специальных условиях и для их решения приходится использовать численные методы. Гиперболичность уравнений мелкой воды определяет наряду с гладкими наличие разрывных решений. Даже в случае, когда начальные условия являются гладкими, нелинейный характер уравнений наряду с их гиперболичностью в конечном время может привести к разрывному решению. Простые автомодельные решения гиперболических систем уравнений являются основополагающими в исследовании нелинейных волновых явлений, поскольку позволяют найти точное решение задачи распада произвольного разрыва. Задача Коши о распаде произвольного разрыва кусочно-постоянных начальных условий, впервые возникшая в газовой динамике (задача Римана), имеет фундаментальное значение. Ее решение облегчает понимание множества нелинейных явлений в течениях несжимаемой жидкости со свободной границей в рамках приближения мелкой воды.

Классическая модель мелкой воды разработана для изучения течений над слабоменяющимся рельефом. Наличие же препятствий, обусловленных резким изменением подстилающей поверхности, требует разработки альтернативных приближений, учитывающих влияние вертикальной неоднородности течения, возникающего у препятствий, поскольку классические приближения мелкой воды на такой границе нарушаются. Решение задачи Римана на ступенчатой границе особенно важно при изучении течений над сложной подстилающей поверхностью, аппроксимируемой системой ступенчатых

границ. Существующий аналитический подход для решения задачи Римана, основанный на предположении о наличии стационарной зоны в окрестности ступенчатой границы, с одной стороны, не учитывает потери кинетической энергии на турбулентное перемешивание вблизи ступеньки, с другой – накладывает ограничения на возможные глубины натекающего потока для преодоления ступенчатой границы. Решение этой задачи является важнейшим компонентом в разработке численных методов сквозного счета, основанных как на аналитических, так и на приближенных решениях задачи Римана.

Основная идея методов годуновского типа, основанных на решении задачи Римана, состоит в расщеплении решения многомерной задачи на набор одномерных подзадач, возникающих после кубирования расчетной области и записи соответствующих интегральных соотношений для всех элементов (ячеек), посредством которых осуществлялось кубирование. Данные методы особенно часто находят применение в численном моделировании, поскольку позволяют получать решение не только в области непрерывного течения, но и в областях разрыва решений, без специального выделения и отслеживания поверхностей разрыва. Кроме того, эти методы хорошо адаптируются к сложным граничным условиям, характерным для большинства постановок задач, описывающих реальные природные течения. В рамках приближения мелкой воды не существует однозначного решения вблизи разрыва дна, вследствие чего для выбора единственного решения необходимо вводить дополнительные предположения, отражающие реальную картину течения. Вообще говоря, начиная с некоторого критического значения удельного перепада высот, необходимо принимать во внимание величину отклонения горизонтальной скорости от средней, поскольку это отклонение нетривиально отражается уже на самих средних величинах.

Одной из основных трудностей моделирования течений мелкой воды является возможность появления зон частичного или полного обмеления. Зоны частичного обмеления могут появляться в областях течений, где глубина жидкости сопоставима с величиной перепада подстилающей поверхности. В таком случае рассматриваемая область течения может преобразовываться из односвязной в многосвязную или наоборот. Зоны полного обмеления представляют вычислительную сложность для большинства конечно-разностных методов и требуют выделения и специального учета.

Для решения многих реальных задач недостаточно учитывать только неоднородность подстилающей поверхности. Необходимость рассмотрения дополнительных воздействий, определяемых конкретными условиями течения, приводит к появлению в системе уравнений мелкой воды дополнительных членов. В частности, для расчета крупномасштабных атмосферных и океанических задач следует

принимать во внимание эффекты, определяемые планетарным вращением. Наличие хорошо разработанного и апробированного численного аппарата вкупе с многократно протестированной программной реализацией сделало особенно привлекательным сведение решения задачи о вращающейся мелкой воде над ровной подстилающей поверхностью к решению задачи о течениях мелкой воды над комплексной нестационарной границей. Представление силы Кориолиса фиктивной нестационарной границей создает важные преимущества при моделировании течений на неровной границе, сводя задачу к моделированию течений мелкой воды над нестационарной эффективной поверхностью. Однако применение такого представления в расщепляющихся численных методах затрудняется отсутствием одномерной постановки задач для вращающейся жидкости. Формальная постановка одномерной задачи, определяемой отказом от частных производных по одному из пространственных направлений, делает особенно актуальным нахождение горизонтальной неоднородности трансверсальной составляющей вектора скорости, определяющей консервативность силы Кориолиса, в зависимости от вертикальной структуры течения.

Гидродинамика гетерогенных систем – обширная область современной науки. Описание различных природных процессов связано с гетерогенными системами как со сложными смесями, компоненты которых имеют разные физико-механические свойства. На сегодняшний день такие системы встречаются даже чаще нежели обычные гомогенные. Важное практическое значение имеют задачи определения динамики пылевых облаков в атмосфере и их взаимодействия с подстилающей поверхностью. Наличие твердой примеси в погранслое атмосферы в корне меняет радиационный баланс в силу изменения прозрачности воздушных масс, что, в свою очередь, обуславливает изменение всей гидродинамики атмосферных потоков и ведет к созданию новых течений. Особую роль в динамике атмосферных потоков играет орография. Наличие изменений в геометрии подстилающей поверхности может принципиально изменить картину течения. Компактно распространяющаяся дисперсная фаза, занимающая односвязную область, может перейти в многосвязный режим либо сильно изменить размеры и геометрию области, занимаемой твердыми частицами.

В последнее время большое внимание уделяется проблемам возникновения структур в неравновесных средах. Особый интерес вызывают крупномасштабные вихри, возникающие в турбулентной жидкости, - когерентные структуры. Такие структуры наблюдаются экспериментально. Когерентные структуры наблюдаются также и в природных условиях: вихри Россби в атмосфере Земли и Юпитера, тропические циклоны. При изучении явления турбулентности важную

роль играет модель однородной изотропной и стационарной турбулентности. Возникает вопрос, может ли такая турбулентность усиливать крупномасштабные возмущения. В магнитной гидродинамике развита теория усиления и поддержания магнитных полей мелкомасштабной турбулентностью. Краузе и Рэдлер показали, что исходно однородная, изотропная и зеркально-симметричная турбулентность не может усиливать крупномасштабные магнитные поля. Однако, если зеркальная симметрия турбулентности нарушена, то такая среда может усиливать крупномасштабное магнитное поле. Это явление получило название магнитного динамо. Простейший пример нарушения зеркальной симметрии представляет собой поле скоростей, в котором величина средней спиральности отлична от нуля. Такое турбулентное поле скоростей характерно тем, что правовинтовые и левовинтовые вихри наблюдаются с разной вероятностью, то есть вихрей одного знака больше, чем другого.

Хорошо известно, что уравнение для завихренности подобно уравнению индукции магнитного поля. Поэтому вполне естественно желание изучать эволюцию крупномасштабных вихревых возмущений, тем более что существование инварианта спиральности в невязкой гидродинамике обеспечивает ограничение потока энергии от крупных масштабов к меньшим. Однако, несмотря на отмеченную выше аналогию между уравнением для завихренности и индукции магнитного поля, Краузе и Рюдигер в корреляционном приближении второго порядка исследовали напряжения Рейнольдса для случая однородной изотропной и спиральной турбулентности и показали, что в усредненных уравнениях мелкомасштабная турбулентность модифицирует вязкость. Этот результат - следствие симметрии напряжений Рейнольдса в несжимаемой жидкости.

Важнейшей особенностью турбулентности в космических условиях является наличие в ней случайных магнитных полей наряду со случайными значениями скорости. Для таких течений существенную роль играют эффекты нелинейности, вязкости, диффузии, сжимаемости, поэтому численное моделирование сжимаемой МГД служит важным инструментом для исследования заряженной жидкости в таких МГД-течениях. К тому же, плазма в космических условиях, как правило, не доступна для непосредственного экспериментального изучения.

Наиболее подробную информацию о турбулентном течении жидкости можно получить с помощью прямого численного моделирования - DNS (Direct numerical simulation), которое заключается в численном решении полной нестационарной системы магнитогидродинамических уравнений. При таком подходе разрешаются все масштабы движения заряженной жидкости. Метод DNS не требует специальных замыканий для уравнений магнитной гидродинамики. Прямой численный расчет МГД-турбулентности сталкивается с

принципиальными трудностями, связанными с большими гидродинамическими и магнитными числами Рейнольдса, которые характерны для исследуемых процессов, так как в этом случае число степеней свободы турбулентного движения велико и минимальное количество узлов на численной сетке должно быть столь большим, что ограничивает применение прямого численного моделирования для изучения турбулентных течений с реальными характерными числами Рейнольдса.

В методе крупных вихрей – LES (Large Eddy Simulation) используется операция фильтрации для разложения характеристик турбулентного движения на крупномасштабную и мелкомасштабную части, что связано с изотропностью, однородностью и универсальностью мелких масштабов турбулентного движения. Мелкомасштабное движение исключается из исходной системы уравнений движения с применением процедуры фильтрации и дальше их влияние на движение моделируется с использованием подсеточных моделей SGS (subgrid scale) (или, другое название, SFS (subfilter scale)), выраженных через отфильтрованные параметры турбулентных течений. Крупномасштабное движение рассчитывается из решения отфильтрованных нестационарных уравнений магнитной гидродинамики. LES является методом для моделирования течений с большими числами Рейнольдса, так как в методе крупных вихрей предполагается, что энергия переносится от больших масштабов к малым только внутри инерционного интервала, поэтому число степеней свободы будет меньше, чем в методе DNS, следовательно, LES требует значительно меньших вычислительных затрат по сравнению с DNS.

Изначально метод крупных вихрей развивался для моделирования гидродинамической турбулентности нейтральной жидкости для изучения задач метеорологии и океанологии. Большая часть работ была выполнена для несжимаемых течений. Метод LES к течениям электропроводящей жидкости применялся и исследовался крайне мало. Все предыдущие работы в этом направлении ограничивались только рассмотрением несжимаемой жидкости для решения инженерных задач. Тем не менее, многие течения электропроводящей жидкости не могут быть описаны в рамках несжимаемой среды, а необходимо рассматривать уравнения сжимаемой жидкости в приближении политропного соотношения между плотностью и давлением или теплопроводящую жидкость с использованием уравнения энергии. Применение LES для сжимаемой теплопроводящей МГД-жидкости значительно усложняется из-за того, что нужно решать уравнение энергии, в котором появляются дополнительные слагаемые из-за наличия магнитного поля. К тому же, после фильтрации появляются добавочные подсеточные члены, требующие разработки теории для их параметризации.

Исследование сжимаемой турбулентности, как в гидродинамике нейтральной жидкости, так и в магнитогидродинамике, - трудная задача, поскольку не существует аналитической или приближенной теории таких явлений. Однако, несмотря на существенную роль сжимаемости в космической плазме, целый ряд наблюдений показывает воспроизведение колмогоровского спектра флуктуаций плотности. Для интерпретации таких наблюдений была использована асимптотическая теория "почти несжимаемой" (nearly incompressible) среды, которая описывает флуктуации плотности в гидродинамике нейтрального и магнитного газа в режиме переноса пассивного скаляра. Однако в силу ограничений метода прямого численного моделирования ранее не удавалось получить спектры плотности и кинетической энергии и показать их совпадения и реализацию пассивного режима для флуктуаций плотности в сжимаемой МГД-турбулентности на основе полной трехмерной системы уравнений магнитной гидродинамики.

Цель работы

Основной целью работы является теоретическое исследование и численное моделирование сложных гидродинамических течений жидкости и плазмы, содержащих турбулентность и разрывы. Решение данной проблемы включает: разработку упрощенных исходных моделей, привлечение новых теоретических идей и разработку новых методов численного моделирования.

В соответствии с поставленной целью в работе решаются следующие задачи:

1. Изучить точные нелинейные решения уравнений мелкой воды над неровной поверхностью и над наклонным дном. Обобщить классическую теорию мелкой воды на случай неоднородных потоков.
2. Разработать теорию для течений мелкой воды на ступенчатой границе, найти решение задачи Римана для течений мелкой воды с учетом диссипации кинетической энергии на ступеньке. Исследовать возможность формирования стационарной зоны вблизи ступенчатой границы и проверить полученное решение на автомодельность. Построить на основе найденного решения задачи Римана численный алгоритм для исследования гидродинамических течений тяжелой невязкой жидкости со свободной поверхностью над сложным профилем дна.
3. Разработать конечно-разностное представление силы Кориолиса в моделях вращающейся мелкой воды и разработать численный метод расчета течений вращающейся мелкой воды над неоднородными подстилающими поверхностями. Провести численное исследование течения вращающейся жидкости над подстилающей поверхностью параболического профиля. Разработать алгоритм для решения

уравнений мелкой воды с источником членом произвольной природы.

4. Исследовать влияние гетерогенности среды, наличия сдвигов поля скорости, распространения звуковых волн на свойства однородных турбулентных течений. Провести теоретическое исследование взаимодействия средних полей для перечисленных сложных течений. Исследовать возможность моделирования переноса твердых примесей ветровым потоком над сложной границей с препятствиями на основе невязких уравнений.
5. Разработать метод крупных вихрей для исследования сжимаемой магнитогидродинамической турбулентности политропной и теплопроводящей плазмы. Расширить параметризацию подсеточных явлений на случай присутствия эффектов сжимаемости и магнитного поля. Исследовать применимость различных подсеточных параметризаций для различных параметров подобия. Разработать метод крупных вихрей для теплопроводящей плазмы в сжимаемой МГД-турбулентности и разработать теорию принципиально новых подсеточных слагаемых, возникающих в методе крупных вихрей из-за присутствия магнитного поля и флуктуаций температуры.
6. Осуществить численное моделирование методом крупных вихрей затухающей сжимаемой МГД-турбулентности в политропном газе и теплопроводящей плазме. Сравнить результаты моделирования метода крупных вихрей с результатами, полученными методом прямого численного моделирования. Исследовать спектры флуктуаций плотности и энергии в сжимаемой магнитогидродинамической турбулентной плазме для политропного уравнения состояния. Показать возможность существования режима слабосжимаемых турбулентных пульсаций, когда флуктуации плотности являются пассивным скаляром. Исследовать свойства анизотропии сжимаемой турбулентности и намагниченности плазмы в слабосжимаемом режиме.

Научная новизна

Разработана теория для исследования гидродинамических течений тяжелой невязкой жидкости со свободной поверхностью над неоднородным профилем дна, учитывающая вертикальную неоднородность поля скорости. Решена задача Римана для течений мелкой воды над ступенчатой границей. Впервые в результате качественного учета диссипации поступательной механической энергии как функции крупномасштабных характеристик потока класс полученных решений был расширен решениями, содержащими волны разряжения, проходящие через ступенчатую границу или примыкающие к ней. Классическая теория мелкой воды обобщена на случай неоднородных

потоков. Найдены аналитические решения для уравнений мелкой воды над наклонной плоскостью и неоднородных потоков.

Разработан новый численный алгоритм, позволяющий вести сквозной расчет гидродинамических течений над сложной подстилающей поверхностью без специального выделения зон обмеления для нестационарной многосвязной расчетной области. Для расчета течений мелкой воды над произвольной поверхностью в присутствии силы Кориолиса разработан модернизированный метод Годунова, основанный на квазидвухслойном представлении. В отличие от известных методов расчета течений вращающейся мелкой воды предложенный метод адаптируется к значению текущих параметров течения.

Построена теоретическая модель, описывающая крупномасштабную неустойчивость мелкомасштабной турбулентности в несжимаемой жидкости с твердыми частицами, с осциллирующими пузырьками газа и для однородного сдвигового течения. Предсказана возможность обратного каскада энергии в перечисленных течениях. Показана возможность трансформации звуковых волн турбулентностью в вихревые течения. Предложена физическая модель переноса твердой примеси ветровым потоком в областях над сложной границей с препятствиями.

В диссертационной работе впервые метод крупных вихрей сформулирован и реализован для изучения сжимаемых турбулентных течений космической плазмы, как в случае политропного газа, так и для теплопроводящей плазмы в магнитогидродинамическом приближении. Применение этого метода к изучению космической плазмы позволило впервые продемонстрировать наличие нетривиального режима, при котором спектры флуктуаций плотности воспроизводят спектры кинетической энергии турбулентности, и сделать вывод о режиме пассивного переноса плотности в сжимаемой магнитогидродинамической турбулентности, а также изучить временную динамику намагниченности плазмы и свойств анизотропии. Эти результаты позволили подтвердить гипотезы относительно спектров флуктуаций турбулентности локального межзвездного газа.

Практическая и научная ценность работы

Полученные теоретические результаты для течений мелкой воды над неровным дном являются основой для объяснения целого ряда атмосферных и океанических течений в поле силы тяжести. Частные аналитические решения и решение начальной задачи Римана для уравнений мелкой воды над наклонным дном позволяют исследовать эффективность численных методов типа распада разрыва для

предсказания нелинейной динамики таких течений. Полученные аналитические решения типа «простых волн» позволяют сделать выводы о динамике распространения тяжелых газовых облаков в атмосфере. Разработанная в диссертации квазидвухслойная теория мелкой воды и найденное на ее основе решение задачи Римана может быть использована для исследования нелинейных процессов в течениях тяжелой жидкости со свободной поверхностью на сложной границе, а также для разработки целого ряда численных алгоритмов годуновского типа. Найденное решение задачи Римана позволяет эффективно решать практические задачи о разрушениях дамб.

Полученные в диссертации результаты увеличивают потенциальные возможности для моделирования атмосферных и океанических течений и течений в береговых зонах. Разработанные численные модели течений мелкой воды на сложной подстилающей поверхности хорошо адаптируются к реальным границам и позволяют исследовать взаимодействие волн цунами с береговой линией, изучать распространение тяжелых газов в атмосферном пограничном слое. Предложенное в диссертации квазидвухслойное конечно-разностное представление силы Кориолиса и разработанный на ее основе численный метод моделирования крупномасштабных атмосферных и океанических течений может быть использован для изучения задачи геострофической адаптации на неоднородной границе, для исследования геофизических течений на границе с произвольной топографией. Разработанный алгоритм расчета течений вращающейся мелкой воды может быть использован для построения других численных методов, отражающих консервативность силы Кориолиса.

Построенные теоретические модели, описывающие крупномасштабные неустойчивости мелкомасштабной турбулентности в несжимаемой жидкости с твердыми частицами, с осциллирующими пузырьками газа и для однородного сдвигового течения могут быть использованы для разработки нетривиальных параметризаций турбулентности в крупномасштабных моделях атмосферы и океана. Явление трансформации звуковых волн турбулентностью в вихревые течения может быть использовано для разработки методов диагностики атмосфер и океана. Предложенная физическая модель переноса твердой примеси ветровым потоком в областях над сложной границей с препятствиями может быть использована для исследования качества атмосферы в городской местности.

Полученные в диссертации результаты увеличивают потенциальные возможности для моделирования сжимаемых МГД-течений, поскольку предложенный метод крупных вихрей позволяет исследовать турбулентные течения с существенно более высокими числами Рейнольдса, что особенно важно для проблем космической плазмы. В работе определены наилучшие подсеточные модели при различных

числах подобия для моделирования сжимаемой политропной космической плазмы.

Предложенные новые параметризации подсеточных слагаемых для описания турбулентности теплопроводящей плазмы могут быть использованы для изучения процессов в различных инженерных течениях, например, возможность управления пограничным слоем и снижение сопротивления потоку, магнитогидродинамические течения в каналах, в процессах отливки стали и в трубах для охлаждения термоядерных реакторов. Результаты исследований слабосжимаемого режима МГД-турбулентности объяснили имеющиеся данные наблюдений межзвездного газа и могут быть использованы для планирования их новых наблюдений в космических проектах.

Результаты могут найти применение в исследованиях атмосферы Земли и других планет, ведущихся в ИКИ РАН, ИПМ РАН, ФИ РАН, ИО РАН, ИФЗ РАН, ИФА РАН, ИВМ РАН, ИНАС РАН, ИЗМИР РАН, ИАЭ им. Курчатова, ИГ СО РАН, НИРФИ, МИФИ, МФТИ, МГУ, ИТЭС ОИВТ РАН.

Обоснованность и достоверность полученных результатов

Достоверность полученных в диссертационной работе результатов исследования течений мелкой воды обеспечивается использованием строгих математических методов анализа гиперболических уравнений в частных производных, а также сравнением с результатами известных численных и точных решений течений мелкой воды над подстилающими поверхностями сложного профиля. Достоверность результатов расчетов вращающейся мелкой воды обеспечивается сравнением с данными геофизических исследований и качественным согласием с представлениями геофизической гидродинамики.

Обоснованность полученных результатов для сложных турбулентных течений подтверждается тем, что при выводе усредненных уравнений для крупномасштабных полей использовалось корреляционное приближение второго порядка, хорошо зарекомендовавшее себя в задачах генерации крупномасштабных магнитных полей. Достоверность результатов расчетов переноса примеси вблизи поверхности планеты обеспечивается доказанностью устойчивости использованной разностной схемы, а также соответствием с имеющимися данными лабораторных и натуральных экспериментов.

Достоверность полученных в диссертационной работе результатов исследования сжимаемой МГД-турбулентности обеспечивается сравнением результатов, полученных методом крупных вихрей, с результатами исследования сжимаемой МГД-турбулентности методом прямого численного моделирования, применением хорошо обоснованных численных методов, устойчивостью и сходимостью использованных разностных схем. Достоверность результатов

исследования слабосжимаемого режима МГД-турбулентности обеспечивается сравнением с имеющимися данными наблюдений и приближенными теориями.

Положения, выносимые на защиту

1. Показано, что обобщение частных автомодельных решений уравнений мелкой воды над ровным дном на случай неоднородной границы имеет место только для тех типов поверхностей, для которых существует решение типа «простой волны», а именно, для наклонной плоскости. Найдены все частные автомодельные решения уравнений Сен-Венана и показано, что характеристики уравнений мелкой воды на наклонной плоскости являются семейством парабол, имеющих точку касания 2-го порядка с соответствующими характеристиками классических уравнений мелкой воды над ровным дном. Решена задача о распаде произвольного разрыва для уравнений Сен-Венана на наклонной плоскости. Найденное решение описывает новые физические явления, определяемые дополнительной скатывающей силой. Для течений мелкой воды на ровной поверхности при наличии слабых вертикальных неоднородностей начальных условий предложены модифицированные уравнения мелкой воды, найден новый безразмерный параметр, ограничивающий пределы применимости классических уравнений мелкой воды. Найдено решение задачи Римана для модифицированных уравнений мелкой воды. Показано, что учет вертикальных неоднородностей исключает зону вакуума из конфигураций, реализуемых для классических уравнений мелкой воды.

2. Решена задача о стационарном обтекании ступеньки потоком жидкости в приближении мелкой воды. Показано, что ограничения, накладываемые условием односвязности области, занимаемой жидкостью около ступеньки, определяют характер возможных течений. Установлена связь найденных ограничений с направлением потока жидкости, и определены характеристики задачи, обусловленные отношением глубины потока к высоте ступеньки. Получены аналитические выражения для ограничений значений гидродинамических параметров течения в каждом режиме. Выявлена неоднозначность решения при сверхзвуковом стационарном обтекании ступенчатой границы, обусловленная пренебрежением адвективным переносом импульса вблизи резко меняющейся подстилающей поверхности.

3. Разработана теория для течений мелкой воды на ступенчатой границе, учитывающая вертикальную неоднородность поля скорости, основанная на выделении области жидкости, в которой происходит задержание потока массы. Разработана квазидвухслойная модель для определения этой области в каждый момент времени и нахождения

гидродинамических параметров исходного течения. Решена задача Римана для течений мелкой воды на ступенчатой границе на основе квазидвухслойной модели. Показано, что реализуется автомодельный режим течения распада произвольного разрыва со стационарным скачком вблизи уступа. Полученные решения расширяют класс аналитически допустимых включением конфигураций, связанных с прохождением волны разрежения через уступ. Предложен численный метод для исследования гидродинамических течений тяжелой невязкой жидкости со свободной поверхностью над произвольным профилем дна, основанный на найденных решениях задачи Римана.

4. Разработано квазидвухслойное представление течений вращающейся мелкой воды, описывающее силу Кориолиса в численных методах годуновского типа. Определена структура вертикальной неоднородности течения под влиянием силы Кориолиса, представленной фиктивной подстилающей поверхностью. Построена качественная интерпретация нелинейных процессов, вызванных таким представлением, и найдена соответствующая ей горизонтальная неоднородность трансверсальной составляющей скорости, определяющая консервативность силы Кориолиса. Предложен численный алгоритм для изучения течений вращающейся мелкой воды для произвольной подстилающей поверхности. Осуществлено численное моделирование крупномасштабного течения атмосферы над подстилающей поверхностью параболического профиля и получено качественное согласие с представлениями геофизической гидродинамики. Предложенный алгоритм обобщен на случай произвольной внешней силы.

5. Выявлены нетривиальные режимы турбулентных течений при наличии многофазности, сдвигов и распространения звуковых волн. Показано, что при распространении звуковых волн в турбулентной среде возможна их трансформация в вихревые движения, наведенные вихревые движения обладают свойствами гиротропности, если спиральность рассеивающей звук турбулентности отлична от нуля. Для однородного турбулентного сдвигового течения с ненулевой спиральностью показана возможность обратного каскада энергии. Разработана теория среднего поля для многофазной среды, показано, что в несжимаемой жидкости с невмороженными твердыми частицами и в жидкости с осциллирующими пузырьками газа возможно усиление крупномасштабных вихревых возмущений исходно однородной, изотропной и спиральной турбулентностью. Предложена модель переноса твердых частиц течением атмосферы над сложной границей с препятствиями на основе решения уравнений идеального газа с переменным уравнением состояния конечно-объемными численными методами. Показано, что наличие двух механизмов схемной вязкости разработанного алгоритма, а именно, наличие неоднородностей

поверхности и градиентов концентраций твердой примеси, позволяет воспроизвести динамику обтекания препятствий атмосферным течением с примесью.

6. Сформулирован метод крупных вихрей для исследования сжимаемой МГД-турбулентности политропной и теплопроводящей плазмы. Показано, что в случае политропной плазмы подсеточные модели получаются комбинацией и обобщением известных подсеточных слагаемых в гидродинамике сжимаемой нейтральной жидкости и несжимаемой магнитной жидкости. Предложена теория подсеточных турбулентных течений в теплопроводящей плазме для новых подсеточных слагаемых, возникающих из-за наличия магнитного поля в уравнении полной энергии. Показано, что расширенная модель Смагоринского и модель, основанная на перекрестной спиральности магнитного поля и скорости, обеспечивают наиболее точные численные результаты при моделировании турбулентности политропного газа. Проведено моделирование сжимаемой МГД-турбулентности теплопроводящей плазмы при различных числах Маха и показана применимость метода крупных вихрей при малых и умеренных числах Маха.

7. Исследована трехмерная динамика флуктуаций плотности в космической плазме методом крупных вихрей. Установлено, что существует режим, в котором исходно сильно сжимаемые флуктуации становятся слабосжимаемыми и спектр флуктуаций плотности воспроизводит спектр кинетической энергии. Это соответствует тому, что флуктуации плотности переносятся магнитогидродинамическим течением в режиме пассивной примеси. Исследованы свойства полученных спектров энергии со временем. Установлено, что со временем уменьшаются энергосодержащие крупные масштабы турбулентности, амплитуда спектров также ослабевает. Показано, что увеличивается диссипативный интервал в энергетическом каскаде и уменьшается инерционный интервал. Исследованы свойства анизотропии МГД-турбулентности космической плазмы в слабосжимаемом режиме. Показано, что крупномасштабное магнитогидродинамическое течение является анизотропным, а мелкомасштабное – изотропным.

Апробация работы

Основные положения диссертационной работы и полученные результаты докладывались на российских и международных конференциях и симпозиумах: Всесоюзной научной конференции по нелинейным явлениям, Звенигород, 1989; Всесоюзной школе-семинаре по нелинейной математической физике, Светлогорск, 1989; XLII научной

конференции МФТИ «Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук» - 1999; Международной конференции МСС-04 «Трансформация волн, когерентные структуры и турбулентность». Москва, 2004; XLVII научной конференции МФТИ «Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук. Часть VIII. Физика и энергетика». Москва, 2004; XLVIII научной конференции МФТИ «Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук. Часть VIII. Физика и энергетика». Москва, 2005; XVI Научная сессия Совета РАН по нелинейной динамике. Москва, 2007; XVII Научная сессия Совета РАН по нелинейной динамике. Москва, 2008; Международная конференция «Современные проблемы газовой и волновой динамики», Москва, 2009; Международная конференция «Потоки и структуры в жидкостях: физика геосфер», Москва 2009; Kiev International Workshop on Non-linear and Turbulent Processes in Physics. 1989; International Symposium "Generation of large-scale structures in continuous media", Perm-Moscow, 1990; 1-st Liquid Matter Conference, Lyon , 1990; 4-st European Turbulence Conference, Delft , 1992; IUTAM Symposium " Eddy Structures Identification in Free Turbulent Shear flows, Poitiers, 1992; COSPAR assembly, Hamburg, 1994; EGS Assembly, Hamburg, 1995; ESA workshop on MARS, Capri, 1995; ERCOFTAC workshop on "Compressible turbulence". Chatillon sous Bagneux, France, 1995; EGS Assembly, the Hague, 1996; EUROMECH colloquium, Flow Control, Berlin, 1997; EGS Assembly, Vienna, 1997; 2nd Int. Symposium on Turbulence, Heat and Mass transfer, Delft, 1997; EUROMECH colloquium on Statistics and Dynamics of Vorticity, Marseille, 1997; European Fluid Mechanics Conference, Gettingen, 1997; EGS Assembly, Nice, 1998; International Conference on Air Pollution Modeling, Champs-sur-Marne, 1998; International Conference on Control in Fluid Dynamics, Cachan, France, 1998; EGS Assembly, Den Haag, 1999; International Conference " Systems Sciences 2000 ", Osnabruek, 2000; EGS Assembly, Nice, 2000; 8-th European Turbulence Conference, Barcelona, 2000; EGS Assembly, Nice, 2001; Second International Conference on Air Pollution Modelling, Champs-sur-Marne, 2001; Climate Conference 2001, Utrecht, 2001; EUROMRCH colloquium, Strongly Coupled Multiphase Flows, Grenoble, 2001; EGS Assembly, Nice, 2002; EGS-AGU-EGU Assembly, Nice, 2003; EGU Assembly, Nice, 2004; EGU Assembly, Vienna, 2005; EMS meeting, Utrecht, 2005; EGU Assembly, Vienna, 2006; NATO Advanced Research Workshop on "Atmospheric Boundary Layers: Modeling and Applications for Environmental Security", Dubravnik, 2006; Workshop on Environmental fluid mechanics as elements in agro meteorological modeling, As, Norway, 2006; International Conference " Turbulence and Interactions", Porquerolles, France, 2006; International Conference "Mathematical Hydrodynamics", Moscow, 2006; IUTAM Symposium " Hamiltonian Dynamics, Vortex Structures, Turbulence", Moscow, 2006; EGU Assembly, Vienna, 2007; 8th International School/Symposium for Space Simulations

(ISSS-8), Kauai, USA, 2007; EMS meeting, SanLorenzo, Spain, 2007; International Symposium on “ Environmental Hydraulics, Tempe, Arizona, 2007; EGU Assembly, Vienna, 2008; EUROMECH Colloquium on “ Mixing of Coastal , Estuarine and Riverine Shallow Flows”, Ancona, Italy, 2008; Lecture Series 2008-06 Atmospheric boundary layer flows in air pollution modelling. Von Karman Institut for fluid dynamics, Rhode Saint Genese - Belgium; ERCOFTAC workshop “Direct and Large Eddy Simulations 7”, Trieste, Italy, 2008; International conference “Meso-scale Meteorology and Air Pollution” Odessa, Ukraine, 2008; EUROMECH Fluid Mechanics Conference, Manchester, UK, 2008; EMS meeting, Amsterdam 2008; EGU Assembly, Vienna 2009.

Публикации по теме диссертации

Основные результаты работы опубликованы в 21 статье в реферируемых российских и международных журналах, в 5 статьях, опубликованных в рецензируемых трудах российских и международных конференций. Результаты работы представлены в 45 тезисах докладов российских и международных конференций.

Личный вклад автора

Все результаты, представленные в диссертационной работе, получены при определяющем участии диссертанта. Автором осуществлялись: физические и математические постановки всех задач, вошедших в диссертационную работу, проводились теоретические исследования, разрабатывались численные алгоритмы. Автор принимал участие в проведении численных исследований и в сравнении результатов моделирования с данными наблюдений.

Структура и объем диссертации

Диссертационная работа состоит из введения, шести глав, заключения и списка цитированной литературы. Объем диссертации – 371 страница. Библиография включает 297 наименований. Диссертация содержит 157 рисунков, 2 таблицы.

Содержание работы

Во введении обсуждается современное состояние теоретических и численных исследований разрывных и турбулентных течений в

гидродинамике плазмы и в жидкости со свободной границей, обосновывается актуальность и сформулированы цели работы, дается обзор литературы, приведены сведения о научной новизне, практической и научной ценности, личном вкладе автора, сформулированы положения, выносимые на защиту, и приведены сведения о структуре диссертации.

В первой главе диссертации исследуются течения мелкой воды над неоднородной поверхностью, найдены и исследованы частные решения одномерной системы уравнений мелкой воды на наклонной плоскости, известной как частный случай уравнения Сен-Венана.

Хорошо известные классические уравнения мелкой воды, описывающие течения несжимаемой жидкости со свободной поверхностью в поле силы тяжести на горизонтальной однородной плоскости, с точностью до обозначений совпадают с уравнениями для политропного газа с показателем адиабаты, равным двум. Однако указанная аналогия полностью распространяется только на непрерывные решения классических уравнений мелкой воды на ровной границе. В силу отличий в постановке условий на поверхностях разрыва, разрывные решения уравнений мелкой воды и газодинамических уравнений существенно отличаются. Чтобы проиллюстрировать данные отличия, достаточно заметить, что решение типа контактного разрыва, являющееся для уравнений газовой динамики одним из основных и регулярно используемых при построении общих решений конкретных задач, не имеет места для классических уравнений мелкой воды. Уравнения Сен-Венана имеют ряд отличий от соответствующих газодинамических уравнений, не только в области разрывного течения, в силу отсутствия для таких областей газодинамической аналогии, но и в областях непрерывного течения, в силу учета неоднородности подстилающей поверхности.

В разделе 1.2 показано, что обобщение элементарных частных решений классических уравнений мелкой воды возможно на случай неоднородной поверхности только для единственного класса подстилающих поверхностей, для которого существует решение типа простой волны Римана. Указанный класс подстилающих поверхностей состоит из плоскостей с различным углом наклона. Найдено, что решение типа простой волны для уравнений Сен-Венана в общем случае не существует, вследствие чего основное внимание уделено решениям соответствующей системы уравнений на наклонной плоскости.

В разделе 1.3 показано, что характеристики системы уравнений мелкой воды на наклонной плоскости являются семейством парабол, имеющих точку касания второго порядка с соответствующими характеристиками классической системы уравнений мелкой воды на горизонтальной плоскости. Это позволило оценить временной интервал,

для которого решение уравнений Сен-Венана на наклонной плоскости может быть приближено решениями классической системы уравнений мелкой воды, а также оценить величину отклонения найденных решений как функцию времени и тангенса угла наклона подстилающей плоскости.

Обнаружено, что простая волна сжатия может существовать только в ограниченном временном интервале, вне которого разрыв производных гидродинамических функций, определяющий такие решения, ведет к разрыву самих функций, так же как и в случае классических уравнений мелкой воды. Получен минимальный временной интервал, в течение которого две произвольные характеристики, принадлежащие одному семейству характеристик простой волны сжатия, пересекаются, переводя тем самым решения в класс разрывных функций. Обнаружено, что огибающая пересечения характеристик одного семейства также является параболой. Вследствие этого, в отличие от классического случая, сильные разрывы распространяются по параболической траектории с постоянным ускорением, определяемым углом наклона подстилающей поверхности, несмотря на то, что конечно-разностные соотношения на поверхностях разрыва не зависят от геометрии подстилающей поверхности. Полученные оценки позволяют определить пределы применимости классических уравнений мелкой воды к реальным течениям.

Найденные аналитические частные решения описывают новые физические эффекты, приносимые в динамику мелкой воды неоднородностью подстилающей поверхности. Особое внимание уделено поведению автомодельных решений, играющих ключевую роль в построении численных методов сквозного счета типа распада разрыва. Найденные решения позволили предъявить преобразование зависимых и независимых переменных, переводящее одномерные уравнения Сен-Венана в классические уравнения мелкой воды, а также указать достаточные условия существования данного преобразования. Указанное преобразование используется в разделе 1.4 для решения задачи Римана для уравнений мелкой воды на наклонной плоскости.

Использование преобразования зависимых и независимых переменных, полученного в разделе 1.3, позволило свести задачу для наклонной плоскости к решению соответствующей однородной системы уравнений мелкой воды на горизонтальной плоскости. Показано, что решение рассматриваемой задачи однозначно определяется начальными условиями, совпадающими с начальными условиями в классическом случае однородного, горизонтального дна. Обнаружено, что, несмотря на качественное соответствие всех конфигураций, реализующих решение указанной задачи для уравнений Сен-Венана на наклонной плоскости, конфигурациям, возникающим при решении классической системы уравнений мелкой воды, найденное решение описывает новые физические явления, обусловленные наличием

дополнительной скатывающей силы, действующей на жидкость. В силу того, что характеристики и траектории сильных разрывов в рассматриваемой системе являются параболами, области постоянного течения, имеющие место в решении задачи для классической системы, в данном случае исчезают, уступая место областям равноускоренного течения. Проанализированы условия, при которых решения обеих задач можно приближенно считать совпадающими.

В разделах 1.5-1.8 изучаются течения мелкой воды на ровной поверхности при наличии слабых вертикальных неоднородностей начальных условий. Приближение мелкой воды к полным уравнениям гидродинамики в этом случае содержит дополнительные члены, получаемые вследствие усреднения нелинейных слагаемых в исходных гидродинамических уравнениях, описывающие адвективный перенос импульса вследствие зависимости горизонтальных течений мелкой воды от вертикальной координаты. Как и во всякой сильно нелинейной системе уравнений, усредненные нелинейные слагаемые требуют параметризации, определяемой постановкой задачи. В разделе 1.5 предложена наиболее простая аппроксимация адвективного слагаемого модифицированных уравнений мелкой воды, допускающая теоретический анализ.

В разделе 1.6 получены основные частные решения для модифицированных уравнений мелкой воды проведен сравнительный анализ практически наиболее важных решений. Обнаружены качественно новые эффекты, существенно влияющие на область применимости полной газодинамической аналогии. Особое внимание уделено автомоделным решениям, играющим ключевую роль в методах численного расчета, заимствованных из газовой динамики. Это позволяет сформулировать и решить для такой системы классическую задачу о распаде произвольного разрыва.

В разделе 1.7 конструируется решение задачи Коши для уравнений мелкой воды с кусочно-постоянными начальными условиями. Показано, что учет вертикальных неоднородностей исключает одну из конфигураций, реализуемых для классических уравнений мелкой воды. В частности, в нашем случае отсутствует зона вакуума, характерная в классическом случае.

Во **второй главе** диссертации решается задача Римана для течений мелкой воды над ступенчатым профилем дна. Разделы 2.2 и 2.3 данной главы посвящены решению задачи о стационарном обтекании ступеньки потоком жидкости в приближении мелкой воды и исследованию ограничений, накладываемых условием односвязности области, занимаемой жидкостью около ступеньки, на характер возможных течений. Рассмотрены ограничения на возможные течения в зависимости от направления потока. Найдены все режимы течений, характеризующиеся отношением глубины потока к высоте ступеньки и

направлением потока. Получены аналитические выражения для ограничений значений гидродинамических параметров течения в каждом режиме. Выявлена неоднозначность решения при сверхзвуковом стационарном обтекании ступенчатой границы, обусловленная пренебрежением адвективным переносом импульса вблизи резко меняющейся подстилающей поверхности.

В разделе 2.4 предложена теория для течений мелкой воды на ступенчатой границе с учётом вертикальной неоднородности поля скорости, основанная на двухслойной аппроксимации уравнений Эйлера вблизи ступенчатой границы. Идея квазидвухслойной модели состоит в разбиении потока жидкости или газа на два слоя, так что для верхнего, с параметрами потока h_2 и u_2 , влияние ступенчатой границы, высоты a косвенно, а для нижнего, с параметрами потока h_1 и u_1 , ступенчатая граница влияет непосредственно, останавливая перенос массы в этом слое. Система уравнений для двухслойной мелкой воды выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{\partial h_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(h_1 u_1) = 0, \\ \frac{\partial h_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(h_2 u_2) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(h_1 u_1) + \frac{\partial}{\partial x}(h_1 u_1^2 + \frac{1}{2} g h_1^2) + g h_1 \frac{\partial h_2}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(h_2 u_2) + \frac{\partial}{\partial x}(h_2 u_2^2 + \frac{1}{2} g h_2^2) + g h_2 \frac{\partial h_1}{\partial x} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Ступенчатая граница полностью тормозит нижний слой: $u_1 = 0$, при $x = 0$, $t \geq 0$. Условия Коши для системы (1) имеют вид: $h_1 = h^*$, $h_2 = h_1 - h^*$, $u_1 = u_l$, $u_2 = u_l$ при $x \leq 0$; $h_2 = h_r$, $u_2 = u_r$ при $x > 0$.

Предположение о том, что формирование волновой картины в нижнем слое происходит много быстрее, чем в верхнем, позволяет разделить поток на слои так, что нижний слой, взаимодействуя со ступенчатой границей, приходит в состояние покоя и образует с ней единую горизонтальную плоскость. Тогда возможно пренебречь членом $g h_1 \frac{\partial h_2}{\partial x}$ в третьем уравнении системы (1) и, выбирая временной шаг так, что верхний слой не успеет оказать существенного влияния на нижний, пренебречь членом $g h_2 \frac{\partial h_1}{\partial x}$. Следовательно, система (1) распадается на две подсистемы, а переменные h_1 и u_1 вычисляются

независимо от переменных h_2 и u_2 . Таким образом, влияние нижнего слоя на верхний будет осуществляться за счет изменения начальных условий, в частности условия $h_2 = h_1 - h^*$ при $x \leq 0$, определяемого изменением глубины нижнего слоя при торможении потока.

В результате пара параметров h_1 и u_1 связывается с параметрами h_2 и u_2 через начальный параметр h^* . Следовательно, проблема нахождения значения h^* сводится к решению обратной задачи Дирихле:

$$\begin{cases} \frac{\partial h_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(h_1 u_1) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(h_1 u_1) + \frac{\partial}{\partial x}(h_1 u_1^2 + \frac{1}{2} g h_1^2) = 0, \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} h_1 &= h^* \text{ при } x < 0, t = 0; & u_1 &= u_l \text{ при } x \leq 0, t = 0; \\ u_1 &= 0 \text{ при } x = 0, t \geq 0; & h_1 &= a \text{ при } x = 0, t \geq 0. \end{aligned}$$

Решение системы (2) зависит от направления течения жидкости, то есть скорости u_l :

а) $u_l > 0$, картина течения имеет вид отраженной влево ударной волны, слева от которой параметры потока h^* и $u_l > 0$, а справа жидкость покоится, то есть $h = a$ и $u = 0$, и глубина запираания, определяемая влиянием ступенчатой границы, вычисляется следующим образом:

$$u_l = (a - h^*) \sqrt{\frac{g(a + h^*)}{2ah^*}}. \quad (3)$$

Решение определяется непосредственно из алгебраической формулы (3), вытекающей из соотношений Гюгонио на гидравлическом прыжке;

б) $u_l < 0$, картина течения имеет вид уходящей влево волны разрежения, слева от которой параметры потока h^* и $u_l < 0$, и справа так же $h = a$ и $u = 0$, следовательно, решение определяется из постоянства соответствующего инварианта Римана, описывающего волну разрежения:

$$h^* = \frac{1}{g} \left(\sqrt{ga} - \frac{1}{2} u_l \right)^2. \quad (4)$$

Выражение (4) в явном виде определяет глубину нижнего слоя, полностью останавливаемого влиянием ступенчатой границы.

Принципиально отличная ситуация будет складываться в случае, если h^* лежит вне интервала $(0, h_1]$. Физически это означает либо равенство нулю глубины $h^* = 0$ и, следовательно, отсутствие нижнего слоя, а вместе с ним и жидкости и/или изменения высоты подстилающей поверхности, либо в случае превышения $h^* > h_1$ соответствует полному торможению потока слева, то есть в такой ситуации фиктивная поверхность является непротекаемой границей для всей жидкости слева, и следовательно, необходимо принять $h_2 = 0$ при $x < 0$. Тогда значение h_1 при $x = 0$ может быть найдено как решение задачи о взаимодействии с непротекаемой границей всей жидкости, находящейся слева.

Найденное значение h^* позволяет вычислить значения потоковых величин как решение уже классической задачи Римана для параметров верхнего слоя над ровным дном с соответствующими начальными условиями. Предложенный метод адаптируется к параметрам потока и позволяет учитывать особенности течения жидкости в каждой точке пространства и в каждый момент времени.

Разработанная конечно-разностная схема для исследования течений мелкой воды над ступенчатой границей высоты a в одномерном случае выглядит следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} H_x^{t+1} = H_x^t + \tau \times \left(\frac{H_{x-1/2}^t U_{x-1/2}^t - H_{x+1/2}^t U_{x+1/2}^t}{X} \right), \\ U_x^{t+1} = \tau \times \left(\begin{array}{l} H_{x-1/2}^t (U_{x-1/2}^t)^2 + \frac{g(H_{x-1/2}^t)^2}{2} - \\ - H_{x+1/2}^t (U_{x+1/2}^t)^2 - \frac{g(H_{x+1/2}^t + i \times a)^2}{2} \end{array} \right) / XH_x^{t+1} + \frac{H_x^t U_x^t}{H_x^{t+1}}, \end{array} \right. \quad (5)$$

где τ - шаг по времени; X - шаг по пространству; H_x^t - глубина жидкости, U_x^t - скорость жидкости. Нижний индекс x - значение функции, отнесенное к центру масс ячейки с номером x . Полунижние индексы $x \pm 1/2$ - значения величин на границе между ячейками с номерами x и $x \pm 1$ соответственно. Верхний индекс t обозначает номер шага по времени.

Грань ячейки над ступенчатой границей состоит из двух частей: из части, аппроксимирующей ступенчатую границу, и оставшейся части, через которую осуществляется свободное течение жидкости. Формально, с точки зрения приближения мелкой воды, первая часть отсутствует, хотя для исходных уравнений Эйлера она фактически

является подстилающей поверхностью – границей, на которой выполнено условие непротекания. При выводе уравнений мелкой воды это условие учитывается в самом уравнении, что, очевидно, не изменяет природу взаимодействия подстилающей поверхности с потоком жидкости. Поэтому члены, отвечающие в разностной схеме за работу,

имеют вид: $\frac{g(H_{x-1/2}^t)^2}{2}$, $\frac{g(H_{x+1/2}^t + i \times a)^2}{2}$, где слагаемое $i \times a$ описывает

работу перепада высот подстилающей поверхности над потоком жидкости. Здесь i принимает значение либо 0 в случае отрицательного перепада высот подстилающей поверхности, либо $0 \leq i \leq 1$ в случае положительного перепада. Переменная i принимает значение равное 1, в случае, если H^* , определяемое соотношениями (3),(4) для соответствующей грани ячейки x , не превышает значения глубины внутри нее. В противном случае значение i на соответствующей грани является отношением глубины, формирующейся при полном торможении потока на указанной грани, к соответствующему перепаду высот подстилающей поверхности. Значения $H_{x\pm 1/2}^t$, $U_{x\pm 1/2}^t$ на гранях вычисляются путем решения соответствующих задач Римана, на основе квазидвухслойной модели.

В разделе 2.5 даны определения решений типа простых волн и ударных волн, приведена идея построения аналитического решения задачи Римана как для классической мелкой воды, так и для случая ступенчатой границы, и показаны возможные конфигурации течения при наличии ступеньки. Аналитическое решение задачи принципиально важно для анализа получаемых в разделе 2.6 численных решений.

С помощью разработанного квазидвухслойного метода в разделе 2.6 численно решена задача распада произвольного разрыва для уравнений мелкой воды на ступенчатой границе. Получены численные решения для всех возможных конфигураций, реализующихся, в предположении наличия стационарного перехода вблизи ступенчатой границы, при аналитическом подходе. Показано, что в результате качественного учета диссипации поступательной механической энергии вследствие турбулентности, как функции крупномасштабных характеристик потока, класс полученных решений расширяется вследствие волн разряжения, проходящих через ступеньку. Проведено сравнение с известными численными и точными решениями задачи Римана на ступенчатой границе.

В разделе 2.7 обсуждаются особенности аналитического подхода к решению задачи Римана и предложенной квазидвухслойной модели. Обнаружены автомодельность решений распада произвольного разрыва и наличие стационарного скачка вблизи ступенчатой границы.

Третья глава диссертации посвящена использованию квазидвухслойного подхода для численного моделирования течений

мелкой воды над сложной подстилающей поверхностью в присутствии внешних сил. В разделе 3.2 разработан метод для исследования течений тяжелой жидкости со свободной поверхностью над границей произвольной формы. Метод основан на аппроксимации произвольной границы ступенчатой поверхностью и использовании традиционного метода Годунова в областях однородной горизонтальной поверхности и квазидвухслойной модели в областях, примыкающих к вертикальным особенностям рельефа дна. Метод обеспечивает единообразие построения решения как в областях со сложной геометрией подстилающей поверхности, так и в областях ровного или наклонного дна, экономичность при работе с большими расчетными областями по пространству, учет диссипации поступательной кинетической энергии за счет возникающей у ступеньки турбулентности и возможность добавления разнообразных стоков, массовых источников, трения.

Работоспособность метода проверена на основе решений нескольких классов гидродинамических задач, определяемых особенностями подстилающих поверхностей в разделе 3.3. В частности промоделирована и сопоставлена с аналитическим решением задача распада столба жидкости над наклонной затопленной плоскостью, аппроксимируемой системой уступов. Показано соответствие численных результатов решения задачи распада столба жидкости над наклонной затопленной плоскостью, аппроксимируемой множеством ступенек, результатам расчета, использующего точное решение стандартной задачи Римана с последующей заменой переменных.

Осуществлен численный эксперимент по натеканию гидродинамического прыжка на наклонный берег, аппроксимируемый ступеньками (в природе данная ситуация аналогична натеканию волны цунами на прибрежную зону). Получено, что при прохождении гидродинамического прыжка через наклонный берег наблюдается небольшое увеличение интенсивности прыжка и значительное увеличение скорости, что соответствует численным результатам, полученным в других работах.

В разделе 3.4 предложено конечно-разностное представление, описывающее силу Кориолиса в численных методах годуновского типа для течений вращающейся мелкой воды. Влияние силы Кориолиса описано введением фиктивной нестационарной границы. Построена качественная интерпретация нелинейных процессов, вызванных таким представлением. Проведен анализ границы применимости данного подхода в общем, для расщепляющихся разностных схем. Главная проблема при построении расщепляющейся разностной схемы состоит в необходимости постановки и решения одномерной задачи, не имеющей физического эквивалента для конечных временных интервалов. К сожалению, наиболее очевидный путь пренебрежения одной из пространственных координат не решает полностью проблемы.

Действительно, отказ от одной из пространственных переменных при решении существенно двумерной задачи приводит к нарушению закона сохранения импульса, что, в свою очередь, обуславливает необходимость введения некоторой фиктивной работы для компенсации указанных нарушений, несмотря на всю нефизичность такой компенсации.

В разделах 3.5 и 3.7 предложены конечно-разностные схемы для моделирования вращающихся течений, как на ровной подстилающей поверхности, так и для подстилающей поверхности произвольного профиля. Для численной аппроксимации источниковых слагаемых применена квазидвухслойная модель течения жидкости над ступенчатой границей, учитывающая гидродинамические особенности течения. Осуществлен сравнительный анализ с известными конечно-разностными схемами, описывающими вращение и неоднородность профиля дна.

В разделе 3.6 работоспособность метода подтверждена проведенным численным экспериментом по моделированию классической задачи геострофической адаптации, известной как задача Россби. Наблюдается хорошее совпадение характерных пиков разбегающихся акустико-гравитационных волн и центральной уравновешенной части с известными геофизическими данными, что свидетельствует об эффективности использования квазидвухслойной модели при описании крупномасштабных геофизических явлений.

Проведено сравнение величин потенциальной завихренности в начальный и конечный моменты времени для классической задачи Россби. Выявлено сохранение инварианта Q - потенциального вихря, со временем. Получено, что максимум функции сдвигается в антициклонную область, а минимум потенциальной завихренности со временем увеличивается. Данные результаты, определяются чисто нелинейными эффектами и хорошо согласуются с известными данными геофизических исследований.

Также осуществлен расчет вращающейся мелкой воды над подстилающей поверхностью параболического профиля. Получено качественное согласие с представлениями геофизической гидродинамики.

Разработанный квазидвухслойный метод обобщен в разделе 3.8 на случай исследования течений мелкой воды над неоднородным профилем дна в присутствии произвольной внешней силы. Проведено численное моделирование и выполнено сравнение с лабораторными экспериментами по изучению разрушения двумерной дамбы над наклонной подстилающей поверхностью с учетом гидравлического трения. На рис. 1 показана динамика глубины жидкости в различных контрольных точках: полученная экспериментально – сплошная серая

линия; численно на основе WAF - метода – прерывная линия; сплошная черная линия – на основе предложенного квазидвухслойного метода.

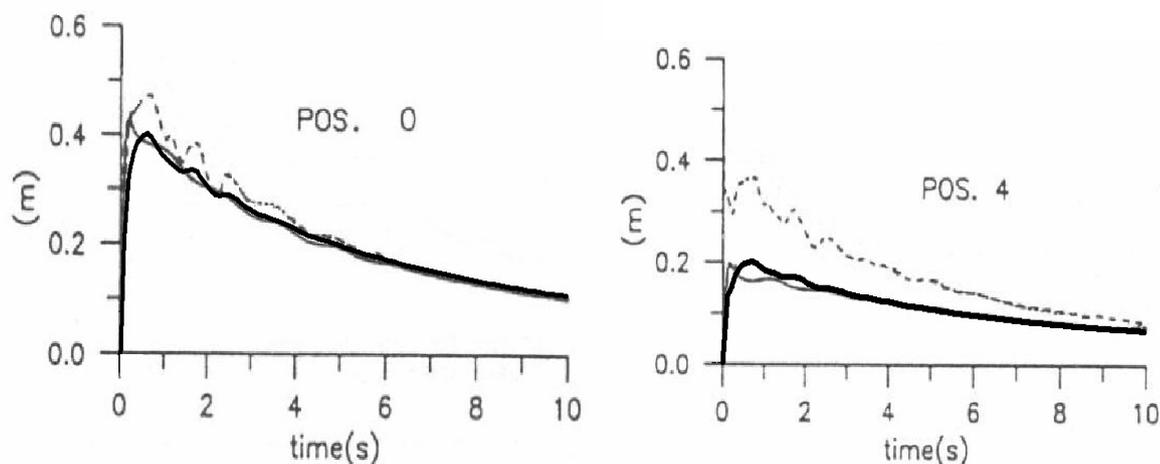


Рис.1. Зависимости глубины жидкости от времени в различных контрольных точках.

Видно, что предложенный квазидвухслойный метод хорошо согласуется с экспериментальными данными и увеличивает точность расчетов по сравнению с результатами, полученными WAF - методом.

В **четвертой главе** диссертации изучаются многофазные и сдвиговые турбулентные течения нейтральной жидкости. В разделе 4.2 мы изучаем несжимаемую жидкость, заполненную твердыми частицами. Такая система может описывать процессы при пылевых бурях в атмосферах планет, покрытых пылью (например, на Марсе большая часть поверхности покрыта пылью). В случае, когда слабым ветром песок поднимается в атмосферу, могут появиться условия для возникновения вихрей, более интенсивных, чем окружающие мелкомасштабные турбулентные потоки.

Ограничиваясь случаями, когда размеры твердых частиц во много раз больше молекулярно-кинетических и масштабы рассматриваемых возмущений таковы, что твердые частицы образуют сплошную среду, мы пользуемся уравнениями двухфазной гидродинамики. При выводе усредненных уравнений мы существенно используем факт, что относительный объем, занимаемый частицами, мал, это позволяет нам пренебречь столкновениями частиц между собой. Используя гипотезу двумасштабности, мы получаем замкнутые уравнения Рейнольдса в линейном по средней скорости приближении. Показано, что в замкнутых уравнениях возникает генерационный член из-за ненулевой дивергенции в результате обтекания твердых частиц жидкостью. По существу, такая двухфазная среда ведет себя как сжимаемая.

Аналогичный механизм генерации вихревых структур исследуется в разделе 4.3 для жидкости с распределенными газовыми пузырьками. В такой среде асимметрия напряжения Рейнольдса обеспечивается

колебаниями пузырька. Основное отличие изучаемой в этой главе модели состоит в том, что мы будем теперь считать, что дополнительная фаза заморожена в основную жидкость и ненулевая дивергенция обеспечивается обтеканием этой жидкости сферически колеблющегося пузырька. Модель такой газожидкостной смеси может иметь непосредственное отношение к процессам, происходящим в приповерхностном слое океана, может быть использована для анализа переноса импульса и энергии через поверхность раздела вода - воздух и для описания турбулентности в верхних слоях океана. Изучаемые в данном разделе явления могут иметь отношение к гидродинамическим процессам в невесомости.

В разделе 4.4 разработан метод описания переноса примесей в атмосферном пограничном слое на сложной границе. Предлагаемый метод направлен на преодоление трудностей традиционных методов и фактически расширяет возможности прогнозирования переноса твердых частиц в случае неприменимости приближения пассивного скаляра или частичного изменения характера примесей в облаке. Наша модель позволяет также анализировать явления, вызванные сложной топологией течения на препятствиях, и описывать процессы на границе облака твердых частиц и чистой атмосферы. В нашей модели мы используем уравнения Нигматулина, описывающие двухфазную среду "газ - примесь" уравнениями идеального газа с пересчитанными уравнениями состояния. Эффективное уравнение состояния такой среды зависит от характеристического размера и концентрации сферических частиц и, в пределе отсутствия твердой фазы, переходит в обычные уравнения идеальной жидкости. Фактически, задача анализа переноса частиц в атмосфере сводится к решению уравнений идеального газа с переменным в пространстве и времени уравнением состояния.

Для расчетов используется метод Годунова для численного решения уравнений двухфазной атмосферы. Суть метода Годунова заключается в использовании точных обобщенных решений задачи распада произвольного разрыва при дискретизации законов сохранения массы, импульса и энергии в каждой ячейке области моделирования на каждом временном шаге. Эти решения включают локальные тангенциальные разрывы, которые не проявляются на масштабах внешнего течения, но, тем не менее, обеспечивают диссипацию кинетической энергии, как это необходимо для течений в пограничном слое. Структура используемой разностной схемы обеспечивает диффузию областей с высокой энтропией по всем пространственным координатам, воспроизводя качественно эффекты молекулярной вязкости. При этом влияние схемной вязкости проявляется наиболее весомо, когда пограничный слой нагружен твердыми частицами в областях значительного изменения рельефа поверхности. Именно в

таких случаях влияние молекулярной вязкости также усиливается в реальной природе. Величина схемной вязкости зависит от градиентов подсеточных течений, имеет конечный предел при уменьшении пространства и может регулироваться выбором размера сетки. Ясно, что для турбулентных течений схемная вязкость превосходит соответствующую для ламинарных течений, что отражает известное соотношение между турбулентной и ламинарной вязкостью.

Проблема распространения звука в турбулентной среде обсуждается в разделе 4.5, где изучаются рассеянное звуковое поле и его статистические характеристики для идеального газа в адиабатическом приближении. В такой среде, как хорошо известно, могут существовать и вихревые движения. В однородной и стационарной сжимаемой жидкости в линейном приближении потенциальные и вихревые моды не связаны и, более того, завихренность не может возникнуть без внешних источников. Таким образом, если в такой ситуации в начальный момент времени создано потенциальное возмущение, то оно распространяется в виде звуковой волны. При наличии же турбулентной области в газе потенциальные и вихревые движения в линейном приближении связаны и поэтому следует ожидать трансформации падающей звуковой волны в рассеянное звуковое поле и вихревые движения. Мы изучаем вихревые движения, которые возникают при рассеянии акустических волн в турбулентной области. Рассматриваются также гиротропные свойства таких возмущений и их связь со спиральностью исходной турбулентности.

Устойчивость однородного турбулентного сдвигового течения по отношению к крупномасштабным возмущениям скорости рассмотрена в первом порядке теории возмущений в разделе 4.6. (Мы будем называть это течение турбулентным течением Куэтта). Рассмотрен следующий, довольно часто встречающийся анизотропный фактор – существование наряду с турбулентностью крупномасштабного сдвигового течения. Исследована эволюция вихревых возмущений на фоне этого течения, при наличии мелкомасштабной спиральности (отражающей, например, глобальное вращение всей системы). Спиральность, как выясняется, ведет к интенсивному росту возмущений на начальной стадии. Растут даже те моды, которые в отсутствие спиральности только затухали. На больших временах все возмущения затухают. То есть на мелкомасштабном турбулентном фоне вспыхивают и исчезают трехмерные вихревые образования. Время жизни подобной структуры зависит от средних характеристик турбулентного потока.

Пятая глава посвящена разработке теории метода крупных вихрей для сжимаемой магнитогидродинамической турбулентности политропной плазмы и исследованию затухающей сжимаемой МГД-турбулентности при различных числах подобия. Модель политропного

газа используется и эффективно применяется при исследовании и моделировании сжимаемой турбулентности нейтральной и магнитной жидкости, турбулентности солнечного ветра, турбулентности в межзвездном газе, а также в других задачах астрофизической турбулентности. Это приводит к тому, что вместо громоздкого и сложного уравнения сохранения энергии для замыкания системы уравнений используется политропное соотношение между плотностью и давлением: $p = \rho^\gamma$. В этом случае система уравнений сжимаемой магнитной гидродинамики сводится к более простому виду.

В методе крупных вихрей к исходным уравнениям применяется операция фильтрации. Каждый физический параметр разлагается на крупномасштабную (отфильтрованную) и мелкомасштабную составляющие. Причем, эффекты на больших масштабах рассчитываются непосредственно, а на мелких - моделируются. Для фильтрации уравнений магнитной гидродинамики в методе LES использован фильтр, удовлетворяющий свойству нормировки.

В разделе 5.2 приведены исходные уравнения и сформулирован метод крупных вихрей для политропной плазмы. Для упрощения уравнений, описывающих турбулентное МГД-движение с переменной плотностью, применялась фильтрация по Фавру (другое название - средневзвешенная фильтрация), для того чтобы избежать появления дополнительных подсеточных слагаемых: $\tilde{f} = \overline{\rho f} / \bar{\rho}$. В работе получены следующие отфильтрованные МГД-уравнения в безразмерном виде:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_j}{\partial x_j} = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_j + \frac{\bar{\rho}^\gamma}{\gamma M_s^2} \delta_{ij} - \frac{1}{\text{Re}} \tilde{\sigma}_{ij} + \frac{\bar{B}^2}{2M_A^2} - \frac{1}{M_A^2} \bar{B}_i \bar{B}_j) = - \frac{\partial \tau_{ji}^u}{\partial x_j}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial \bar{B}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\tilde{u}_j \bar{B}_i - \bar{B}_j \tilde{u}_i) - \frac{1}{\text{Re}_m} \frac{\partial^2 \bar{B}_i}{\partial x_j^2} = - \frac{\partial \tau_{ji}^b}{\partial x_j}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial \bar{B}_i}{\partial x_i} = 0, \quad (9)$$

где ρ - плотность; u_j - скорость в направлении x_j ;

$\sigma_{ij} = 2\mu S_{ij} - \frac{2}{3}\mu S_{kk}\delta_{ij}$ - вязкий тензор напряжений; $S_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i})$ - тензор

скорости деформации; B_j - магнитное поле в направлении x_j ; μ - динамический (молекулярный) коэффициент вязкости; δ_{ij} - символ

Кронекера. В системе МГД уравнений (6) – (9) использовались следующие безразмерные параметры подобия: Re - гидродинамическое число Рейнольдса, Re_m - магнитное число Рейнольдса, M_s - число Маха, M_A - альфвеновское (магнитное) число Маха.

Вследствие фильтрации по Фавру системы уравнений МГД политропной плазмы появляются подсеточные слагаемые в правой части уравнений (7) и (8): $\tau_{ij}^u = \bar{\rho}((u_j u_i)^\sim - \tilde{u}_j \tilde{u}_i) - \frac{1}{M_A^2} (\overline{B_i B_j} - \bar{B}_j \bar{B}_i)$ -

подсеточный тензор напряжений и $\tau_{ij}^b = (\overline{u_i B_j} - \bar{B}_j \tilde{u}_i) - (\overline{B_i u_j} - \tilde{u}_j \bar{B}_i)$ - магнитный подсеточный тензор напряжений, которые необходимо параметризовать, выразив их через крупномасштабные значения характеристик течения. Учет сжимаемости течения приводит к усложнению вида тензора подсеточных напряжений в уравнении количества движения, связанного с появлением отфильтрованной плотности по сравнению с несжимаемым течением. Однако магнитный тензор подсеточных напряжений, возникающий в уравнении индукции, сохраняет такой же вид, как и для несжимаемого МГД-течения.

В разделе 5.3 обобщены различные модели замыкания подсеточных слагаемых на случай сжимаемой МГД-турбулентности, а именно: модель Смагоринского для МГД-турбулентности, модель Колмогорова для МГД-турбулентности, модель, основанная на перекрестной спиральности скорости и магнитного поля, для МГД-турбулентности, модель подобия масштабов для МГД-турбулентности и смешанная модель для МГД-турбулентности. Все модели (кроме модели подобия масштабов) содержат константы, которые необходимо определить. Для того чтобы решить проблему, связанную с выбором значений констант, была использована динамическая процедура, обобщенная в данной работе на случай сжимаемых МГД-уравнений, которая определяет значение модельной константы на каждом временном шаге.

В разделе 5.4 представлены численные методы, которые использовались в работе при моделировании сжимаемой МГД-турбулентности. Для интеграции по времени использовался модифицированный явный метод Рунге-Кутты третьего порядка точности, который требует меньше ресурсов оперативной памяти по сравнению со стандартным методом Рунге-Кутты. Был разработан и создан численный код с конечно-разностными схемами четвертого порядка точности для системы уравнений магнитной гидродинамики, записанной в консервативной форме. Однако для нелинейных слагаемых применяется кососимметричная форма, которая обеспечивает более точные результаты, так как уменьшаются ошибки, связанные с дискретизацией при использовании конечно-разностного подхода для моделировании турбулентных течений. Для разделения

турбулентного течения на крупномасштабные и мелкомасштабные вихри применялся фильтр Гаусса четвертого порядка точности. Так как в работе рассматривается трехмерное сжимаемое турбулентное МГД-течение, то использовалось последовательное применение одномерных фильтров.

Для оценки эффективности различных предложенных подсеточных замыканий LES в разделе 5.5 использовались результаты, полученные прямым численным моделированием МГД-турбулентности в различных диапазонах магнитного числа Рейнольдса, гидродинамического числа Рейнольдса и числа Маха. Всего было рассмотрено семь различных случаев с варьированием начальных параметров вычислений. Приведены результаты расчетов сжимаемых МГД-течений методом LES с использованием пяти подсеточных параметризаций.

Показано, что при уменьшении магнитного числа Рейнольдса разница между подсеточными моделями уменьшается для магнитной энергии и все предложенные подсеточные модели демонстрируют хорошее согласование с результатами DNS при малых значениях магнитного числа Рейнольдса. При увеличении магнитного числа Рейнольдса растет роль подсеточных замыканий в моделировании сжимаемой МГД-турбулентности и уменьшается скорость диссипации магнитной энергии. Наилучшие результаты показали модели Смагоринского, Колмогорова и модель, основанная на перекрестной спиральности для временной эволюции магнитной энергии. Такое же поведение наблюдается и для перекрестной спиральности: роль подсеточных параметризаций растет при увеличении магнитного числа Рейнольдса. Для кинетической энергии при уменьшении магнитного числа Рейнольдса наблюдалось большее расхождение в результатах LES при применении различных подсеточных параметризаций. Модель подобия масштабов продемонстрировала наихудшие результаты, остальные подсеточные замыкания увеличили точность расчетов. Для временной динамики турбулентных напряжений, как магнитных, так и кинетических, характерно увеличение влияния на результаты моделирования МГД-турбулентности подсеточных параметризаций при увеличении магнитного числа Рейнольдса. Роль анизотропии в расчетах и расхождение LES- и DNS-результатов для анизотропии турбулентности увеличивались при уменьшении магнитного числа Рейнольдса.

При изменении гидродинамического числа Рейнольдса результаты расчетов ведут качественно похожим образом, это связано с тем, что начальные условия для магнитного поля, поля скоростей не изменялись, поэтому в наших вычислениях выбор подсеточной параметризации слабо зависит от гидродинамического (или тейлоровского) числа Рейнольдса. Подсеточные модели Смагоринского, Колмогорова, смешанная и модель, основанная на перекрестной спиральности

скорости и магнитного поля, показывают адекватные результаты и хорошее приближение к DNS-результатам.

Число Маха оказывает существенное влияние на результаты вычислений. При увеличении звукового числа Маха увеличивалось расхождение в результатах DNS и LES для кинетической энергии. Модель Смагоринского и модель, основанная на перекрестной спиральности, для кинетической энергии показали наилучшее согласие с DNS при различных числах Маха. Для магнитной энергии, наблюдалось уменьшение разброса в результатах при увеличении числа Маха. Следует заметить, что при уменьшении числа Маха магнитная энергия быстрее выходит на стационарный уровень. Для перекрестной спиральности магнитного поля и скорости модель Смагоринского показала лучшие результаты, как для высоких чисел Маха, так и для низких. Асимметрия компонент скорости, рассчитанная с использованием LES, лучше совпадает с результатами DNS при увеличении числа Маха. На асимметрию компонент магнитного поля выбор подсеточных параметризаций практически не оказал влияния. При увеличении числа Маха турбулентные напряжения, рассчитанные при помощи LES, лучше согласованы с результатами DNS.

Подсеточные модели меньше всего оказывают влияние на временную эволюцию пологости и асимметрии (модель без подсеточных замыканий также демонстрирует сравнительно хорошее согласование с DNS - результатами), это связано с тем, что анизотропия и перемежаемость являются свойствами крупномасштабных структур, а различия между подсеточными моделями и моделью без подсеточных замыканий имеют место на мелких масштабах турбулентного течения.

Показано, что наилучшие результаты демонстрирует расширенная модель Смагоринского для МГД-случая и модель, основанная на перекрестной спиральности магнитного поля и поля скоростей. Модель подобия масштабов не обеспечивала достаточной диссипацией кинетическую и магнитную энергию и эту модель следует использовать только вместе с моделями вихревой вязкости (например, с моделью Смагоринского), что является основной идеей смешанной модели.

Шестая глава диссертации посвящена разработке метода крупных вихрей для сжимаемой магнитогидродинамической турбулентности теплопроводящей плазмы, где для замыкания системы МГД-уравнений использовалось уравнение полной энергии, и исследованию сжимаемой МГД-турбулентности при различных числах Маха.

В разделе 6.2 представлена полная система уравнений сжимаемой магнитной гидродинамики электро- и теплопроводящей жидкости, исходные уравнения МГД приводятся к безразмерному виду. Получены отфильтрованные по Фавру уравнения для полной системы МГД-уравнений теплопроводящей жидкости, которая используется в методе

крупных вихрей для моделирования трехмерной сжимаемой турбулентности:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_j}{\partial x_j} = 0, \quad (10)$$

$$\frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_j + \frac{\bar{\rho}^\gamma}{\gamma M_s^2} \delta_{ij} - \frac{1}{\text{Re}} \tilde{\sigma}_{ij} + \frac{\bar{B}^2}{2M_A^2} - \frac{1}{M_A^2} \bar{B}_i \bar{B}_j) = - \frac{\partial \tau_{ji}^u}{\partial x_j}, \quad (11)$$

$$\frac{\partial \bar{B}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\tilde{u}_j \bar{B}_i - \bar{B}_j \tilde{u}_i) - \frac{1}{\text{Re}_m} \frac{\partial^2 \bar{B}_i}{\partial x_j^2} = - \frac{\partial \tau_{ji}^b}{\partial x_j}, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{E}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} [(\tilde{E} + \bar{P}) \tilde{u}_j - \frac{1}{M_A^2} \bar{B}_i \bar{B}_j \tilde{u}_i] + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\tilde{q}_j}{\text{Pr Re } M_s^2 (\gamma - 1)} - \frac{1}{\text{Re}} \tilde{\sigma}_{ij} \tilde{u}_i \right] - \\ - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\eta}{\text{Re}_m M_a^2} \bar{B}_i \left(\frac{\partial \bar{B}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{B}_j}{\partial x_i} \right) \right] = - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{\gamma M_s^2} Q_j + \frac{1}{2} J_j + \frac{1}{2M_a^2} V_j - \frac{1}{M_s^2} G_j \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь \tilde{E} - полная энергия, усредненная по Фавру; $\tilde{q}_j = -k \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j} \right)$ -

диссипация, связанная с теплопроводностью (закон Фурье). Для замыкания системы используется уравнение состояния в виде

$$\bar{p} = \frac{\tilde{T} \bar{\rho}}{\gamma M_s^2}.$$

Наличие уравнения для полной энергии в системе МГД-уравнений значительно усложняет решение задачи методом крупных вихрей. Влияние мелкомасштабной турбулентности на отфильтрованную часть уравнений магнитной гидродинамики определяется через подсеточные слагаемые в правой части уравнений (11) – (13). Для определения тензора подсеточных напряжений τ_{ij}^u и магнитного подсеточного тензора напряжений τ_{ij}^b в разделе 6.3 применялась модель Смагоринского для МГД-турбулентности, подробно рассмотренная в пятой главе. Для определения подсеточного потока тепла $Q_j = \bar{\rho}((u_j T)^\sim - \tilde{u}_j \tilde{T})$ и турбулентной подсеточной диффузии $J_j = \bar{\rho}((u_j u_k u_k)^\sim - \tilde{u}_j (u_k u_k)^\sim)$ в уравнении полной энергии используются параметризации в виде

$$Q_j = -C_s \frac{\bar{\Delta}^2 \bar{\rho} |\tilde{S}^u|}{\text{Pr}_T} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j}, \quad (14)$$

$$J_j = \tilde{u}_k \tau_{jk}^u. \quad (15)$$

В отличие от гидродинамики нейтрального газа, в магнитогидродинамике заряженной жидкости появляются сразу

несколько новых подсчетных слагаемых в отфильтрованном уравнении полной энергии, для которых в данной главе разработана теория для их параметризаций. Для того чтобы получить подсчетные модели для подсчетных слагаемых в уравнении энергии, возникающих из-за наличия магнитного поля, была использована теория, основанная на вычислении обобщенных центральных моментов. Данный подход в диссертационной работе был расширен и применен к МГД-случаю, в итоге для потока подсчетной магнитной энергии $V_j = (\overline{B_k B_k u_j} - \overline{B_j B_i \tilde{u}_j})$ и подсчетной энергии взаимодействия магнитного натяжения и скорости $G_j = (\overline{B_j B_k u_k} - \tilde{u}_k \overline{B_k B_k})$ была получена следующая подсчетная модель:

$$\frac{1}{2} V_j - G_j \cong \overline{B_k} \tau_{jk}^b. \quad (16)$$

В данной главе приведены соотношения для определения модельных констант в рассмотренных подсчетных замыканиях при помощи динамической процедуры.

В разделе 6.4 представлены результаты моделирования затухающей сжимаемой магнитогидродинамической турбулентности методом LES при различных звуковых числах Маха: когда течение слабосжимаемое; когда сжимаемость играет существенную роль; третий случай соответствует появлению сильных разрывов в сверхзвуковом сжимаемом МГД-течении. Полученные численные результаты LES проанализированы на основе сравнения с результатами численных экспериментов, выполненных прямым численным моделированием для теплопроводящей заряженной жидкости. Изучена временная динамика кинетической, магнитной энергии, перекрестной спиральности между магнитным полем и скоростью, средней температуры, температурной асимметрии, параметра, характеризующего флуктуации температуры, при различных числах Маха. Показано, что анизотропия - главным образом свойство крупномасштабных структур, и различия между подсчетными замыканиями и моделью без подсчетных параметризаций имеют место в основном на мелких масштабах турбулентного течения.

Продемонстрировано, что на кинетическую и магнитную энергию учет подсчетных слагаемых в уравнении полной энергии почти не оказывает никакого влияния, даже при высоких числах Маха, в то же время для температуры (соответственно и для внутренней энергии) наличие подсчетных моделей в уравнении полной энергии является важным условием для повышения точности вычислений термодинамических величин. Указано, что при увеличении значения числа Маха увеличиваются осцилляции кинетической энергии и температуры, так как при повышении звукового числа Маха

увеличивается влияние вязкости и возрастает роль нелинейных эффектов, что приводит к усилению осцилляций и флуктуаций характеристик турбулентного течения.

В данной главе показано, что LES-метод с использованием явной средневзвешенной фильтрации демонстрирует хорошие результаты при моделировании теплопроводящей плазмы в сжимаемой МГД-турбулентности при различных числах Маха.

В разделе 6.5 представлены МГД-модель локальной межзвездной среды и характерные величины, используемые при численном моделировании сжимаемой МГД-турбулентности при помощи метода крупных вихрей.

В разделе 6.6 с использованием преимуществ метода крупных вихрей исследуется нетривиальный режим сжимаемой магнитогидродинамической турбулентности космической плазмы, когда исходно сверхзвуковые флуктуации переходят в слабосжимаемый режим. Изучаются спектры плотности и энергии турбулентности в этом режиме, изменение намагниченности плазмы со временем и свойства анизотропии сжимаемой МГД-турбулентности. Полученные результаты используются для интерпретации данных о флуктуациях плотности в локальной межзвездной среде.

Метод крупных вихрей, разработанный в пятой главе, используется для моделирования сжимаемой затухающей МГД-турбулентности в политропном случае. Показано, что имеется возможность существования режима слабосжимаемых турбулентных пульсаций, когда флуктуации плотности являются пассивным скаляром. Для этого получена временная эволюция турбулентного мелкомасштабного числа Маха и дивергенции скорости. Показано, что локальное турбулентное число Маха уменьшается со временем со сверхзвукового значения до дозвукового режима. Показано, что турбулентный каскад, связанный с нелинейными взаимодействиями в комбинации с диссипативными эффектами на мелких масштабах, приводит к тому, что сверхзвуковые плазменные флуктуации затухают достаточно сильно к дозвуковым флуктуациям в электропроводящем течении, и МГД-турбулентность становится слабосжимаемой. Таким образом, результаты численного моделирования показали, что существенно сжимаемое турбулентное течение становится слабосжимаемым.

Из рис. 2 и 3 видно, что спектры кинетической энергии, плотности и флуктуаций плотности демонстрируют практически аналогичное поведение в фурье-пространстве и имеют близкие показатели степени. Проиллюстрировано также, что в спектрах кинетической энергии (см. рис. 2) и флуктуаций плотностей (см. рис. 3) существует инерционный интервал турбулентности колмогоровского типа, причем практически при таких же волновых числах. Таким образом, сделан вывод, что флуктуации плотности являются пассивной примесью в умеренно

сжимаемом течении дозвуковой турбулентности, что объясняет данные наблюдений со спутников турбулентности локального межзвездного газа.

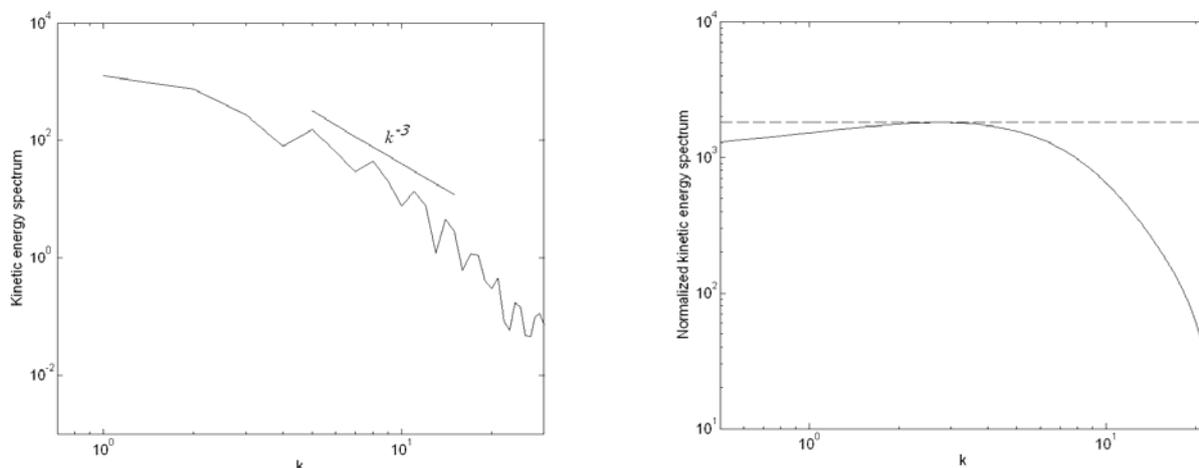


Рис.2. Спектр кинетической энергии (слева). Нормализованный (умноженный на $k^{5/3}$) сглаженный спектр кинетической энергии (справа). Видно, что степенной показатель спектра близок к k^{-3} для большей части турбулентного каскада. Однако существует четко выраженный инерционный интервал колмогоровского типа $k^{-5/3}$.

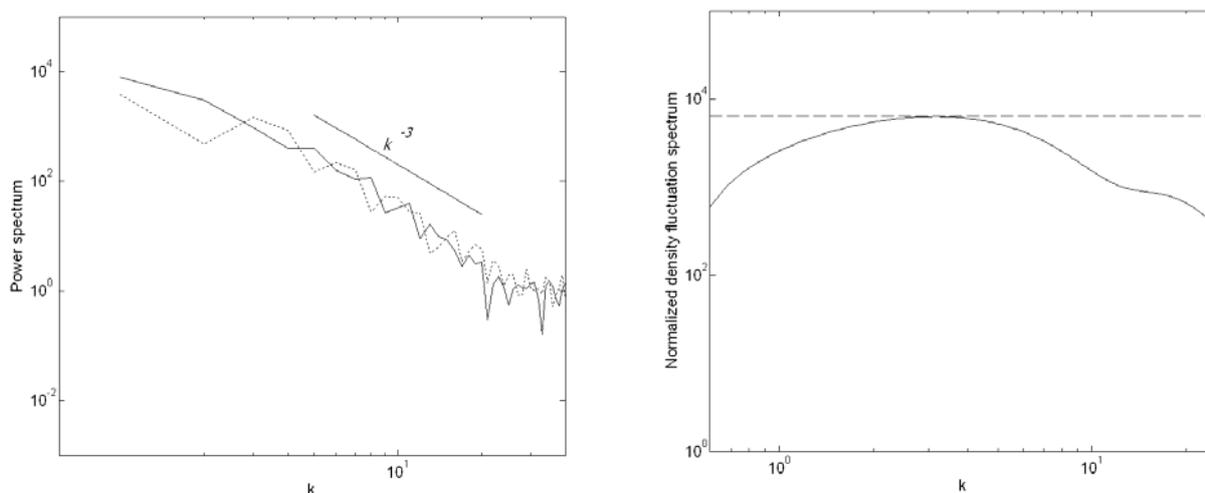


Рис.3. Спектр плотности - сплошная линия, спектр флуктуаций плотности - пунктирная линия (слева). Нормализованный (умноженный на $k^{5/3}$) сглаженный спектр флуктуаций плотности (справа). На рисунке (слева) оба графика имеют показатель спектра, близкий к k^{-3} . Также существует четко выраженный инерционный интервал колмогоровского типа $k^{-5/3}$ для флуктуаций плотности (справа), что подтверждает наблюдательные данные.

Показано, что со временем уменьшаются энергосодержащие крупные масштабы турбулентности, амплитуда спектра энергии также ослабевает, что соответствует диссипации рассматриваемого сжимаемого МГД-течения. Отмечено, что увеличивается диссипативный интервал в турбулентном каскаде энергии и уменьшается инерционный

интервал, что соответствует уменьшению со временем гидродинамического числа Рейнольдса в затухающей турбулентности.

Переход плазмы от существенно сжимаемого турбулентного течения к слабосжимаемому МГД-течению в локальной межзвездной среде не только преобразовывает сверхзвуковое движение в дозвуковое, но также приводит к ослаблению намагниченности плазмы. В режиме, когда существенно сжимаемые плазменные флуктуации затухают, намагниченность плазмы падает и плазменная бета (отношение плазменного давления к магнитной энергии) с низкого значения увеличивается до состояния с высоким значением. Из временной динамики сжимаемого МГД-течения следует, что магнитозвуковые флуктуации ослабевают быстрее, чем альфвеновские. Частицы плазмы, связанные с магнитными силовыми линиями, выталкиваются из их гироорбит вследствие того, что увеличивается доминирующая роль плазменного давления по сравнению с магнитной энергией. Это приводит, в конечном счете, к ослаблению намагниченности плазмы, а следовательно, плазменных флуктуаций, и переходу к режиму с высоким значением плазменной беты и дозвуковому слабосжимаемому течению.

Продемонстрировано, что МГД-турбулентность в условиях локальной межзвездной среды является анизотропной, что подтвердили данные наблюдений. Получено различное поведение компонент скорости в спектральном каскаде при малых волновых числах для x -, y - и z -компонент поля скорости и почти отсутствие различий при больших фурье-модах, что означает возникновение турбулентных анизотропных каскадов, главным образом, на больших масштабах. Также показано, что при больших значениях волнового числа, что соответствует мелким масштабам, спектр является изотропным.

В заключении диссертации сформулированы основные выводы и результаты работы.

Публикации по теме диссертации

1. Belyan A.V., Moiseev S.S., Petrosyan A.S. Large-scale structures in turbulent multiphase flows// J. Phys. Condensed Matter. 1990. SA. P. 469-475.
2. Belyan A.V., Moiseev S.S., Petrosyan A.S. Sound transformation in a turbulent medium// Physics letters A. 1991. V. 155. P. 181-184.
3. Chkhetiani O.G., Moiseev S.S., Petrosyan A.S., Sagdeev R.Z. The inverse energy cascade and self-organization in homogeneous turbulent shear flow// Applied Scientific Research. 1993. V. 51. P. 67-72.

4. Chkhetiani O.G., Moiseev S.S., Petrosyan A.S., Sagdeev R.Z. The large scale stability and self-organization in homogeneous turbulent shear flow// *Physica Scripta*. 1994. V. 49. P. 214-220.
5. Karelsky K.V., Petrosyan A.S. Numerical simulations of near-surface phenomena on Mars// *Adv. Space Res.* 1995. V. 16. P. 645-648.
6. Petrosyan A.S., Polunine D.Yu. Reynolds stresses in rotating fluids// In: *Turbulence, Heat and Mass Transfer/* Ed.: K.Hanjalic, T.W.J. Peters. Delft University Press. 1997. ISBN 90-407-1465-7. P. 549-556.
7. Karelsky K.V., Papkov V.V., Petrosyan A.S. Particular solutions of shallow water equations on slopes// *Physics Letters A*. 2000. V. 271. P. 341-348.
8. Karelsky K.V., Papkov V.V., Petrosyan A.S. The initial discontinuity decay problem for shallow water equations on slopes// *Physics Letters A*. 2000. V. 271. P. 349-357.
9. Chernyshov A.A., Karelsky K.V., Petrosyan A.S. Subgrid-scale modeling in Large-Eddy Simulations of Compressible Magnetohydrodynamic Turbulence// *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modeling*. 2006. V. 21. №1. P. 1-20.
10. Chernyshov A.A., Karelsky K.V., Petrosyan A.S. Large-Eddy Simulations of Magnetohydrodynamic Turbulence in Compressible Fluid// *Physics of Plasmas*. 2006. V. 13. Issue 3. P. 032304-032304-9.
11. Karelsky K.V., Petrosyan A.S. Particular solutions and Riemann problem for modified shallow water equations// *Fluid Dynamics Research*. 2006. V. 38. P. 339-358.
12. Карельский К. В., Петросян А.С. Задача о стационарном обтекании ступеньки в приближении мелкой воды *Известия РАН, Механика Жидкости и Газа*, 2006, №1, С.15-24.
13. Karelsky K.V., Petrosyan A.S., Slavin A.G. Quasi-Two-layer model for numerical analysis shallow-water flows on step// *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modeling*. 2006. V. 21. №6. P. 539-559.
14. Chernyshov A.A., Karelsky K.V., Petrosyan A.S. Subgrid-scale modeling of compressible MHD turbulence in heat-conducting plasma// *Physics of Plasmas*. 2006. V. 13, Issue 10. P. 104501-104501-4.
15. Chernyshov A.A., Karelsky K.V., Petrosyan A.S. Large Eddy Simulation of Compressible Magnetohydrodynamic Turbulence in Heat-conducting Plasma// In *Advances in Turbulence XI. Proceedings of the EUROMECH European Turbulence Conference*. 2007. ISSN 0930-8989. ISBN 978-3-540-72603-6. Springer, Berlin, Heidelberg, New York. P. 20-22.
16. Chernyshov A.A., Karelsky K.V., Petrosyan A.S. Development of Large-Eddy Simulation for Modeling of Decaying Compressible MHD turbulence// *Physics of Fluids*. 2007. V. 19. Issue 5. P. 055106-055106-14.

17. Karelsky K.V., Petrosyan A.S., Slavin A.G. Numerical Simulations of free-surface hydrodynamic flows on arbitrary bed// Russian journal of Numerical Analysis and Mathematical modeling. 2007. V. 22. №6. P. 543-565.
18. Karelsky K.V., Petrosyan A.S., Smirnov I.V. A new model for boundary layer flows interacting with particulates in land surface on complex terrain// Quarterly Journal of the Hungarian Meteorological Service. 2007. V. 11. №2-3. P. 149-159.
19. Chernyshov A.A., Karelsky K.V., Petrosyan A.S. Large Eddy Simulation of Compressible MHD Turbulence// Flow, Turbulence and Combustion. 2008. V. 20. №1. P. 21-35.
20. Chernyshov A.A., Karelsky K.V., Petrosyan A.S. Modeling of compressible magnetohydrodynamic turbulence in electrically and heat conducting fluid using large eddy simulation// Physics of Fluids. 2008. V. 20. Issue 8. P. 085106-085106-13.
21. Chernyshov A.A., Karelsky K.V., Petrosyan A.S. Three-dimensional modeling of compressible magnetohydrodynamic turbulence in the local interstellar medium// Astrophysical Journal. 2008. V. 686. P. 1137.
22. Karelsky K.V. and Petrosyan A.S. Modified Shallow water equations. Simple waves and Riemann problem// Proceedings IUTAM Symposium on Hamiltonian Dynamics, Vortex Structures, Turbulence. 2008. Springer. ISBN 978-1-4020-6743-3. P. 383-392.
23. Petrosyan A.S. A new model for aerosols transportation in boundary layer on complex terrain// In: Atmospheric boundary layer flows in air pollution modelling. Von Karman Institut for fluid dynamics/ Ed.: J. van Beeck, J.-M. Buchlin, A. Petrosyan. 2008. ISBN-13 978-2-930389-85-0.
24. Petrosyan A.S. Numerical simulation of flows of a heavy aerosols transportation over a bed surface with an arbitrary profile// In: Atmospheric boundary layer flows in air pollution modelling. Von Karman Institut for fluid dynamics/ Ed.: J. van Beeck, J.-M. Buchlin, A. Petrosyan. 2008. ISBN-13 978-2-930389-85-0.
25. Karelsky K. V, Petrosyan A. S, Slavin A. G. Finite-difference presentation of the Coriolis force in numerical Godunov-type models for flows of rotating shallow water// Russian journal of Numerical Analysis and Mathematical modeling. 2009 V. 24(3). P. 229-259.
26. Карельский К.В., Петросян А.С., Славин А.Г. Численный метод для исследования течений мелкой воды над сложным профилем дна в присутствии внешней силы// Математическое моделирование. 2009. Т. 21. №6. С. 41-58.

055(02)2

Ротапринт ИКИ РАН
Москва, 117997, Профсоюзная, 84/32

Подписано к печати 14.07.2009

Заказ 2184

Формат 70x108/32

Тираж 100

2,0 уч.-изд.л.