

**ИНСТИТУТ КОСМИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК**

На правах рукописи

УДК 530.145, 532.507

АЛТАЙСКИЙ Михаил Викторович

**ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ В ТЕОРИИ
СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ И
КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ**

01.04.02 – теоретическая физика

А в т о р е ф е р а т

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико–математических наук

Москва – 2006

Работа выполнена в Институте космических исследований РАН (г.Москва)
и Объединенном институте ядерных исследований (г.Дубна)

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук
Антонов Н.В.
доктор физико-математических наук
Астафьева Н.М.,
доктор физико-математических наук
Приезжев В.Б.

Ведущая организация: Институт общей физики им. А.М.Прохорова РАН

Защита состоится "22" февраля 2007 г в. "11" час. "00" мин. на заседании диссертационного совета Д.002.113.03 Института космических исследования РАН по адресу: 117997, г.Москва, ул.Профсоюзная 84/32, Институт космических исследований РАН, конференц-зал.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института космических исследований РАН.

Автореферат разослан " ____ " _____ 2006 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
к.ф.м.н.



Буринская Т.М.

1 ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

1.1 Актуальность темы

Существует большой класс физических задач, связанных с нелинейными системами с большим числом степеней свободы, в которых сильное межмодовое взаимодействие делает обычные методы фурье-анализа малопригодными: наблюдаемая низкочастотная мода в такой системе может быть как связана с крупномасштабным движением, так и быть разностью двух близких высокочастотных мод. Для исследования таких систем, возникающих в геофизике, нейробиологии, медицине, радиофизике требуется инструмент, который бы позволял локально по координате или времени разделять движения различных масштабов. Одним из таких инструментов стало вейвлет-преобразование.

Вейвлет-преобразование является едва ли не наиболее часто встречающимся термином в той части прикладной математики, которая касается обработки хаотических сигналов и изображений, а также передачи и сжатия данных. Сам термин “вейвлет” был введен французским математиком Ж.Морле [34] (фактически, вариант дискретного вейвлет-преобразования был независимо введен В.Д.Зиминим [60]) в связи с задачами геофизики, и в дальнейшем применялся при анализе сейсмических сигналов и турбулентности. К настоящему времени вейвлет-преобразованию посвящено уже достаточно много монографий [20, 19, 30, 38], одна из которых принадлежит автору данной диссертации [11]. Ведутся интенсивные исследования по применению вейвлет-преобразования к различным задачам анализа сигналов и изображений, возникающим в геофизике, медицине, финансовом анализе, машиностроении, физике высоких энергий [54, 55].

Тем не менее имеются вопросы, связанные с нелинейными явлениями где приложения вейвлет-преобразования еще слабо развиты. К таким вопросам относится аналитическое исследование взаимодействия локализованных флуктуаций различных масштабов, как в классических системах (например, в турбулентности), так и в квантовых системах (взаимодействие массивных частиц). Данная диссертация восполняет ряд пробелов в этой области.

В настоящей диссертационной работе вейвлет-преобразование используется как инструмент *аналитического*, а не численного исследования, позволяющий строить стохастические и квантово-полевые модели изначально свободные от петлевых расходимостей в теории возмущений.

1.2 Цель работы

Целью диссертационной работы является разработка математического аппарата для аналитического описания явлений, свойства которых зависят от масштаба. К таким явлениям относятся развитая гидродинамическая турбулентность, критические явления, кодирование квантовой и генетической информации, взаимодействие квантовых полей при высоких энергиях. В качестве основы для достижения поставленной цели было использовано непрерывное вейвлет-преобразование. При этом были решены следующие задачи:

- развитие математического аппарата, позволяющего рассматривать зависящие от масштаба измерения физические величины $\phi_{\Delta x}(x, \cdot)$ (такие как скорость, намагниченность, амплитуда поля), как самостоятельные объекты – случайные функции на аффинной группе – не требующие существования континуального предела $\phi(x, \cdot) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \phi_{\Delta x}(x, \cdot)$;
- построение аналитических методов решения стохастических дифференциальных уравнений и задач квантовой теории поля, основанных на непрерывном вейвлет-преобразовании. Такие методы необходимы для задач физики атмосферы и физики плазмы, для задач роста границы раздела фаз – там, где нужно исследовать зависимость корреляционных функций от масштаба измерения;
- применение построенного аппарата к исследованию физических систем с широким спектром флуктуаций различных масштабов, в частности к описанию развитой гидродинамической турбулентности;
- устранение расходимостей в квантовой теории поля за счет использования масштабно-зависимых амплитуд поля $\phi_{\Delta x}(x, \cdot)$, построенных с использованием непрерывного вейвлет-преобразования;
- использование дискретного вейвлет-преобразования для описания иерархических квантовых систем;
- применение идеи меры, зависящей от масштаба, к задачам с неархимедовой (p -адической) геометрией и получение возможных физических следствий. К таким следствиям прежде всего относятся анизотропия реликтового излучения и возможность наблюдения дискретных симметрий в ядерной физике.

1.3 Научная новизна

С использованием непрерывного вейвлет-преобразования сформулирована концепция многомасштабных случайных процессов. Путем задания корреляционной функции в пространстве вейвлет-образов построен многомасштабный случайный процесс, воспроизводящий свойства гауссова дельта-коррелированного шума, но отличающийся от прямого вейвлет-образа гауссова шума. На основе построенного процесса впервые разработана техника пертурбативного решения стохастических дифференциальных уравнений не приводящая к петлевым расходимостям. Непрерывное вейвлет-преобразование впервые использовано в качестве аналитического инструмента при решении стохастических дифференциальных уравнений. Для случайной силы, действующей вблизи фиксированного масштаба, вычислена однопетлевая поправка к коэффициенту поверхностного натяжения границы раздела фаз в уравнении Паризи-Кардара-Занга, описывающего рост интерфейсов в случайных средах, геологическую стратификацию, рост снежного покрова и другие явления. Это позволяет, зная характерный масштаб случайной силы, оценить ее влияние на гладкость границы раздела фаз. Вычислен однопетлевой вклад в функцию отклика и корреляционную функцию поля скорости для случая зависящей от масштаба накачки, определенной в пространстве вейвлет-коэффициентов для стохастического уравнения Навье-Стокса. Гипотезы Колмогорова (K41) сформулированы для масштабных компонент поля скорости, определенных с помощью вейвлет-преобразования.

На основе многомасштабных случайных процессов предложена новая техника стохастического квантования, свободная (при соответствующем выборе коррелятора случайной силы) от петлевых расходимостей. На основе непрерывного вейвлет-преобразования предложен метод непосредственного построения квантово-полевых моделей на аффинной группе, вместо обычно используемого евклидова пространства \mathbb{R}^d . Предложены варианты многомасштабных коммутационных соотношений и упорядочение операторов.

Предложен формализм квантования иерархических систем. Построено гильбертово пространство состояний для квантовых иерархических систем и матрица плотности. К таким системам относятся, например, атомные кластеры, квантовые точки, большие биологические молекулы.

Построено непрерывное вейвлет-преобразование над полем p -адических чисел \mathcal{Q}_p . Построен аналог дискретного вейвлет-преобразования с вейвлетом Хаара над полем \mathcal{Q}_p . Предложен геометрический подход к p -адической квантовой теории поля, не сводящийся к адельному разложению по каждой из d координат в \mathcal{Q}_p^d , а связывающий основание \mathcal{Q}_p с размерностью пространства $p = d + 2$. Выдвинуто

предположение о том, что наблюдаемая анизотропия микроволнового реликтового излучения может быть следствием дискретной p -адической геометрии ранней Вселенной. Данный подход может быть использован как модель происхождения непрерывного пространства из дискретного множества элементов.

С помощью непрерывного вейвлет-преобразования, одновременно и независимо от работы [38], обнаружен самоподобный характер распределения нуклеотидов в последовательностях ДНК, а также подтверждено наличие дальних корреляций в нуклеотидных последовательностях.

Впервые предложен метод разделения гауссовых пиков при анализе экспериментальных данных на основе непрерывного вейвлет-преобразования, что важно для задач анализа спектров, масс-спектроскопии, анализа электрофорограмм.

1.4 Научная и практическая ценность

Значимость работы заключается в том, что:

1. На основе вейвлет-преобразования удалось построить стохастическую теорию возмущений свободную от расходимостей для многомасштабных систем.
2. Вычислен однопетлевой вклад в коэффициент поверхностного натяжения для уравнения Паризи-Кардара-Занга, описывающего динамику границы раздела фаз в присутствии случайной силы, действующей на фиксированном масштабе.
3. В рамках стохастического уравнения Навье-Стокса удалось, не прибегая к обрезанию по импульсам или использованию методов ренормализационной группы, вычислить конечный однопетлевой вклад в функцию отклика и парную корреляционную функцию для случайной силы действующей на фиксированном масштабе.
4. Формализм стохастического квантования обобщен путем введения случайной силы зависящей от масштаба, что позволило построить схему стохастического квантования свободную от петлевых расходимостей.
5. Непрерывное вейвлет-преобразование распространено на поле p -адических чисел \mathcal{Q}_p . Предложен геометрический подход к p -адической квантовой теории поля, который дал возможное объяснение угловых корреляций, обнаруженных в экспериментах по исследованию анизотропии микроволнового реликтового излучения.

6. Развитые методы вейвлет-анализа случайных функций зависящих от масштаба стали заметным вкладом в компьютерные методы анализа первичной структуры ДНК, применяемые в различных лабораториях. Обнаруженное самоподобие первичной структуры ДНК может быть использовано при конструировании лекарств для лечения генетических болезней.
7. Предложенный автором диссертации метод разделения гауссовых пиков нашел применение в обработке данных различных экспериментов в ядерной физике. Данный метод также используется в программном обеспечении, используемом при обработке результатов биохимических анализов методом гель-электрофореза.

1.5 Достоверность полученных результатов

Выполненные в работе исследования опираются на использование канонических методов теоретической физики, теории вероятности, функционального анализа, а также методов квантовой теории поля и теории турбулентности. Подавляющая часть результатов получена в аналитической форме, что дает возможность ясно интерпретировать полученные эффекты и осуществить предельные переходы к ранее известным результатам.

1.6 Апробация работы

Основные результаты работы докладывались и обсуждались на Международной конференции "Frontiers of Fundamental Physics IV" (Хайдерабад, Индия, 2000), "Frontiers of Fundamental Physics V" (Хайдерабад, Индия, 2003), "Frontiers of Fundamental and Computational Physics VI" (Удине, Италия, 2004), на Международной конференции "Современные проблемы радиобиологии, радиоэкологии и эволюции" (Дубна, 2000), на Международной конференции "Group 24: Physical and Mathematical Aspects of Symmetries" (Париж, Франция, 2002), на Международной конференции "ТН-2002: Theoretical Physics 2002" (Париж, Франция, 2002), на Международной конференции "SCI2003: Focus Symposium on Quantum Physics and Communications" (Дубна, 2003), на Международной конференции "STM'03: Small Triangle Meeting in Theoretical Physics 2003" (Татры, Словакия, 2003), на Международной конференции по p -адической математической физике (Москва, 2003), на 2й Международной конференции по p -адической математической физике (Белград, 2005), на Международной конференции "COSLAB'04: Vacuum instability in condensed matter and cosmology" (Ламми, Финляндия, 2004),

на Международной конференции “МСС-04: Трансформация волн, когерентные структуры и турбулентность” (Москва, 2004), на международной конференции “Ренормализационная группа-2005” (Хельсинки, Финляндия, 2005), на международной конференции “Жак Артонг Симпозиум” (Страсбург, Франция, 2006).

Материал диссертации докладывался на семинарах в Институте космических исследований РАН (Москва), Объединенном институте ядерных исследований (Дубна), Математическом институте им. В.А.Стеклова РАН (Москва), Физическом институте им. П.Н.Лебедева РАН (Москва), Научном центре корпорации Б.М.Бирла (Хайдерабад, Индия), Университете Хайдерабада (Индия), Университете штата Альберта (Эдмонтон, Канада), Обсерватории Пари-Медон (Медон, Франция), Университете Павиа (Италия).

1.7 Публикации

В основу диссертации положена монография Altaisky M.V., “Wavelets: Theory, Applications, Implementation”, Universities Press Ltd., 2005. Основные результаты опубликованы в работах [1, 12, 3, 25, 14, 16, 4, 2, 6, 15, 13, 53, 8, 9, 49, 50, 52, 51].

Личный вклад автора. Все результаты, изложенные в диссертации, получены автором либо самостоятельно, либо при его непосредственном, активном и творческом участии на всех этапах работы. В список положений, выносимых на защиту, включены лишь результаты и выводы, в которых вклад автора диссертации в проведенных исследованиях был основным или, по крайней мере, равным вкладу других соавторов.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из Введения, восьми глав, Заключение и Приложения, содержащего некоторые подробности вычислений. Она содержит 184 страниц текста, 31 рисунок и 3 таблицы. Список литературы включает 228 наименований литературных источников. Полный объем диссертации 220 страниц.

2 СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **Введении** обоснована актуальность исследований, описанных в диссертации, сформулирована цель работы и приведено краткое изложение содержания диссертации.

В **первой главе** диссертации (“Основные сведения о непрерывном вейвлет-преобразовании”) дается исторический обзор появления вейвлет-методов в физических задачах, приводятся аргументы в пользу того, что вейвлет-разложение

представляет собой метод, наиболее адекватный реальным измерениям физических величин, которые всегда осуществляются с конечным разрешением. Здесь же даются основные сведения из теории непрерывного вейвлет-преобразования и теории групп, существенные для дальнейшего изложения. Приводится ряд теорем, используемых при анализе локальной регулярности функций.

С математической точки зрения, вейвлет-преобразование представляет собой разложение функции по представлениям аффинной группы

$$\mathbf{x}' = a\mathbf{x} + \mathbf{b}. \quad (1)$$

В этом смысле истоки вейвлет-преобразования можно найти в работах Г.Вейля. Используя единственный затравочный вектор ψ , называемый базисным вейвлетом, можно определить унитарное представление группы (1) в $L^2(\mathbb{R}^d)$

$$U(a, \mathbf{b})[\psi(\mathbf{x})] = |a|^{-\frac{d}{2}} \psi\left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{b}}{a}\right). \quad (2)$$

Легко проверить, что мера Хаара $d\mu_L(a, \mathbf{b}) = \frac{dad^d b}{|a|^{d+1}}$ является левоинвариантной мерой для всех $a \neq 0$.

Явные формулы непрерывного вейвлет-преобразования в пространстве $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ имеют вид

$$W_\psi(a, b)[f] = \int |a|^{-\frac{d}{2}} \bar{\psi}\left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{b}}{a}\right) f(\mathbf{x}) d^d x \quad (3)$$

$$f(\mathbf{x}) = C_\psi^{-1} \int |a|^{-\frac{d}{2}} \psi\left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{b}}{a}\right) W_\psi(a, \mathbf{b})[f] \frac{dad^d b}{|a|^{d+1}}. \quad (4)$$

Условие *допустимости*, накладываемое на базисный вейвлет ψ , обеспечивающее существование обратного вейвлет-преобразования (4), может быть получено путем применения преобразования Фурье к выражениям (3,4). Для изотропных базисных вейвлетов ψ оно имеет вид

$$C_\psi = 2S_d^{-1} \int \frac{|\tilde{\psi}(\mathbf{k})|^2}{|\mathbf{k}|^d} d^d k < \infty, \quad (5)$$

где $S_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}$ – площадь единичной сферы.

Вейвлет-коэффициенты (3) можно рассматривать как результат измерения функции f в точке b с помощью измерительного прибора с апертурой ψ при характерном разрешении a . Таким образом вводится новый класс

функций, зависящих как от координаты, так и от масштаба. Функции зависящие от масштаба, по сути, уже давно используются в физике сплошных сред, квантовой теории поля, в других разделах математической физики, а также при анализе временных рядов в экономике и биологических науках. Теория таких функций до сих пор не выделилась в самостоятельный раздел математической физики, хотя все предпосылки – начиная с теории Колмогорова развитой гидродинамической турбулентности, и кончая методами ренормализационной группы в квантовой теории поля – для этого имеются. Тем не менее, вейвлет-преобразование до сих пор остается по большей части лишь инструментом для анализа данных, либо используется для построения галеркинских базиса при решении дифференциальных уравнений. На качественном уровне, идея зависящих как от масштаба, так и от координаты функций $v_a(x)$ – скорости турбулентных пульсаций масштаба a – как самостоятельного объекта имеется уже в трудах А.Н.Колмогорова [57], однако строгого математического оформления эта идея тогда не получила.

Во **второй главе** (“Случайные процессы и квантовая теория поля”) дается обзор методов квантовой теории поля, в контексте необходимости использования функций, зависящих от масштаба. Рассматривается связь квантовополевых методов со стохастическими дифференциальными уравнениями.

Оригинальная часть диссертации начинается с **третьей главы** (“Многомасштабные случайные процессы”). Основываясь на идеях колмогоровской теории развитой турбулентности [57] о взаимодействии пульсаций различных масштабов, а так же на том, что значения реально измеряемых физических величин всегда вычисляется как среднее значение по некоторому физическому объему, автор обобщает процедуру “усреднения функции ϕ на масштабе l ”. Эта процедура (см. например [21]) состоит в интегрировании “истинного” поля скорости по объему $(\Delta x)^D$ с центром в точке x :

$$\phi_l(\mathbf{x}) = l^{-D} \int_{|y|<l} \phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d^D \mathbf{y} \quad (6)$$

в D -мерном евклидовом пространстве \mathbb{R}^D .

Определение (6) содержит как минимум два предположения: (i) существование “истинного” поля $\phi_l(\mathbf{x}) : l \rightarrow 0$; (ii) однородность меры $d\mu(\mathbf{y}) = d^D \mathbf{y}$. Это достаточно сильные предположения, справедливость которых требует проверки в случае конкретных физических процессов. В частности они не справедливы для гидродинамической турбулентности, когда проявляется перемежаемость; усреднение же по бесконечно малому объему может оказаться физически бессмысленным когда этот объем достаточно мал.

Освободиться от этих предположений, как было предложено автором в работе [6], можно используя аксиомы кратно-масштабного анализа [28, 29] и непрерывное вейвлет-преобразование. Применение непрерывного вейвлет-преобразования

$$v(x, \cdot) = \frac{2}{C_\psi} \int_A^\infty \frac{dl}{l} \int_{\mathbb{R}^d} d^d b l^{-d} \psi\left(\frac{x-b}{l}\right) v_l(b, \cdot) \quad (7)$$

к уравнениям Навье-Стокса позволяет рассматривать $v_l(b, \cdot)$ как самостоятельный объект. Таким образом, гидродинамическое поле скорости (или другой физический процесс) теперь может описываться набором функций $\{v_l(x, \cdot)\}_l$, индексированным параметром масштаба l . Предельный переход в (7) к внемасштабному полю ($A \rightarrow 0$) при этом может и не существовать.

Отказ от существования предельного перехода к дифференцируемому (внемасштабному) полю, предложенный автором в работе [6], позволяет проводить описание гидродинамической турбулентности в рамках стохастических дифференциальных уравнений с параметрами, зависящими от масштаба, в полном соответствии с идеями колмогоровской теории турбулентности. Это дает возможность исследовать n -точечные корреляционные функции гидродинамических полей, взятых в разных точках и на различных масштабах, а следовательно более точно определять влияние крупномасштабных возмущений на мелкомасштабные, а также исследовать свойства перемежаемости.

Для обычных случайных процессов второго порядка $X(t, \omega)$, $t \in \mathbb{R}, \omega \in \Omega$ вейвлет-образ

$$W_a(t, \omega) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{a}} \bar{\psi}\left(\frac{u-t}{a}\right) X(u, \omega) du, \quad t \in \mathbb{R}, a > 0, \omega \in \Omega \quad (8)$$

также является случайным процессом. При этом автокорреляционная функция исходного случайного процесса (R_X) определяет автокорреляционную функцию вейвлет-образа (R_W):

$$R_W(a, t, b, s) \equiv \overline{W_a(t)W_b(s)} = \int \frac{1}{\sqrt{ab}} \psi\left(\frac{u-t}{a}\right) \bar{\psi}\left(\frac{v-s}{b}\right) R_X(u, v) dudv. \quad (9)$$

В работе [49] автором было показано, что рассмотрение пространства случайных вейвлет-коэффициентов $W_a(t, \cdot)$ как самостоятельного вероятностного пространства предоставляет большие возможности, чем отображение пространства случайных функций в пространство их вейвлет-коэффициентов. Действительно, взяв для простоты гауссов белый шум

$$\langle \xi(x_1)\xi(x_2) \rangle = D_0 \delta^d(x_1 - x_2), \quad \langle \xi(t) \rangle = 0 \quad (10)$$

и произведя вейвлет-преобразование получим для корреляционной функции

$$D(a_1, b_1; a_2, b_2) = D_0 \int dx \frac{1}{\sqrt{a_1 a_2}} \bar{\psi} \left(\frac{x - b_2}{a_2} \right) \psi \left(\frac{x - b_1}{a_1} \right).$$

С другой стороны, нетрудно проверить, что корреляционная функция преобразованного процесса

$$\langle \widetilde{W}(a_1, k_1) \widetilde{W}(a_2, k_2) \rangle = C_\psi (2\pi)^d \delta^d(k_1 + k_2) a_1^{d+1} \delta(a_1 - a_2) D_0 \quad (11)$$

также совпадает с белым шумом (10).

В реальных физических экспериментах фиксируется суперпозиция флуктуаций различных масштабов. По этой причине, для описания гидродинамической турбулентности и описания неупорядоченных сред удобно обобщить понятие спектрального разложения случайных функций, факторизовав случайную меру, отвечающую флуктуациям данного масштаба и меру на группе масштабных преобразований [6].

Параграф “Многомасштабная стохастическая динамика”, основанный на работе [49], посвящен итерационному решению стохастического уравнения Ланжевена с многомасштабной случайной силой, определенной в пространстве вейвлет-коэффициентов. Эта глава иллюстрирует возможность конструирования случайных процессов путем задания корреляционных свойств их вейвлет-коэффициентов и использования таких процессов для решения физических задач.

Уравнение Ланжевена является одной из наиболее общих аппроксимаций для динамических систем, взаимодействующих с флуктуирующим окружением. Оно возникает при описании магнетика в присутствии флуктуаций магнитного поля, при описании гидродинамической турбулентности, при описании динамики границы раздела фаз и во многих других задачах [31, 48, 26, 47]. Уравнение Ланжевена возникает также в задачах стохастического квантования калибровочных теорий; при этом, введение дополнительного фиктивного времени t , по которому осуществляется эволюция, и случайной силы представляет собой чисто математический прием [39].

В наиболее общей форме уравнение Ланжевена может быть представлено как

$$\frac{\partial \phi(t, \mathbf{x})}{\partial t} = U[\phi(t, \mathbf{x})] + \eta(t, \mathbf{x}), \quad \langle \eta(x) \eta(x') \rangle = D(x, x'); \quad (12)$$

случайная сила $\eta(t, \mathbf{x})$ предполагается гауссовой, с нулевым средним значением $\langle \eta \rangle = 0$. Здесь и далее используются $(d + 1)$ -мерные обозначения $x \equiv (\mathbf{x}, t)$, $k \equiv (\mathbf{k}, \omega)$.

Стандартный метод решения уравнения (12) заключается во введении малого параметра λ при потенциале взаимодействия U , с последующим итерационным решением системы, в каждом порядке теории возмущений. Усреднение по гауссовой случайной силе η сводится к вычислению парных корреляторов $\langle \eta\eta \rangle$, а все члены содержащие нечетное число η обращаются в нуль.

Использование гауссовой случайной силы обусловлено как математическими, так и физическими причинами. С одной стороны, для случая гауссовой статистики, все высшие моменты факторизуются по теореме Вика в произведения парных корреляторов; с другой стороны, гауссова случайная сила является достаточно хорошей аппроксимацией тепловых флуктуаций, согласуется с соотношениями взаимности Онсагера, дает правильные соотношения между корреляционной функцией и функцией отклика [31, 17]. С математической точки зрения, важность уравнения Ланжевена обусловлена также эквивалентностью между усреднением по гауссовой случайной силе в уравнении (12) и фейнмановским интегрированием по путям в евклидовой теории поля, конструируемой на основе потенциала $U[\phi]$ и коррелятора D .

Для построения итерационного решения уравнения Ланжевена потенциал U представляют в виде суммы линейной $\hat{L}\phi$ части, нелинейного взаимодействия $V[\phi]$ и регулярной внешней силы $f(x)$:

$$\frac{\partial\phi(x)}{\partial t} = \hat{L}\phi(x) + \lambda V[\phi(x)] + f(x) + \eta(x) \quad (13)$$

Решение уравнения (13) может быть символически записано в виде

$$\phi = \hat{G}_0[\lambda V[\phi] + f + \eta], \quad (14)$$

где $\hat{G}_0^{-1} = \partial_t - \hat{L}$, может быть разложена в степенной ряд по λ (формальному малому параметру разложения) вида $\phi = \phi_0 + \lambda\phi_1 + \lambda^2\phi_2 + \dots$

Как в квантовой теории поля, так и в статистических задачах, среднее значение поля $\langle \phi \rangle$ получается путем применения теоремы Вика при усреднении по гауссовой случайной силе η . Полная функция Грина $\phi(x) = \int G(x, x')f(x')dx', t \geq t'$, определяющая усредненный по случайной силе η отклик системы на регулярную силу f , также раскладывается в ряд по λ .

Возьмем хорошо известную модель Кардара-Паризи-Занга [26], описывающую динамику границы фаз во флуктуирующей среде:

$$\dot{Z} - \nu\Delta Z = \frac{\lambda}{2}(\nabla Z)^2 + \eta, \quad (15)$$

где $Z(x, t)$ – отклонение профиля границы раздела фаз от равновесного. Уравнение (15) описывает процессы адсорбции микрочастиц из газовой фазы, рост снежного покрова и другие процессы. Применяя вейвлет преобразование по пространственному аргументу

$$Z(x) = C_\psi^{-1} \int \exp(i(\mathbf{k}\mathbf{x} - k_0 t)) a^{\frac{d}{2}} \tilde{\psi}(a\mathbf{k}) \tilde{Z}(a, k) \frac{d^{d+1}k}{(2\pi)^{d+1}} \frac{da}{a^{d+1}} \quad (16)$$

к уравнению (15) и используя случайную силу, удовлетворяющую условиям

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\eta}(a_1, k_1) \tilde{\eta}(a_2, k_2) \rangle &= C_\psi (2\pi)^{d+1} \delta^{d+1}(k_1 + k_2) a_1^{d+1} \delta(a_1 - a_2) D(a_2, \mathbf{k}_2), \\ \langle \tilde{\eta}(a, k) \rangle &= 0, \end{aligned} \quad (17)$$

после несложных преобразований, из интегрального уравнения

$$\begin{aligned} (-i\omega + \nu \mathbf{k}^2) \tilde{Z}(a, k) &= \eta(a, k) - \frac{\lambda}{2} a^{\frac{d}{2}} \overline{\tilde{\psi}(a\mathbf{k})} C_\psi^{-2} \int (a_1 a_2)^{\frac{d}{2}} \tilde{\psi}(a_1 \mathbf{k}_1) \tilde{\psi}(a_2 (\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)) \\ &\quad \mathbf{k}_1 (\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \tilde{Z}(a_1, k_1) \tilde{Z}(a_2, k - k_1) \frac{d^{d+1}k_1}{(2\pi)^{d+1}} \frac{da_1}{a_1^{d+1}} \frac{da_2}{a_2^{d+1}} \end{aligned}$$

получим, в однопетлевом приближении, выражение для функции отклика

$$G(k) = G_0(k) - \lambda^2 G_0^2(k) \int \frac{d^{d+1}k_1}{(2\pi)^{d+1}} \Delta(k_1) \mathbf{k}_1 (\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) |G_0(k_1)|^2 \mathbf{k} \mathbf{k}_1 G_0(k - k_1) + O(\lambda^4), \quad (18)$$

где $G_0^{-1}(k) = -i\omega + \nu \mathbf{k}^2$ - нулевое приближение функции отклика, а

$$\Delta(k) \equiv C_\psi^{-1} \int \frac{da}{a} |\tilde{\psi}(a\mathbf{k})|^2 D(a, \mathbf{k}) \quad (19)$$

– усредненная по масштабам корреляционная функция силы. Аналогичным образом, для парной корреляционной функции получим

$$\begin{aligned} C(a_i, a_f, k) &= \frac{\lambda^2}{2} |G_0(k)|^2 \overline{\tilde{\psi}(a_i \mathbf{k}) \tilde{\psi}(-a_f \mathbf{k})} \\ &\quad \int \frac{d^{d+1}k_1}{(2\pi)^{d+1}} |G_0(k_1)|^2 |G_0(k - k_1)|^2 [\mathbf{k}_1 (\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)]^2 \Delta(k_1) \Delta(k - k_1) \end{aligned} \quad (20)$$

Для независящего от масштаба коррелятора силы, после интегрирования (19), выражения (18,20) сводятся к известному результату [26].

Рассмотрим теперь случай накачки, действующей на фиксированном масштабе a_0 :

$$D(a, \mathbf{k}) = \delta(a - a_0) D(\mathbf{k}). \quad (21)$$

Выберем в качестве базисного вейвлета “Мексиканскую шляпу”

$$\tilde{\psi}(\mathbf{k}) = (2\pi)^{d/2}(-i\mathbf{k})^2 \exp(-\mathbf{k}^2/2). \quad (22)$$

Подставляя (21) и (22) в (18), интегрируя по частоте, в главном порядке по малому параметру $x = |\mathbf{k}|/|\mathbf{k}_1|$, аналогично тому, как это проделано в [18], для размерности $d > 2$, получим

$$G(k) = G_0(k) + \lambda^2 G_0^2(k) \frac{S_d}{(2\pi)^d} \frac{a_0^3 k^2}{\nu^2} \frac{d-2}{8d} \int_0^\infty D(\mathbf{q}) \exp(-(a_0 \mathbf{q})^2) q^{d+1} dq + O(\lambda^4). \quad (23)$$

Для независимой от \mathbf{q} амплитуды шума, $D(\mathbf{q}) = D_0$, выражение конечно и не требует дальнейшей перенормировки. В пределе $\omega, \mathbf{k} \rightarrow 0$ однопетлевая поправка к коэффициенту поверхностного натяжения ν , следующая из (23), равна

$$\nu_{eff} = \nu \left[1 - \frac{\lambda^2}{\nu^3 k^2} \frac{d-2}{16d} \frac{S_d}{(2\pi)^d} a_0^{1-d} D_0 \Gamma\left(1 + \frac{d}{2}\right) + O(\lambda^4) \right]. \quad (24)$$

Полностью аналогичным образом проводятся вычисления и для других потенциалов взаимодействия. Например, для квадратичного взаимодействия $\frac{\lambda^2}{2} Z^2$ выражения для (18) и (20) будут отличаться от приведенных выше лишь отсутствием скалярных произведений в вершинах.

Что касается вклада высших порядков теории возмущений, то при использовании вейвлетов $\tilde{\psi}(k)$, локализованных в k -пространстве, и шума $D(a, k)$ с ограниченной по a полосой, эффективная константа связи, по которой реально производится разложение [23], может быть сделана малой за счет малой амплитуды шума. Так, для базисных вейвлетов семейства $\tilde{\psi}(k) = (2\pi)^{d/2}(-ik)^n \exp(-k^2/2)$, $n > 0$ и коррелятора $D(a, k) = D_0 \delta(a - a_0)$, эффективной константой связи является

$$\bar{\lambda}^2 = \frac{\lambda^2 D_0}{\nu^3 a_0}.$$

В параграфе “Непрерывное вейвлет-преобразование в стохастической гидродинамике” итерационный метод решения стохастического дифференциального уравнения путем непрерывного вейвлет-преобразования динамических переменных и включения аддитивной накачки с некоррелированными масштабными компонентами применен к описанию развитой гидродинамической турбулентности в формализме стохастической гидродинамики. Большинство работ по применению вейвлет-преобразования к гидродинамической турбулентности посвящено либо анализу экспериментально измеренных турбулентных полей с помощью

“вейвлетного микроскопа”, позволяющего одновременно исследовать поле скорости на различных масштабах [54], либо численному решению уравнений Навье-Стокса с использованием дискретного вейвлет-преобразования [32, 41]. В настоящей диссертационной работе, основываясь на работе [49], непрерывное вейвлет-преобразование впервые применено в формализме стохастической гидродинамики. Исходя из физических соображений подбирая параметры случайной силы, определенной в пространстве вейвлет-коэффициентов, мы избавляемся от петлевых расходимостей в теории возмущений. В качестве примеров мы приведем однопетлевой вклад в функцию Грина и парный коррелятор поля скорости. В предельном случае обычной дельта-коррелированной случайной силы восстанавливаются известные результаты стохастической гидродинамики. В построенном формализме естественным образом интерпретируются гипотезы Колмогорова и осуществляется замыкание системы уравнений для моментов поля скорости. Более того, само пространство функций $\phi_a(x, \cdot)$, зависящих как от координаты, так и от масштаба, представляет собой математический аппарат, адекватный реально измеряемым величинам.

В рамках подхода стохастической гидродинамики исследование развитой гидродинамической турбулентности основывается на системе уравнений Навье-Стокса со случайной силой

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \nu \Delta \mathbf{u} - \nabla \left(\frac{p}{\rho} \right) + \eta(\mathbf{x}, t). \quad (25)$$

Вычисление корреляционных функций осуществляется с помощью преобразования Фурье от исходных уравнений (25):

$$(-i\omega + \nu \mathbf{k}^2) \tilde{u}_i(\mathbf{k}, \omega) - \int \frac{d^{d+1}q}{(2\pi)^{d+1}} M_{ijk}(\mathbf{k}) \tilde{u}_j(q) \tilde{u}_k(k - q) = \tilde{\eta}_i(k), \quad (26)$$

$$\langle \tilde{\eta}_i(k_1) \tilde{\eta}_j(k_2) \rangle = (2\pi)^{d+1} \delta^{d+1}(k_1 + k_2) P_{ij}(\mathbf{k}_1) D(\mathbf{k}_1). \quad (27)$$

При этом условие несжимаемости приводит к появлению поперечного проектора $P_{ij}(\mathbf{k}) = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{\mathbf{k}^2}$ в корреляторе силы (27) и в вершине взаимодействия $M_{ijk}(\mathbf{k}) = -\frac{i}{2} [k_j P_{ik}(\mathbf{k}) + k_k P_{ij}(\mathbf{k})]$. Преобразование Фурье, однако, является существенно нелокальным и не позволяет исследовать локальные свойства. Использование вейвлет-разложения позволяет записать уравнения для компонент поля скорости в данной точке b и на данном масштабе a . Это весьма важно, так как именно с локальными свойствами связано образование когерентных структур. Кроме того, экспериментально измеряемая “скорость потока в точке

x ” реально сводится к аппаратному усреднению по объему a^d , при этом для справедливости гидродинамического приближения необходимо $a \gg \lambda$, где λ – средняя длина свободного пробега. Использование непрерывного вейвлет-преобразования позволяет получить некоторые общие закономерности для пульсаций поля скорости заданного масштаба в заданной точке не апеллируя к конкретному виду аппаратной функции.

В результате применения непрерывного вейвлет-преобразования к уравнениям (25) приходим к системе интегральных уравнений для масштабных компонент $\tilde{u}_{ai}(k)$:

$$\begin{aligned} (-i\omega + \nu \mathbf{k}^2) \tilde{u}_{ai}(k) &= \tilde{\eta}_{ai}(k) \\ &+ \left(\frac{2}{C_\psi} \right)^2 \int M_{ijk}^{aa_1 a_2}(\mathbf{k}, \mathbf{q}, \mathbf{k}-\mathbf{q}) \tilde{u}_{a_1 j}(q) \tilde{u}_{a_2 k}(k-q) \frac{da_1}{a_1} \frac{da_2}{a_2} \frac{d^{d+1}q}{(2\pi)^{d+1}}, \end{aligned} \quad (28)$$

где $M_{ijk}^{aa_1 a_2}(\mathbf{k}, \mathbf{q}, \mathbf{k}-\mathbf{q}) = \overline{\tilde{\psi}(a\mathbf{k}) M_{ijk}(\mathbf{k}) \tilde{\psi}(a_1 \mathbf{q}) \tilde{\psi}(a_2(\mathbf{k}-\mathbf{q}))}$, а вейвлет-преобразование записано в L^1 -норме, что обеспечивает одинаковую физическую размерность поля скорости $u(x)$ и его масштабных компонент $u_a(x)$:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \frac{2}{C_\psi} \int_0^\infty \frac{da}{a} \int \frac{d^{d+1}k}{(2\pi)^{d+1}} \exp(i(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega t)) \tilde{\psi}(a\mathbf{k}) \mathbf{u}_a(k).$$

Из (28) стандартным образом получают уравнения для моментов. Так, при отсутствии случайной силы в уравнении Навье-Стокса, вторые моменты связаны с третьими соотношением

$$\begin{aligned} (\partial_t + 2\nu \mathbf{k}^2) \sum_i \langle \overline{\tilde{u}_{ai}(\mathbf{k}, t)} u_{ai}(\mathbf{k}, t) \rangle &= \left(\frac{2}{C_\psi} \right)^2 \int \frac{da_1}{a_1} \frac{da_2}{a_2} \frac{d^d \mathbf{q}}{(2\pi)^d} M_{ijk}^{aa_1 a_2}(\mathbf{k}, \mathbf{q}, \mathbf{k}-\mathbf{q}) \\ &\times \langle \overline{\tilde{u}_{ai}(\mathbf{k}, t)} \tilde{u}_{a_1 j}(\mathbf{q}, t) \tilde{u}_{a_2 k}(\mathbf{k}-\mathbf{q}, t) \rangle + \text{э.с.}, \end{aligned} \quad (29)$$

Особый интерес вызывает случайная сила, δ -коррелированная по масштабам:

$$\langle \tilde{\eta}_{a_1 i}(k_1) \tilde{\eta}_{a_2 j}(k_2) \rangle = (2\pi)^{d+1} \delta^{d+1}(k_1 + k_2) \frac{C_\psi}{2} a_1 \delta(a_1 - a_2) P_{ij}(\mathbf{k}_1) D(a_1, \mathbf{k}_1). \quad (30)$$

Теперь стохастическая диаграммная техника в случае масштабно-зависимой накачки (30) строится таким же образом как и обычная техника Уайльда [45]. Отличие состоит в том, что в результате интегрирования по масштабным аргументам $\frac{da}{a}$, в присутствии дельта-функции от разности масштабов, спектральная

плотность обычной теории возмущений $D_{ij}(\mathbf{k})$ заменяется на эффективную спектральную плотность

$$\Delta_{jl}(\mathbf{q}) = \frac{2P_{jl}(\mathbf{q})}{C_\psi} \int \frac{da}{a} |\tilde{\psi}(a\mathbf{q})|^2 D(a, \mathbf{q}). \quad (31)$$

Напомним, что однопетлевой вклад в функцию Грина имеет вид:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{ai}(k) &= G_0(k) \tilde{\eta}_{ai}(k) + \overline{\tilde{\psi}(a\mathbf{k})} G_0^2(k) 4\lambda^2 \left(\frac{2}{C_\psi} \right) \int \frac{d^{d+1}q}{(2\pi)^{d+1}} \frac{da'}{a'} M_{ijk}(\mathbf{k}) |G_0(q)|^2 \Delta_{jl}(\mathbf{q}) \\ &\times G_0(k-q) M_{klm}(\mathbf{k}-\mathbf{q}) \tilde{\psi}(a'\mathbf{k}) \tilde{\eta}_{a'm}(k) + O(\lambda^4), \end{aligned} \quad (32)$$

где $\lambda = 1$ – формальный параметр разложения, стоящий при вершине взаимодействия M ; $G_0(k) = (-i\omega + \nu\mathbf{k}^2)^{-1}$ – функция Грина нулевого порядка.

Для однопетлевого вклада в парную корреляционную функцию масштабных компонент поля скорости $C_2(a_1, k_1; a_2, k_2) = \langle \tilde{\mathbf{u}}_{a_1}(k_1) \tilde{\mathbf{u}}_{a_2}(k_2) \rangle$ имеем

$$\begin{aligned} C_2(a_1, k_1, a_2, k_2) &= \delta^{d+1}(k_1 + k_2) \overline{\tilde{\psi}(a_1\mathbf{k}_1)} \tilde{\psi}(-a_2\mathbf{k}_1) C_{eff}(k_1), \\ C_{eff}(k) &= 2\lambda^2 |G_0(k)|^2 \int \frac{d^{d+1}q}{(2\pi)^{d+1}} \Delta(\mathbf{q}) \Delta(\mathbf{k}-\mathbf{q}) c_2(\mathbf{k}, \mathbf{q}) |G_0(q)|^2 |G_0(k-q)|^2, \end{aligned} \quad (33)$$

где $c_2(\mathbf{k}, \mathbf{q})$ – след однопетлевой тензорной структуры. Для конкретного типа вейвлета “мексиканская шляпа” в трехмерном пространстве, $n = 2$, $d = 3$, и накачки, действующей на фиксированном масштабе a_0 , в длинноволновом приближении ($x = \frac{k}{q} \rightarrow 0$), имеем:

$$C_{eff}^{d=3, n=2}(k \rightarrow 0) = \frac{7}{40} \frac{k^2 |G_0(k)|^2 \pi^{\frac{3}{2}} a_0^3 D_0^2}{\nu^3 \sqrt{2}} \lambda^2. \quad (34)$$

Таким образом, использование масштабных компонент поля скорости вместо функций $u(x) \in L^2(\mathbb{R}^3)$ позволяет с самого начала строить теорию возмущений свободную от расходимостей, а не устранять их потом с помощью процедур регуляризации. Кроме того, именно в терминах масштабных компонент $u_a(x)$ находит наиболее адекватное выражение гипотеза Колмогорова о самоподобии пульсаций турбулентного поля скорости. Действительно, теория Колмогорова, описывающая локально-изотропную гидродинамическую турбулентность [57], сформулирована в терминах относительных скоростей

$$\delta u(r, \lambda l) \stackrel{law}{=} \lambda^h \delta u(r, l), \quad \lambda \in \mathbb{R}_+. \quad (35)$$

где $\delta u(r, l) = u(r + l) - u(r)$. Закон самоподобия (35) представляет собой частный случай более общего утверждения, сформулированного относительно масштабных компонент поля скорости, определенных посредством вейвлет-преобразования. В общем же случае может быть сформулировано следующее утверждение (вторая гипотеза подобия Колмогорова в терминах вейвлет-преобразования):

При тех же предположениях, что и для первой гипотезы (Н1), турбулентное поле скорости самоподобно на малых (но все же $l \gg \nu^{\frac{3}{4}} \epsilon^{-\frac{1}{4}}$) масштабах, в том смысле, что пульсации поля скорости, определенные посредством вейвлет-преобразования $u_l(b) = \int \frac{1}{l} \bar{\psi} \left(\frac{x-b}{l} \right) u(x) dx$, где $\psi(x)$ – произвольная анализирующая функция удовлетворяющая условию допустимости (5) и условию регулярности $\int_{-\infty}^{\infty} dx (1 + |x|) |\psi(x)| < \infty$, имеют следующее степенное поведение:

$$|u_l(b)|^2 \stackrel{law}{=} l^{2h}, \quad h = \frac{1}{3}, \quad (36)$$

для всех b в области, занятой турбулентностью.

При такой формулировке физическое содержание гипотез Колмогорова не меняется, а лишь переносится на масштабный аргумент скорости, которая теперь становится функцией двух переменных: координаты (b) и масштаба (l), на котором производится измерение скорости. Определенное таким образом поле скоростей является функционалом от базисного вейвлета, закон же распределения величин $u_l(b)$ от базисного вейвлета зависеть не должен, и часто именно он проверяется при численной обработке экспериментальных данных [54].

Глава 4 (“Стохастическое квантование”) посвящена применению многомасштабных процессов к задачам стохастического квантования. Стохастическое квантование (СК) представляет собой способ квантования полевых моделей, идея которого состоит в том, чтобы представить рассматриваемую теорию поля в d -мерном пространстве в качестве равновесного предела некоторой $(d + 1)$ -мерной статистической модели. Метод стохастического квантования был впервые предложен в работе Паризи и Ву [39].

Технически, метод СК сводится к введению дополнительного, по отношению к имеющимся в исходной теории d измерениям, фиктивного времени τ и замены квантовых полей исходной теории стохастическими полями в расширенном $(d + 1)$ -мерном пространстве, $\phi(x) \rightarrow \phi(x, \tau)$. Эволюция стохастических полей относительно фиктивного времени τ определяется уравнением Ланжевена

$$\frac{\partial \phi(x, \tau)}{\partial \tau} + \frac{\delta S_E}{\delta \phi(x, \tau)} = \eta(x, \tau), \quad (37)$$

С начальным условием $\phi(x, \tau = 0) = \phi(x)$. Здесь $S_E[\phi]$ – евклидово действие исходной теории, а $\eta(x, \tau)$ – гауссов белый шум с нулевым средним, дельта-коррелированный как по обычным координатам, так и по фиктивному времени.

Оригинальный вклад автора заключается в применении для стохастического квантования многомасштабной случайной силы, определенной с помощью непрерывного вейвлет-преобразования. Применяя вейвлет-преобразование и к динамическим полям ϕ , и к случайной силе η мы получаем теорию, в которой динамические поля локализованы как по координате, так и по масштабу взаимодействия. При этом случайная сила, локализованная вблизи фиксированного масштаба a_0 , по построению обеспечивает конечность теории возмущений.

Следуя работам [49, 10, 52], выполним непрерывное вейвлет-преобразование стохастических полей и случайной силы по пространственному аргументу (под пространственными измерениями $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ мы понимаем евклидово d -мерное пространство исходной теории, а под временным – фиктивное время τ):

$$\phi(x) = \frac{2}{C_\psi} \int_0^\infty \frac{da}{a^{d+1}} \int \frac{d^{d+1}k}{(2\pi)^{d+1}} \exp(i(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega\tau)) a^{\frac{d}{2}} \tilde{\psi}(a\mathbf{k}) \phi(a, k). \quad (38)$$

Мы используем $(d+1)$ -мерные обозначения $x = (\mathbf{x}, \tau)$, $k = (\mathbf{k}, \omega)$. Случайную силу определим согласно (17). После подстановки (38) в уравнение Ланжевена приходим к стохастическому интегральному уравнению для полей $\phi(a, k, \cdot)$

$$(-i\omega + \mathbf{k}^2 + m^2)\phi(a, k) = \eta(a, k) - \frac{\lambda}{2} a^{\frac{d}{2}} \overline{\tilde{\psi}(a\mathbf{k})} \left(\frac{2}{C_\psi} \right)^2 \int_0^\infty \frac{da_1}{a_1^{d+1}} \frac{da_2}{a_2^{d+1}} \int \frac{d^{d+1}k_1}{(2\pi)^{d+1}} (a_1 a_2)^{\frac{d}{2}} \tilde{\psi}(a_1 \mathbf{k}_1) \tilde{\psi}(a_2 (\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)) \phi(a_1, k_1) \phi(a_2, k - k_1). \quad (39)$$

Используя аппроксимацию нулевого порядка для функции Грина $\tilde{\phi}_0(a, k) = G_0(k) \tilde{\eta}(a, k)$, где

$$G_0(k) = \frac{1}{-i\omega + \mathbf{k}^2 + m^2},$$

и итерируя интегральное уравнение (39), получим выражение для однопетлевого вклада в функцию Грина

$$G(k) = G_0(k) + \lambda^2 G_0^2(k) \int \frac{d^{d+1}q}{(2\pi)^{d+1}} \Delta(\mathbf{q}) |G_0(q)|^2 G_0(k - q) + O(\lambda^4), \quad (40)$$

где $\Delta(\mathbf{k})$ – усредненный по масштабам эффективный коррелятор (19). Совершенно аналогичным образом могут быть вычислены и все старшие моменты стохастических полей. Таким образом, при переходе к многомасштабному описанию в

формализме стохастического квантования, как в частном случае решения уравнения Ланжевена со случайной силой (17), целиком воспроизводится обычная стохастическая диаграммная техника.

На Рис 1 приведены одночастично неприводимые диаграммы, дающие вклад в пертурбативное разложение стохастической функции Грина (40). Аналогично

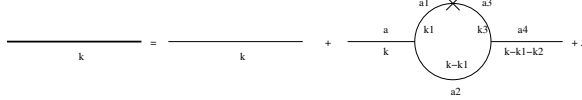


Рис. 1: Диаграммное разложение стохастической функции Грина для ϕ^3 -модели

стохастической функции Грина (40), однопетлевой вклад в стохастический парный коррелятор также может быть записан в (a, k) представлении:

$$\langle \tilde{\phi}(a_i, k) \tilde{\phi}(a_f, -k) \rangle \equiv C(a_i, a_f, k) = C_0(a_i, a_f, k) + \lambda^2 C_2(a_i, a_f, k) + O(\lambda^4), \quad (41)$$

где $C_0(a_i, a_f, k) = \Delta(\mathbf{k}) |G_0(k)|^2 (a_i a_f)^{d/2} \overline{\tilde{\psi}(a_i \mathbf{k}) \tilde{\psi}(-a_f \mathbf{k})}$. Однопетлевой вклад в парный коррелятор равен

$$C_2(a_i, a_f, k) = \frac{1}{2} |G_0(k)|^2 (a_i a_f)^{d/2} \overline{\tilde{\psi}(a_i \mathbf{k}) \tilde{\psi}(-a_f \mathbf{k})} \int \frac{d^{d+1}q}{(2\pi)^{d+1}} |G_0(q)|^2 |G_0(k-q)|^2 \Delta(\mathbf{q}) \Delta(\mathbf{k}-\mathbf{q}). \quad (42)$$

Диаграммы, соответствующие разложению стохастического парного коррелятора (41), изображены на Рис. 2.

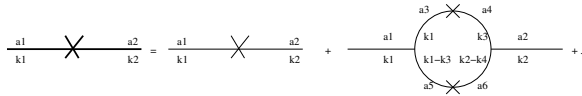


Рис. 2: Диаграммное разложение стохастического парного коррелятора в ϕ^3 модели

Простым, но важным примером масштабно-зависимой накачки является случайная сила, действующая на одном фиксированном масштабе (21). В некотором смысле введение такой силы эквивалентно переходу к решеточной теории с размером ячейки a_0 .

Рассмотрим модель скалярного поля с взаимодействием ϕ^3 . Используя при этом накатку на фиксированном масштабе (21) и выбрав в качестве базисного вейвлета “Мексиканскую шляпу” (22), получаем выражение для эффективного коррелятора силы:

$$\Delta(\mathbf{q}) = 2 \frac{(a_0 \mathbf{q})^4}{a_0} e^{-(a_0 \mathbf{q})^2} D(\mathbf{q}). \quad (43)$$

Как нетрудно видеть, петлевые интегралы вычисленные с использованием эффективного коррелятора (43) не содержат ультрафиолетовых расходимостей. Инфракрасные расходимости также смягчаются благодаря степенному фактору $(a_0 \mathbf{q})^4$.

Подставляя эффективный коррелятор (43) в выражения для однопетлевых вкладов в стохастическую функцию Грина (40) и для парного коррелятора (42), получим:

$$G_2(k) = G_0^2(k) I_{G_2}, \quad (44)$$

$$I_{G_2} = \int \frac{d^d \mathbf{q}}{(2\pi)^d} \Delta(\mathbf{q}) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Omega}{2\pi} \frac{1}{\Omega^2 + (\mathbf{q}^2 + m^2)^2} \\ \times \frac{1}{-i(\omega - \Omega) + (\mathbf{k} - \mathbf{q})^2 + m^2}$$

$$C_2(a_i, a_f, k) = \frac{1}{2} |G_0(k)|^2 (a_i a_f)^{d/2} \overline{\tilde{\psi}(a_i \mathbf{k}) \tilde{\psi}(-a_f \mathbf{k})} I_{C_2}, \quad (45)$$

$$I_{C_2} = \int \frac{d^d \mathbf{q}}{(2\pi)^d} \Delta(\mathbf{q}) \Delta(\mathbf{k} - \mathbf{q}) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Omega}{2\pi} \frac{1}{\Omega^2 + (\mathbf{q}^2 + m^2)^2} \\ \times \frac{1}{(\omega - \Omega)^2 + [(\mathbf{k} - \mathbf{q})^2 + m^2]^2}.$$

Экспоненциальный фактор, входящий в эффективный коррелятор $\Delta(\mathbf{q})$, подавляет любые степенные расходимости, возникающие в ультрафиолетовом пределе. Для теории ϕ^4 и моделей с высшим полиномиальным взаимодействием описанные выше методы также имеют очевидное обобщение.

Аналогичным образом осуществляется многомасштабное стохастическое квантование неабелевых калибровочных полей. Специфика проявляется в необходимости тем или иным способом фиксировать калибровку. Так, для полей Янга-Миллса уравнение Ланжевена имеет вид

$$\frac{\partial A_\mu^a(x, \tau)}{\partial \tau} + (-\delta_{\mu\nu} \partial^2 + \partial_\mu \partial_\nu) A_\nu^a(x, \tau) = \eta_\mu^a(x, \tau) + U_\mu^a(x, \tau). \quad (46)$$

Здесь $\eta_\mu^a(x, \tau)$ – случайная сила, а $U_\mu^a(x, \tau)$ – нелинейное взаимодействие (использованы обозначения М.Намики [35]). Стохастическая функция Грина, следующая из (46), содержит поперечную (T) и продольную (L) части:

$$G_{\mu\nu}^{ab}(k) = \frac{T_{\mu\nu}(k)\delta_{ab}}{-i\omega + k^2} + \frac{L_{\mu\nu}(k)\delta_{ab}}{-i\omega}, \quad T_{\mu\nu}(k) = \delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}, \quad L_{\mu\nu}(k) = \frac{k_\mu k_\nu}{k^2},$$

описывающие распространение поперечной и продольной компонент поля, соответственно.

Принимая во внимание, что продольная компонента (L) стохастических полей $A_\mu^a(\mathbf{x}, \tau)$, как следует из уравнения (46), не эволюционирует относительно фиктивного времени τ , при построении многомасштабного стохастического квантования, можно считать случайную силу чисто трансверсальной:

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\eta}_\mu^a(a_1, k_1, \tau_1) \tilde{\eta}_\nu^b(a_2, k_2, \tau_2) \rangle &= (2\pi)^d \delta^d(k_1 + k_2) \delta(\tau_1 - \tau_2) T_{\mu\nu}(k_1) \\ &\times C_\psi a_1 \delta(a_1 - a_2) D(a_1, k_1). \end{aligned}$$

Это своего рода фиксация калибровки, заменяющая явное введение фиксирующего калибровку члена в уравнение Ланжевена и не приводящая к появлению новых вершин в стохастической теории возмущений.

Суммируя по индексам калибровочной группы $SU(N)$, для однопетлевого вклада в функцию Грина, содержащего две трехглюонных вершины, получим в итоге конечное выражение [52]:

$$G_{2\mu\nu}^{ab}(k, \omega) = g^2 \delta_{ab} C_2 |G_0(k, \omega)|^2 \sum_{I=T,L} \int \frac{d\Omega}{2\pi} \frac{d^d q}{(2\pi)^d} N^I(k, \omega, q, \Omega) l_{\mu\nu}^I(k, q) 2\Delta(q), \quad (47)$$

где

$$\begin{aligned} N(k, q) &= \left| \frac{1}{-i\Omega + q^2} \right|^2 \left(\frac{1}{-i(\omega - \Omega) + (k - q)^2} \right), \\ l_{\mu\nu}(k, q) &= V_{\mu\kappa\lambda}(k, k - q, q) T_{\lambda\gamma}(q) V_{\sigma\nu\gamma}(k - q, k, -q) \begin{pmatrix} T_{\kappa\sigma}(k - q) \\ L_{\kappa\sigma}(k - q) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Как можно показать путем непосредственного вычисления тензорных структур $l_{\mu\nu}^T$ и $l_{\mu\nu}^L$, в случае одномасштабной случайной силы (21), вейвлетный фактор $\tilde{\psi}(a\mathbf{k})$ подавляет ультрафиолетовые расходимости. В случае же малых k , степенной фактор, также происходящий из базисного вейвлета $\tilde{\psi}(a\mathbf{k})$, смягчает инфракрасные расходимости. В этом смысле вейвлет-регуляризация отличается от известных моделей непрерывной СК-регуляризации $\int d^d y R_\Lambda(\partial^2) \eta(y, \tau)$. Последние

регуляризуют ультрафиолетовой поведением теории мультипликативным фактором $e^{-\frac{k^2}{\Lambda^2}}$, содержащим импульс обрезания Λ , но не затрагивают инфракрасное поведение теории [24].

В Главе 5 (“Квантовая механика иерархических систем”) идеи кратномасштабного анализа использованы для описания квантовых иерархических систем.

Прогресс в области квантовой теории информации требует развития новых математических методов для описания мезоскопических квантовых систем, имеющих иерархическую организацию. Описание переходных процессов в мезоскопических квантовых системах становится актуальным в связи с получением перепутанных состояний на атомных кластерах – мезоскопических объектах, которые могут быть использованы в качестве конструктивных элементов при построении квантовых вычислительных устройств [36, 56]. Ключевой проблемой здесь является проблема измерения [33]. Для сложной системы, состоящей из нескольких подсистем, мы как правило не имеем прямого доступа к самим подсистемам. Так, измерение углового момента молекулы приводит к редукции вектора состояния молекулы к вектору с определенным значением углового момента, но атомы, составляющие данную молекулу при этом могут находиться в суперпозиции состояний; при этом мы не имеем возможности полностью контролировать эти состояния. Тем не менее, мы обычно имеем возможность частично контролировать состояния подсистем воздействуя на систему как на целое. Например, если измеренное значение проекции спина системы из двух фермионов со спином $1/2$ составляет 1, можно с уверенностью сказать, что оба фермиона находятся в состоянии с проекцией спина равной $1/2$. Часто для приготовления желаемой суперпозиции состояний в подсистеме мы воздействуем с помощью магнитного поля на всю систему, не вызывая при этом полной декогеренции в отдельных подсистемах.

Состояние элементарного квантового объекта может быть представлено вектором состояния в гильбертовом пространстве состояний

$$|\psi\rangle = \sum_i c_i |\phi_i\rangle, \quad \sum_i |c_i|^2 = 1.$$

Измерение, проведенное над квантовой системой находящейся в состоянии $|\psi\rangle$, с вероятностью $|c_i|^2$ приводит к коллапсу вектора состояния к одному из базисных состояний $|\phi_i\rangle$. Измерение осуществляется путем взаимодействия системы с окружением – приборами, буферами и т.п., словом всем тем, с чем взаимодействует система, и эволюция которого также описывается квантовой механикой.

Волновая функция составной системы “система \oplus окружение” обычно записывается в виде произведения всевозможных чистых состояний системы на состояния окружения

$$|\psi\rangle = \sum_{ij} C_{ij} |\phi_i\rangle |\theta_j\rangle. \quad (48)$$

Здесь $\{|\phi_i\rangle\}_i$ – полный набор векторов состояния системы, $\{|\theta_i\rangle\}_i$ – полный набор векторов состояния окружения.

Среднее значение любой наблюдаемой A , относящейся к системе, но не к окружению, может быть записано с помощью *матрицы плотности*:

$$\langle A \rangle \equiv \langle \psi | A | \psi \rangle = \sum_{ii'} \rho_{ii'} \langle \phi_i | A | \phi_{i'} \rangle \equiv Tr(\rho A), \quad \rho_{ii'} \equiv \sum_j C_{ij}^* C_{i'j}, \quad (49)$$

где $\rho_{ii'}$ – матрица плотности. Вектора состояния окружения предполагаются ортогональными ($\langle \theta_i | \theta_j \rangle = \delta_{ij}$.)

Можно, однако, поступить и иным образом, как было предложено автором в работе [8]. Всякая система находится *внутри* своего окружения, т.е. является частью большей системы. Это определяет операцию частичного упорядочения в цепочке окрестностей $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots$. В соответствии с данным упорядочением, мы будем называть A_i *микросистемой* по отношению к A_{i+1} , а A_{i+1} *макросистемой* по отношению к A_i .

Мы знаем, что микросистема всегда находится *внутри* макросистемы. Так, электрон является частью атома, атом – частью молекулы и т.д.. Это наводит на мысль о том, что для получения матрицы плотности микросистемы, вместо прямого усреднения по *всем* степеням свободы окружения, можно представить волновую функцию в иерархической форме, последовательно учитывая степени свободы тех макросистем, для которых исследуемая микросистема является частью. Например, для волновой функции системы электронов n некоторого атома можно записать $\{\psi_A, \{\psi_{Ae_1}, \dots, \psi_{Ae_n}\}\}$, где ψ_A – волновая функция всего атома (макросистемы), обладающего полным моментом J , орбитальным моментом L , и полным спином S , т.е. зависящая от характеристик не только электронной системы, но и ядра. Волновые функции атомных электронов ψ_{Ae_k} , таким образом, отличны от волновых функций свободных электронов ψ_{e_k} .

Теперь у нас есть достаточно элегантный способ получения информации о квантовых состояниях подсистемы путем усреднения лишь по заданной ветви иерархии, а не по всему окружению подсистемы. Например, состояние подсистемы A_{11} , изображенной на Рис. 3, задается с помощью трех компонент волновой функции $(\psi_{C_1}, \psi_{C_1 B_1}, \psi_{C_1 B_1 A_{11}})$. Матрицу плотности этой системы можно получить усредняя по степеням свободы C_1 и B_1 , но не B_2 .

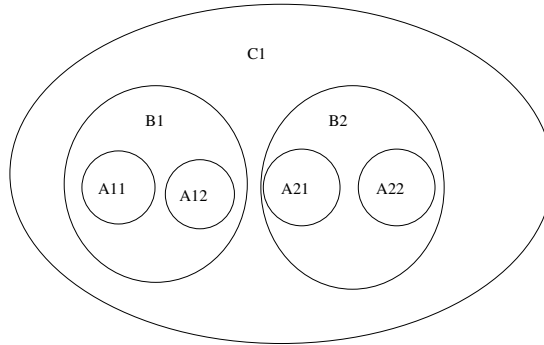


Рис. 3: Структура бинарной иерархической системы. Для вычисления матрицы плотности подсистемы A_{11} требуется усреднение по состояниям подсистем B_1 и C_1 , но не по состояниям B_2, A_{21}, A_{22} .

В общем случае для описания состояния объекта A_1 (взаимодействующего с объектами A_2, \dots, A_N), который является частью объекта B_1 , мы должны представить волновую функцию системы в виде

$$\Psi = \{\psi_{B_1}, \{\psi_{B_1 A_1}, \dots, \psi_{B_1 A_N}\}\}, \quad (50)$$

где ψ_{B_1} – волновая функция целого (обозначенная как B_1), а $\psi_{B_1 A_1}$ является волновой функцией компоненты A_1 , принадлежащей системе B_1 .

Такой формализм имеет два аспекта. Во-первых, если нам известны собственные вектора $|\phi_{i_1}\rangle, \dots, |\phi_{i_k}\rangle$ всех частей, взаимодействие между этими частями и внешние поля, мы должны иметь возможность построения системы функций $|\theta_j\rangle$. Но волновые функции всех составных частей никогда не могут быть известны одновременно, поэтому более разумно искусственно ввести вектор состояния макроуровня $|\theta_j\rangle$ и рассматривать взаимодействие между этим средним полем макроуровня и полями микроуровня.

Во-вторых, как хорошо известно, например в биологии, влияние внешних полей на компоненты клетки сильно зависит от состояния всей клетки. Здесь мы сталкиваемся с типичной проблемой теории управления – задача управления микроуровнем путем воздействия только на степени свободы макроуровня.

Пусть A – оператор действующий на микроуровне системы, состоящей из k частей. Тогда, для среднего значения наблюдаемой A имеем:

$$\langle A \rangle = \sum C_{i_1', \dots, i_k'}^{r* j'} C_{i_1, \dots, i_k}^j \langle \theta_j | \langle \phi_{i_1'} | \dots \langle \phi_{i_k'} | A | \phi_{i_1} \rangle, \dots, | \phi_{i_k} \rangle | \theta_j \rangle = \rho_{i, i'} \langle \mathbf{i} | A | \mathbf{i}' \rangle, \quad (51)$$

где жирный шрифт $\mathbf{i} \equiv (i_1, \dots, i_k)$, $|\mathbf{i}\rangle \equiv |\phi_{i_1}\rangle, \dots, |\phi_{i_k}\rangle$ используется для мульти-индексов состояний микроуровня.

По аналогии с управляемыми квантовыми гейтами, используемыми в алгоритмах квантовых вычислений, мы можем ввести операторы, действие которых на микроуровне зависит от состояния макроуровня [8],

$$\hat{B} = |\mathbf{i}\rangle\langle\theta_m| B_{\mathbf{ik}}^m \langle\theta_m| \langle\mathbf{k}|. \quad (52)$$

Среднее значение соответствующей наблюдаемой в двухуровневой иерархической системе равно

$$\langle B \rangle = \langle \psi | \hat{B} | \psi \rangle = \sum_{j, \mathbf{i}, \mathbf{i}'} C_{\mathbf{i}}^{*j} B_{\mathbf{ii}'}^j C_{\mathbf{i}'}^j. \quad (53)$$

Таким образом, осуществляя измерение состояния макросистемы, можно получить некоторую информацию о микросистемах не изменяя их волновых функций. Так, если мезон найден в состоянии $|\uparrow\rangle$, применив проекционный оператор $P_{\uparrow} = |\uparrow\rangle\langle\uparrow|$ к его волновой функции, можно получить информацию о том, что оба кварка, составляющие данный мезон, имеют проекции спина $s_z = \frac{1}{2}$; если же мезон найден в состоянии с нулевой проекцией спина, можно утверждать, что составляющие его кварки имеют противоположные проекции спина.

Компоненты волновой функции принадлежащие различным уровням иерархии могут иметь существенно различную природу: иметь различные значения спина, изоспина, цветового индекса и, следовательно, принадлежать различным пространствам. Гильбертово пространство иерархических векторов состояния можно построить исходя из предположения об общей линейности для всех уровней иерархии:

$$\Psi_1, \Psi_2 \in \mathcal{H}, a, b \in \mathbb{C} \Rightarrow \Psi = a\Psi_1 + b\Psi_2 \in \mathcal{H}.$$

$$\Psi_1 = \{\psi_{B_1}, \{\psi_{B_1 A_1}, \dots, \psi_{B_1 A_N}\}, \dots\}, \quad \Psi_2 = \{\psi_{D_1}, \{\psi_{D_1 C_1}, \dots, \psi_{D_1 C_N}\}, \dots\},$$

то их линейная комбинация

$$\Psi = a\Psi_1 + b\Psi_2 = \{a\psi_{B_1} + b\psi_{D_1}, \{a\psi_{B_1 A_1} + b\psi_{D_1 C_1}, \dots, a\psi_{B_1 A_N} + b\psi_{D_1 C_N}\}, \dots\} \quad (54)$$

также принадлежит \mathcal{H} . Скалярное произведение иерархических векторов состояния определяется покомпонентно:

$$\langle \Psi_1 | \Psi_2 \rangle = \langle \psi_{B_1} | \psi_{D_1} \rangle + \sum_{i=1}^N \langle \psi_{B_1 A_i} | \psi_{D_1 C_i} \rangle + \dots \quad (55)$$

Глава 6 (“Вейвлеты и устранение расходимостей в теории поля”) посвящена применению непрерывного вейвлет-преобразования для устранения расходимостей в квантовой теории поля.

Хорошо известно, что ультрафиолетовые (УФ) расходимости, возникающие в квантовой теории поля на малых масштабах, связаны с трансформационными свойствами квантовополевых моделей по отношению к масштабным преобразованиям. Для широкого класса таких моделей, известных как *мультипликативно-ренормируемые* модели, проблема ультрафиолетовых расходимостей существенно упрощается путем мультипликативного преобразования полей и констант связи. Перенормированные функции Грина, полученные путем такого преобразования, становятся конечными в ультрафиолетовом пределе $\Lambda \rightarrow \infty$ – все расходимости адсорбируются бесконечными константами перенормировки $Z_\phi(g, \Lambda), Z_g(g, \Lambda)$. Независимость наблюдаемых физических результатов от изменения масштаба известна как ренормализационная инвариантность, а сама группа преобразований – как *ренормализационная группа* (РГ).

Наличие симметрии, связанной с масштабными преобразованиями подсказывает следующий рецепт построения полевых моделей: при построении функционала действия нужно использовать поля преобразующиеся по представлениям аффинной группы $G : x' = ax + b$. Если мы считаем, что получаемая с помощью метода РГ степенная зависимость константы связи от масштаба действительно отражает физику исследуемых явлений, а не является математическим артефактом, мы должны найти способ включить эту зависимость в теорию уже на стадии построения модели, а не на стадии устранения возникающих расходимостей. Чтобы сделать это, обратимся к простейшей модели скалярного поля в евклидовом пространстве

$$S[\phi] = \frac{1}{2} \int \phi(x_1) D(x_1, x_2) \phi(x_2) dx_1 dx_2 + \frac{1}{4!} \int V(x_1, x_2, x_3, x_4) \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(x_3) \phi(x_4) dx_1 dx_2 dx_3 dx_4. \quad (56)$$

Используя вейвлет-преобразование можно легко переписать (56) в виде функционала от масштабозависимых полей $\phi_a(b)$. Производящий функционал соответствующей теории поля при этом примет вид

$$Z_G[J] = \int \mathcal{D}\phi(g) \exp\left(-\frac{1}{2} \int_G \phi(g_1) D(g_1, g_2) \phi(g_2) d\mu(g_1) d\mu(g_2) - \frac{\lambda_0}{4!} \int_G \tilde{V}(g_1, g_2, g_3, g_4) \phi(g_1) \phi(g_2) \phi(g_3) \phi(g_4) d\mu(g_1) d\mu(g_2) d\mu(g_3) d\mu(g_4) + \int_G J(g) \phi(g) d\mu(g)\right), \quad (57)$$

где $g \equiv (a, b)$ – координаты на аффинной группе, $d\mu(g) = \frac{dad b}{a^{d+1}}$ – левоинвариантная мера, а $\tilde{V}(g_1, g_2, g_3, g_4)$ обозначает результат применения вейвлет-преобразования к четырехточечному потенциалу $V(x_1, x_2, x_3, x_4)$ по каждому из аргументов.

Нетрудно видеть, что диаграммная техника в такой модели будет отличаться от обычной фейнмановской техники наличием на каждой линии вейвлетных множителей $a_i^{d/2} \tilde{\psi}(a_i k)$ и интегрированием по мере $d\mu(a, k) = \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{da}{a^{d+1}}$ вместо обычного интегрирования по импульсам в каждой вершине. Так, для свободного пропагатора имеем

$$D^{-1}(a_1, a_2, k) = a_1^{d/2} \overline{\tilde{\psi}(a_1 k)} \left(\frac{1}{k^2 + m^2} \right) a_2^{d/2} \tilde{\psi}(a_2 k).$$

При этом подразумевается однородность по пространственным координатам, т.е. то, что матричные элементы зависят лишь от разностей координат, но не от самих координат.

Естественно, если рассматривать теорию с действием $S[\phi_a(b)]$ как результат вейвлет-преобразования исходной теории с действием $S[\phi(x)]$, то после интегрирования по всем масштабным аргументам $\frac{da}{a^{d+1}}$ восстанавливаются обычные результаты. Если, однако, понимать под $\phi_a(b) \equiv \langle a, b; \psi | \phi \rangle$ результат измерения состояния $|\phi\rangle$ в точке b с помощью базисного состояния $|\psi\rangle$ при разрешении a , и определить матричные элементы и функции Грина для полей зависящих от масштаба:

$$\langle \phi_{a_1}(b_1) \dots \phi_{a_n}(b_n) \rangle = - \frac{Z[J]}{\delta J_{a_1}(b_1) \dots J_{a_n}(b_n)} \Big|_{J=0}, \quad (58)$$

то при соответствующем выборе зависимости константы связи от масштаба $\lambda = \lambda(a)$, масштабозависимые функции Грина (58) оказываются конечными. Нетрудно также показать, что за счет вейвлетного фактора оказывается конечной функция Грина свободных полей, вычисленная при совпадающих координатах, но различных масштабах.

Что касается пространственных симметрий теории, основанной на аффинной группе, то введение новой масштабной переменной фактически означает, что вместо одного скалярного поля $\phi(x)$, мы теперь имеем дело с набором полей, проиндексированных масштабом a : $\{\phi_a(x)\}_a$; для каждого фиксированного значения a инвариантность по отношению к вращениям и трансляциям, естественно, остается. В пространстве же операторнозначных функций возникает проблема с определением коммутационных соотношений $[\phi_{a_1}(x), \phi_{a_2}(y)]$, поставленная в работе [22]. Возможное решение этой проблемы предложено в работах автора [11, 50], где на основании двух операций частичного упорядочения – по масштабу \subset , и по

координате \prec , введено обобщение понятия T упорядочения по принципу “оператор отвечающий большему масштабу действует первым” . Используя аналогию с многомасштабными случайными процессами, предложены также возможные коммутационные соотношения для многомасштабных операторов поля. Так, для массивного скалярного поля

$$[b_{a_1}(k_1), b_{a_2}^+(k_2)] = (2\pi)^{d-1} 2\omega_k \delta^{d-1}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) C_\psi a_1^{d+1} \delta(a_1 - a_2), \quad (59)$$

где $\omega_k = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$.

Глава 7 (“Многомасштабные разложения и p -адическая теория поля”) посвящена p -адической теории поля, в контексте ее связи с рассмотренными многомасштабными методами, в частности рассматривается предложенное автором p -адическое вейвлет преобразование.

Результаты любых физических измерений всегда выражаются в терминах *рациональных чисел*. Происходит это хотя бы потому, что любое измерительное устройство обладает конечной точностью, предел которой определяется принципом неопределенности Гейзенберга. Геометрия на самых малых, планковских масштабах, где существенны квантовые гравитационные эффекты [44], нам не известна. Существует убеждение, что геометрия планковских масштабов должна быть неархимедовой, возможно – p -адической [59]. Последнее продиктовано как чисто эстетическими соображениями, так и наличием лишь двух возможных пополнений поля вещественных чисел (согласно теореме Островского): $\mathbb{R} \xrightarrow{|\cdot|} \mathbb{Q} \xrightarrow{|\cdot|_p} \mathcal{Q}_p$. Все это, а также ряд результатов теории струн, делает необходимым исследование p -адических квантовополевых моделей и, в частности, их свойств связанных с масштабным преобразованием. Последнее непосредственно связано с p -адическим вейвлет-преобразованием, предложенным в работах автора [4, 9].

Напомним основные свойства p -адических чисел. Пусть $p \neq 1$ – простое число. Любое вещественное число $x \in \mathbb{Q}$, отличное от нуля, может быть однозначно представлено в виде

$$x = \frac{m}{n} p^\gamma, \quad (60)$$

где m и n – целые числа не делящиеся на $p \neq 1$; γ – целое число. Представление (60) позволяет определить в поле \mathbb{Q} норму

$$|x|_p = \left| \frac{m}{n} p^\gamma \right|_p \stackrel{def}{=} p^{-\gamma}, \quad |0|_p \stackrel{def}{=} 0, \quad (61)$$

отличную от стандартной нормы $|\cdot|$. Алгебраическое замыкание поля \mathbb{Q} относительно нормы $|\cdot|_p$ есть поле p -адических чисел \mathcal{Q}_p .

Любое p -адическое число может быть однозначно представлено в виде ряда

$$x = p^\nu \sum_{k=0}^{\infty} a_k p^k, \quad 0 \leq a_k < p, \quad \nu \in \mathbb{Z}. \quad (62)$$

Сложение и умножение p -адических чисел осуществляются по обычным правилам сложения и умножения полиномов, таким же образом определяются и аналитические функции p -адического аргумента. Любое рациональное, в частности, отрицательное число может быть представлено в виде ряда (62), так $-1 = (p-1) + (p-1)p + (p-1)p^2 + \dots$.

p -Адическая норма (61) является более сильной чем стандартная норма $|\cdot|$. Вместо неравенства треугольника, в случае p -адической нормы, имеем более сильное ограничение $|x+y|_p \leq \max(|x|_p, |y|_p)$. Функция расстояния между точками множества (метрика), определенная с помощью p -адической нормы

$$\begin{aligned} d(x, y) &:= |x - y|_p \\ d(x, z) &\leq \max(d(x, y), d(y, z)) \leq d(x, y) + d(y, z), \end{aligned} \quad (63)$$

влечет за собой неархимедову геометрию. Метрику (63) часто называют *ультраметрикой* [40].

Стандартная парадигма введения p -адических чисел в КТП состоит в замене комплекснозначных функций вещественного аргумента на функции p -адического аргумента. Поскольку не существует предпочтительного значения основания p , используют так называемые адельные формулы. В частности, разложение плоской волны по p -адическим гармоникам имеет вид

$$\exp(2\pi i(\omega t - kx)) = \prod_{p \in \text{prime}} \chi_p(\omega t - kx).$$

В этом смысле свободная частица представляет собой совокупность p -адических плоских волн.

Обобщение p -адического анализа на многомерный (векторный) случай также производится обычным образом:

$$\mathcal{Q}_p \rightarrow \mathcal{Q}_p^n, \quad x \rightarrow (x_1, \dots, x_n), \quad \xi \rightarrow (\xi_1, \dots, \xi_n), \quad \xi x \rightarrow (\xi, x) = \sum_i \xi_i x_i.$$

Подход заменяющий \mathbb{R}^d на \mathcal{Q}_p^d оправдан когда целью является регуляризация квантовопольевых струнных моделей, изначально сформулированных на некотором многообразии. Если же ставится вопрос о происхождении самого многообразия, то разумно использовать более общий подход, рассматривающий непрерывную геометрию как систему связей между дискретными объектами. Такой

подход, предполагающий рождение Вселенной из одного недифференцированного объекта путем процесса фрагментации развивался в ряде работ автора [12, 4, 15, 9], и состоит во введении p -адической геометрии как системы отношений между фрагментами разбиения, помеченными p -адическими целыми $x \in \mathbb{Z}_p$. Действительно, пусть имеется процесс фрагментации объекта единичной

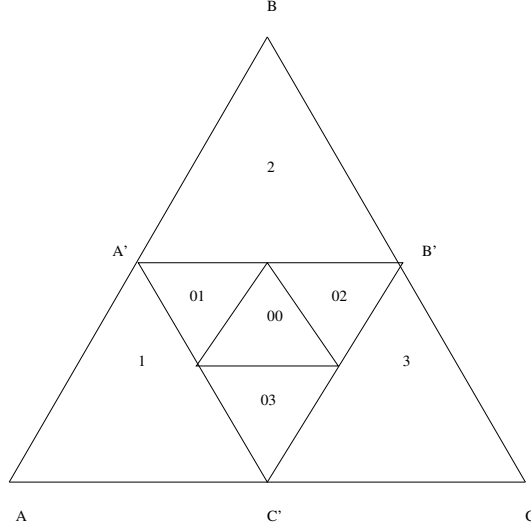


Рис. 4: Разбиение d -мерного симплекса ($d = 2$) на $(d + 2)$ равных частей. отождествление вершин $A = B = C$ и склеивание ребер обеспечивает гомеоморфное отображение симплекса на сферу S^2 .

меры на p -частей, рекурсивно повторяемый с каждой из частей. Тогда координата $x = \sum_{k=0}^{N-1} a_k p^k$ однозначно определяет любой фрагмент в N -м поколении фрагментации. Все множество таких x и есть *кольцо p -адических целых чисел* $\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p \leq 1\}$. В соответствии с таким определением процесса фрагментации, меру интегрирования на \mathbb{Q}_p определяют исходя из условия нормировки $\int_{\mathbb{Z}_p} dx \equiv 1$.

Геометрия такого разбиения не обладает локальной структурой многомерного евклидова пространства. Она является “ p -адически одномерной” – при этом основание p однозначно связывается с размерностью d -мерной сферы, куда может быть вписан данный объект, соотношением $p = d + 2$, см. Рис. 4.

Переход к p -адически одномерной модели сразу же делает теорию конечной:

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \frac{dk}{|k|_p^2 + m^2} = \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{\gamma=-\infty}^0 p^\gamma \frac{1}{p^{2\gamma} + m^2} < \infty. \quad (64)$$

Построенная модель, хотя и является сильно упрощенной, но демонстрирует ряд важных свойств. Так, частичное упорядочение в \mathcal{Z}_p иммитирует две операции упорядочения: часть-целое (\subset) при $|x|_p \neq |y|_p$, и обычного Т-упорядочения (\prec) при $|x|_p = |y|_p$. Кроме того, однозначная связь основания p с $(p-2)$ -мерными симплексами допускает наличие соответствующих дискретных симметрий у физического пространства, что могло бы проявляться например в корреляциях флуктуаций реликтового излучения [12], в частности в усилении корреляций при угле $\theta = 120^\circ$ и их ослаблении при $\theta = 60^\circ$, что возможно и наблюдалось в экспериментах COBE и РЕЛИКТ-1.

Поскольку в любом физическом эксперименте наблюдаются физические поля, а не геометрия как таковая, возникает вопрос о построении физических полей над сферой с описанным выше p -адическим разбиением. В частности, для определения полей, зависящих как от положения, так и от масштаба, необходимо определить вейвлет преобразование на \mathcal{Q}_p . Такое преобразование было предложено в работах автора [4, 9]

$$\langle a, b; \psi | f \rangle_{\mathcal{Q}_p} = c_\psi^{-1/2} \int_{\mathcal{Q}_p} \psi \left(\frac{x-b}{a} \right) f(x) dx \quad (65)$$

$$f(x) = c_\psi^{-1/2} \int_{\mathcal{Q}_p^* \times \mathcal{Q}_p} \frac{1}{a} \psi \left(\frac{x-b}{a} \right) \langle a, b; \psi | f \rangle_{\mathcal{Q}_p} \frac{dad b}{|a|_p^2} \quad (66)$$

и состоит в разложении функции p -адического аргумента по представлениям p -адической аффинной группы $(a, b) \circ (a', b') = (aa', ab' + b)$, $a, a', b, b' \in \mathcal{Q}_p, a, a' \neq 0$, на которой определена левоинвариантная мера Хаара $d\mu_L(a, b) = \frac{dad b}{|a|_p^2}$.

В работе [9] был предложен дискретный алгоритм p -адического вейвлет-преобразования, обобщающий быстрый алгоритм с вейвлетом Хаара на поле \mathcal{Q}_p .

Глава 8 (“Некоторые приложения вейвлетов к биологии и анализу данных”) основана на работах автора по применению вейвлет-преобразования к анализу первичной структуры ДНК, экспериментальных данных в биологии и ядерной физике.

Самоподобие могло играть существенную роль не только в образовании Вселенной как целого, но и в кодировании генетической информации. Гипотеза о присутствии у первичной структуры генома свойств самоподобия, проявляющихся в наличии дальних корреляций, была впервые высказана в работах [27, 42]. В работе [14] наличие самоподобия в первичной структуре ДНК было проверено непосредственно – путем применения вейвлет преобразования к мерам, отвечающим каждому из нуклеотидов. Было проведено исследование *интегральных мер* для каждого нуклеотида, т.е. зависимости полного числа нуклеотидов данного

типа от длины фрагмента. Для каждого из четырех нуклеотидов $z = A, T, C, G$ интегральная мера имеет вид

$$\mu_z(s) = \int_0^s X_z(l, \omega) dP(\omega) dl \equiv \int_0^s d\mu_z, \quad X_z(l, \omega) = \begin{cases} 1 & \text{если } \omega = z \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}. \quad (67)$$

Линейная зависимость логарифма вейвлет коэффициентов $\log |W_g(a, x)[\mu_z]|$ от $\log a$ для каждой из мер $\mu_A, \mu_T, \mu_C, \mu_G$ означает степенную зависимость

$$W_g \sim a^{h+\frac{1}{2}},$$

что соответствует скейлинговому поведению мер $\mu(x) - \mu(x_0) \propto |x - x_0|^h$. Значения показателя Липшица-Гельдера h , вычисленные для последовательностей ДНК китайского хомячка, согласно [14] составили:

h_A	h_T	h_C	h_G
0.60	0.43	0.60	0.53

Найденные значения достаточно близки к показателю Липшица-Гельдера для броуновского движения ($h = \frac{1}{2}$) – чисто случайного процесса, – но не тождественны ему. Это было подтверждено в работе [13], где проведено сравнение корреляций вейвлет коэффициентов, вычисленных на различных масштабах

$$R(a_1, a_2, b_1 - b_2) = \langle W_g(a_1, b_1) W_g(a_2, b_2) \rangle, \quad (68)$$

для последовательностей ДНК кишечной палочки и случайной последовательности такой же длины. Кроме того, визуальный анализ цветовых карт абсолютных значений вейвлет-коэффициентов, вычисленных для первичной структуры различных последовательностей указывает на наличие иерархических структур. Это впервые было указано в работе [43] и, независимо, в работе автора [14]. Преимуществом авторского подхода было то, что использование четырех независимых случайных мер, вместо двухзначного отображения “пурин (1)- пиримидин (-1)” не приводит к вырождению между различными нуклеотидами.

Описанная работа стимулировала дальнейшее применение методов вейвлет-анализа и мультифрактального анализа к исследованию первичной структуры ДНК различных организмов. В работе [13] были вычислены корреляционные функции (68) для последовательностей *E. coli* и случайной последовательности такой же длины. Наличие у естественной последовательности корреляций между большим и меньшим масштабами указывает на то, что при “кодировании”

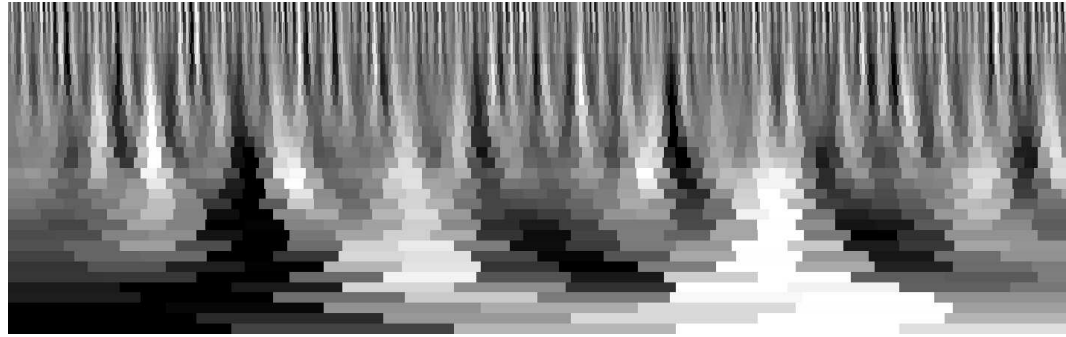


Рис. 5: Цветовая карта (градации серого) g_1 вейвлет-коэффициентов для M-сегмента РНК гена хантавируса Доброва. Номер последовательности (NCBI) GI:3970669. На рисунке показан участок длиной 1024 нп с начала фрагмента. Каждый слой, соответствует изменению масштаба в вертикальном направлении в $a = 2^{1/4}$ раз. Рисунок из монографии [11].

коэффициентов меньшего масштаба как бы учитываются уже известные значения коэффициентов большего масштаба (ср. “большой действует первым” на стр. 28). Все это достаточно хорошо согласуется с гипотезой Оно о том, что корреляции между удаленными частями последовательностей, объясняются общим происхождением этих частей из одного и того же фрагмента пре-ДНК, существовавшей на раннем этапе биологической эволюции [37, 46].

В качестве приложений вейвлетов к обработке экспериментальных данных в диссертации рассматривается метод разделения гауссовых пиков с помощью непрерывного вейвлет-преобразования. Метод основан на вычислении вейвлет преобразования от функции

$$f(x) = \sum_{k=1}^M N_k \exp\left(-\frac{(x-x_k)^2}{2\sigma_k^2}\right) \quad (69)$$

с использованием семейства базисных вейвлетов $g_n(x) = \frac{d^n}{dx^n} \exp(-x^2/2)$. Решение получающейся системы уравнений позволяет по коэффициентам вейвлет-разложения $W_{g_n}[f]$ найти параметры исходных гауссианов (N_k, x_k, σ_k) . В частности, для вейвлета g_2 максимальное значение вейвлет-коэффициентов

$$W_{g_2}(a, b)[f_{gauss}] = Na \left(\frac{a}{a^2 + \sigma^2}\right)^{3/2} \left[1 - \frac{b^2}{a^2 + \sigma^2}\right] \exp\left(-\frac{b^2}{2(a^2 + \sigma^2)}\right) \quad (70)$$

достигается на масштабе $a_m = \sqrt{5}\sigma$, и равно

$$W_{g_2}(a_m, 0)[f_{gauss}] = \frac{N}{\sqrt{\sigma}} 5^{5/4} 6^{-3/2} = \frac{N}{\sqrt{a_m}} \left(\frac{5}{6}\right)^{3/2}. \quad (71)$$

Данный метод был применен при калибровке пластиковых сцинтиляторов в эксперименте NEMO, далее получил развитие в работе [58], использовался во время протонных экспериментов, получил применение в прикладном программном обеспечении для анализа гель-электрофорезных изображений.

В **Заключении** приведены основные результаты выносимые на защиту.

Работа также содержит **Приложение**, где приведены некоторые детали вычислений.

3 ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

В настоящей работе развита теория многомасштабных случайных процессов и операторнозначных функций на основе непрерывного вейвлет-преобразования. Полученные результаты могут быть применены к различным задачам теории поля, статистической физики, биологии, геофизики, в задачах физики плазмы, в том числе в исследованиях солнечного ветра в околоземном пространстве.

Основные результаты диссертации состоят в следующем:

1. На основе непрерывного вейвлет-преобразования сформулирована концепция многомасштабных случайных процессов как случайных функций на аффинной группе [6, 49]. Разработан итерационный способ решения стохастических дифференциальных уравнений, в том числе содержащих многомасштабные случайные процессы, основанный на непрерывном вейвлет-преобразовании. Этот способ применен к решению уравнения Ланжевена и его частного случая, уравнения Кардара-Паризи-Занга, описывающего динамику границы раздела фаз в флуктуирующей среде. Вычислена поправка к коэффициенту поверхностного натяжения, возникающая при действии масштабозависимой случайной силы [49].
2. Показано, что два различных многомасштабных случайных процесса, после обратного вейвлет-преобразования могут иметь совпадающие образы в пространстве процессов второго порядка. Данное свойство применено для построения многомасштабной процедуры стохастического квантования. Показано, что использование многомасштабных случайных процессов в процедуре стохастического квантования, для определенного вида случайной силы, обеспечивает регуляризацию теории [7, 49, 52].

3. Метод итерационного решения стохастических дифференциальных уравнений применен для решения уравнения Навье-Стокса с масштабозависимой случайной силой. В однопетлевом приближении вычислены корреляционная функция и функция отклика. Показано, что математическая формулировка гипотез Колмогорова может быть наиболее адекватным образом дана именно в терминах многомасштабных случайных функций [51].
4. На основе непрерывного вейвлет-преобразования предложен метод построения квантовой теории поля непосредственно на аффинной группе. Построено упорядочение операторов и канонические коммутационные соотношения для многомасштабных квантовых полей [11, 50].
5. Предложен формализм квантования иерархических систем. Построено гильбертово пространство состояний для иерархических систем и матрица плотности. Данный формализм может быть использован для описания процессов записи информации в квантовые иерархические структуры [8].
6. Построено непрерывное вейвлет-преобразование над полем \mathcal{Q}_p как разложение по представлениям p -адической аффинной группы. Построен аналог дискретного вейвлет-преобразования с вейвлетом Хаара над полем \mathcal{Q}_p [4, 9]. Предложен геометрический подход к p -адической квантовой теории поля, на основе которого выдвинуто предположение о том, что наблюдаемая анизотропия микроволнового реликтового излучения может быть следствием дискретной p -адической геометрии ранней Вселенной [12, 15, 9].
7. Путем применения вейвлет-преобразования к кумулятивной мере, определенной для первичной структуры нуклеотидных последовательностей, обнаружен [14, 5] самоподобный характер распределения нуклеотидов, что подтверждает гипотезу Оно о иерархическом кодировании информации в первичной структуре ДНК, что подтверждается также наличием межмасштабных корреляций, обнаруженных в первичной структуре нуклеотидных последовательностей [13].

Литература

- [1] *Afanasiev, S.* On the application of wavelet analysis to separation of secondary particles from nucleus-nucleus interaction / S. Afanasiev, M. Altaisky, Y. Zhestkov // *Nuovo Cim. A.* — 1995. — Vol. 108. — Pp. 919–927.
- [2] *Altaiski, M.* Fitting distributions with wavelets / M. Altaiski, O. Kochetov, K. V. // *Engineering Simulation.* — 1998. — Vol. 15. — Pp. 343–350.
- [3] *Altaiski, M. V.* On the incorporation of the concept of resolution to the definition of a coordinate system / M. V. Altaiski // *Differential equations and dynamical systems.* — 1996. — Vol. 4. — Pp. 267–274.
- [4] *Altaiski, M. V.* p -adic wavelet decomposition vs fourier analysis on spheres / M. V. Altaiski // *Indian J. of Pure and Appl. Math.* — 1997. — Vol. 28, no. 2. — Pp. 195–207.
- [5] *Altaisky, M. V.* On standard and nonstandard applications of wavelet analysis / M. V. Altaisky // *Краткие сообщения ОИЯИ.* — 1996. — Т. 74. — С. 35–60. — Переименован в "Письма в ЭЧАЯ".
- [6] *Altaisky, M. V.* Scale-dependent function in statistical hydrodynamics: a functional analysis point of view / M. V. Altaisky // *European Journal of Physics B.* — 1999. — Vol. 8, no. 4. — Pp. 613–617.
- [7] *Altaisky, M. V.* Wavelet based regularization for Euclidean field theory / M. V. Altaisky // *Group 24: Physical and mathematical aspects of symmetries* / Ed. by J.-P. Gazeau, R. Kerner, J.-P. Antoine et al. — Institute of Physics Conference series number 173. — Paris: IoP, 2002. — July. — Pp. 893–897. — Proc. of the 24th Int. Coll. Group Theor. Meth. in Physics.
- [8] *Altaisky, M. V.* Quantum states of hierarchic systems / M. V. Altaisky // *Int. J. Quantum Information.* — 2003. — Vol. 1, no. 2. — Pp. 269–278. quant-ph/0110043.
- [9] *Altaisky, M. V.* p -adic wavelet-transform and quantum physics / M. V. Altaisky // *Труды Математического Института имени В.А.Стеклова.* — 2004. — Т. 245. — С. 41–46.

- [10] *Altaisky, M. V.* Wavelet based regularization for euclidean field theory and stochastic quantization / M. V. Altaisky // Trends in Field Theory Research / Ed. by O. Kovras. — NY: Nova Science Publishers, Inc., 2004. — Pp. 105–118. hep-th/0311048.
- [11] *Altaisky, M. V.* Wavelets: Theory, Applications, Implementation / M. V. Altaisky. — India: Universities Press Ltd., 2005.
- [12] *Altaisky, M. V.* Fractal structure of quantum gravity and relic radiation anisotropy / M. V. Altaisky, V. A. Bednyakov, S. G. Kovalenko // *Int. J. Theor. Phys.* — 1996. — Vol. 35. — Pp. 253–261.
- [13] *Altaisky, M. V.* Multiscale properties of DNA primary structure: cross-scale correlations / M. V. Altaisky, V. V. Ivanov, R. V. Polozov // *Письма в ЭЧАЯ.* — 2000. — Т. 4. — С. 19–28.
- [14] *Altaisky, M. V.* Wavelet analysis of DNA sequences / M. V. Altaisky, O. A. Mornev, R. V. Polozov // *Genetic Analysis.* — 1996. — Vol. 12. — Pp. 165–169.
- [15] *Altaisky, M. V.* p -adic physics below and above Planck scales / M. V. Altaisky, B. G. Sidharth // *Chaos, Solitons and Fractals.* — 1999. — Vol. 10. — Pp. 167–176.
- [16] *Altaisky, M. V.* On standard and nonstandard applications of wavelet analysis. / M. V. Altaisky // *Краткие сообщения ОИЯИ.* — 1996. — Т. 74. — С. 35–60.
- [17] *Bausch, R.* Renormalized field theory of critical dynamics / R. Bausch, H. K. Jansen, H. Wagner // *Z. Phys. B.* — 1976. — Vol. 24. — Pp. 113–127.
- [18] Burgers equation with correlated noise: Renormalization-group analysis and applications to directed polymers and interface growth / E. Medina, M. Kardar, G. Parisi, Y.-C. Zhang // *Phys. Rev. A.* — 1989. — Vol. 39, no. 6. — Pp. 3053–3075.
- [19] *Chui, C.* An Introduction to Wavelets / C. Chui. — Academic Press Inc., 1992.
- [20] *Daubechies, I.* Ten lectures on wavelets / I. Daubechies. — Philadelphia: S.I.A.M., 1992.
- [21] *Dubrulle, B.* Possible statistics of scale invariant systems / B. Dubrulle, F. Graner // *J. de Physique II France.* — 1996. — Vol. 6, no. 5. — Pp. 797–815.

- [22] *Federbush, P.* A new formulation and regularization of gauge theories using a non-linear wavelet expansion / P. Federbush // *Progr. Theor. Phys.* — 1995. — Vol. 94. — Pp. 1135–1146.
- [23] *Forster, D.* Long-distance and long-time properties of a randomly stirred fluid / D. Forster, D. R. Nelson, M. J. Stephen // *Phys. Rev. A.* — 1977. — Vol. 16, no. 2. — Pp. 732–749.
- [24] *Halpern, M. B.* Universal continuum regularization of quantum field theory / M. B. Halpern // *Progr. Theor. Phys. Suppl.* — 1993. — Vol. 111. — Pp. 163–184.
- [25] How to resolve overlapping gaussian signals using wavelets / M. V. Altaisky, E. A. Kolganova, V. E. Kovalenko, G. A. Ososkov // Proceedings of International conference of SPIE / International Society for Optical Engineering. — Vol. 2847. — Denver, USA: 1996. — August 4-9. — Pp. 656–664.
- [26] *Kardar, M.* Dynamic scaling of growing interfaces / M. Kardar, G. Parisi, Y.-C. Zhang // *Phys. Rev. Lett.* — 1986. — Vol. 56, no. 9. — Pp. 889–892.
- [27] Long-range correlations in nucleotide sequences / C. K. Peng, S. V. Buldyrev, A. L. Goldberg et al. // *Nature.* — 1992. — Vol. 356. — Pp. 168–171.
- [28] *Mallat, S.* A theory for multiresolution signal decomposition: wavelet transform / S. Mallat. — Preprint GRASP Lab. Dept. of Computer and Information Science, Univ. of Pennsylvania.
- [29] *Mallat, S.* Multiresolution approximation and wavelets / S. Mallat // *Trans. Amer. Math. Soc.* — 1989. — Vol. 315. — Pp. 69–88.
- [30] *Mallat, S.* A wavelet tour of signal processing / S. Mallat. — Academic Press, 1999.
- [31] *Martin, P. C.* Statistical dynamics of classical systems / P. C. Martin, E. D. Siggia, H. A. Rose // *Phys. Rev.* — 1973. — Vol. A8. — Pp. 423–437.
- [32] *Meneveau, C.* Analysis of turbulence in orthonormal wavelet representation / C. Meneveau // *J. Fluid. Mech.* — 1991. — Vol. 232. — Pp. 469–520.
- [33] *Mensky, M. B.* Quantum measurement and decoherence / M. B. Mensky. — Kluwer Academic, 2000.

- [34] *Morlet, J.* Sampling theory and wave propagation / J. Morlet // Proc. 51st Annu. Meet. Soc. Explor. Geophys. — Los-Angeles: 1981.
- [35] *Namiki, M.* Stochastic quantization / M. Namiki. — Springer, 1992. — Vol. m9 of *Lecture notes in physics*.
- [36] *Nielsen, M.* Quantum computation and quantum information / M. Nielsen, I. Chuang. — Cambridge University Press, 2000.
- [37] *Ohno, S.* Codon preference is but an illusion created by the construction principle of the coding sequences / S. Ohno // *Proc. Natl. Acad. Sci. (USA)*. — 1988. — Vol. 85. — Pp. 4378–4382.
- [38] *Ondelettes, multifractales et turbulence* / A. Arneodo, F. Argoul, E. Bacry et al. — Paris: Diderot, 1995.
- [39] *Parisi, G.* Perturbation theory without gauge fixing / G. Parisi, Y.-S. Wu // *Scientica Sinica*. — 1981. — Vol. 24. — Pp. 483–496.
- [40] *Ramal, R.* Ultrametricity for physisists / R. Ramal, G. Toulouse, M. A. Virasoro // *Rev. Mod. Phys.* — 1986. — Vol. 58. — Pp. 765–788.
- [41] *Restero, J. M.* Wavelet-Galerkin discretization of hyperbolic equations / J. M. Restero, G. K. Leaf // *J.Comp.Phys.* — 1995. — Vol. 122. — Pp. 118–128.
- [42] *Voss, R. F.* Evolution of long-range fractal correlations and 1/f noise in DNA base sequences / R. F. Voss // *Phys. Rev. Lett.* — 1992. — Vol. 68, no. 25. — Pp. 3805–3808.
- [43] *Wavelet analysis of DNA sequences* / A. A. Tsonis, P. Kumar, J. B. Elsner, P. A. Tsonis // *Phys. Rev. E*. — 1996. — Vol. 53, no. 2. — Pp. 1828–1834.
- [44] *Wheeler, J. A.* Superspace and the nature of quantum geometrodynamics / J. A. Wheeler // *Battelle Rencontres* / Ed. by C. DeWitt, J. Wheeler. — NY: Benjamin, 1968.
- [45] *Wyld, H. W.* Formulation of the theory of turbulence in an incompressible fluid / H. W. Wyld // *Annals of Physics*. — 1961. — Vol. 14, no. 2. — Pp. 143–165.
- [46] *Yomo, T.* Concordant evolution of coding and noncoding regions of DNA made possible by the universal rule of TA/CG deficiency–TG/CT excess / T. Yomo, S. Ohno // *Proc. Natl. Acad. Sci. (USA)*. — 1989. — Vol. 86. — Pp. 8452–8456.

- [47] *Zinn-Justin, J.* Renormalization and stochastic quantization / J. Zinn-Justin // *Nuclear Physics B*. — 1986. — Vol. 275, no. FS17. — Pp. 135–159.
- [48] *Аджемян, Л. Ц.* Ренормгрупповой подход в теории турбулентности: размерности составных операторов / Л. Ц. Аджемян, А. Н. Васильев, Ю. М. Письмак // *Теор. Матем. Физ.* — 1983. — Т. 57. — С. 268–281.
- [49] *Алтайский, М. В.* Уравнение Ланжевена с масштабно-зависимым шумом / М. В. Алтайский // *Доклады РАН*. — 2003. — Т. 392, № 2. — С. 180–182.
- [50] *Алтайский, М. В.* Причинность и многомасштабные разложения в квантовой теории поля / М. В. Алтайский // *Письма в ЭЧАЯ*. — 2005. — Т. 2, № 6. — С. 7–11.
- [51] *Алтайский, М. В.* Многомасштабная теория турбулентности в вейвлет-представлении / М. В. Алтайский // *Доклады РАН*. — 2006. — Т. 410, № 3. — С. 326–330.
- [52] *Алтайский, М. В.* Многомасштабное стохастическое квантование / М. В. Алтайский // *Нелинейный мир*. — 2006. — Т. 4, № 4/5. — С. 246–255.
- [53] *Алтайский, М. В.* Вейвлет-галеркинские методы решения дифференциальных уравнений в частных производных с применением параллельных алгоритмов / М. В. Алтайский, В. А. Крылов // *Вестник РУДН*. — 2002. — Т. 1, № 1. — С. 98–106.
- [54] *Астафьева, Н. М.* Вейвлет анализ: основы теории и некоторые приложения / Н. М. Астафьева // *УФН*. — 1994. — Т. 166, № 11. — С. 1146–1170.
- [55] *Дремин, И. М.* Вейвлеты и их использование / И. М. Дремин, О. В. Иванов, В. А. Нечитайло // *УФН*. — 2001. — Т. 171, № 5. — С. 465–501.
- [56] *Горбачев, В. Н.* Физические основы современных информационных процессов / В. Н. Горбачев, А. И. Жилиба. — Санкт-Петербург: Издательство "Петербургский институт печати 2004.
- [57] *Колмогоров, А. Н.* Локальная структура турбулентности в несжимаемой жидкости при очень больших числах Рейнольдса / А. Н. Колмогоров // *ДАН СССР*. — 1941. — Т. 30. — С. 299–303.

- [58] *Ососков, Г. А.* Применение вейвлет-анализа для обработки дискретных сигналов гауссовой формы: Tech. Rep. P11-97-347 / Г. А. Ососков, А. Б. Шитов. — Дубна: ОИЯИ, 1997.
- [59] *Владимиров, В. С.* p -Адический анализ и математическая физика / В. С. Владимиров, И. В. Волович, Е. И. Зеленов. — Москва: Наука, 1994.
- [60] *Зимин, В. Д.* Иерархическая модель турбулентности / В. Д. Зимин // *Известия АН СССР*. — 1981. — Т. 17, № 12. — С. 941–946.

4 Список публикаций автора по теме диссертации

4.1 Книги

1. *Altaisky M.V.* Wavelet based regularization for euclidean field theory and stochastic quantization. // Trends in Field Theory Research / Eds. O. Kovras. Nova Science Publishers, 2004. (Глава в книге)
2. *Altaisky M.V.* Wavelets: Theory, Applications, Implementation. Universities Press Ltd., 2005.

4.2 Статьи в журналах

1. *Afanasiev S.V, Altaisky M.V, Zhestkov Yu.G.* On applications of wavelet analysis to separation of secondary particles from nucleus-nucleus interactions // Nuovo Cimento A. 1995. V.108. P.919 - 927.
2. *Altaisky M.V., Bednyakov V.A., Kovalenko S.G.* Fractal structure of quantum gravity and relic radiation anisotropy // Int. J. Theor. Phys. 1996. V.35. P. 253-261.
3. *Altaisky.* On the incorporation of the concept of resolution to the definition of a coordinate system // Differential equations and dynamical systems. 1996. V.4. P. 267-274.
4. *Altaisky M.V, Kolganova E.A., Kovalenko V.E., Ososkov G.A.* How to resolve overlapping gaussian signals using wavelets // SPIE Proc. 1996. V.2847. P.656-664.
5. *Altaisky M.V., Mornev O.A, Polozov R.V.* Wavelet analysis of DNA sequences // Genetic Analysis. 1996. V.12. P.165-169.
6. *Altaisky M.V.* On standard and nonstandard applications of wavelet analysis // Краткие сообщения ОИЯИ. 1996. Т.74. С.35-60. Переименован в "Письма в ЭЧАЯ".
7. *Altaiski M.V.* p -adic wavelet decomposition vs Fourier analysis on spheres // Indian J. of Pure and Appl. Math. 1997. V.28 P.195-207.
8. *Altaiski M., Kochetov O., Kovalenko V.* Fitting distributions with wavelets // Engineering Simulation. 1998. V.15. P.343-350.

9. *Altaisky M.V.* Scale-dependent function in statistical hydrodynamics: a functional analysis point of view // European Journal of Physics B. 1999. V.8. P.613-617.
10. *Altaisky M.V., Sidharth B.G.* p -adic physics below and above planck scales // Chaos, Solitons and Fractals. 1999. V.10. P.167-176.
11. *Altaisky M.V., Ivanov V.V., Polozov R.V.* Multiscale properties of DNA primary structure: cross-scale correlations// Письма в ЭЧАЯ. 2000. Т.4. С.19-28.
12. *Алтайский М.В., Крылов В.А.* Вейвлет-галеркинские методы решения дифференциальных уравнений в частных производных с применением параллельных алгоритмов// Вестник РУДН. 2002. Т.1. С.98-106.
13. *Altaisky M.V.* Quantum states of hierarchic systems // Int. J. Quantum Information. 2003. V.1. P.269-278.
14. *Altaisky M.V.* p -adic wavelet transform and quantum physics // Труды математического института им.В.А.Стеклова. 2004. Т.245. С.41-46.
15. *Алтайский М.В.* Уравнение Ланжевена с масштабно-зависимым шумом // Доклады РАН. 2003. Т.392. С.180-182.
16. *Алтайский М.В.* Причинность и многомасштабные разложения в квантовой теории поля // Письма в ЭЧАЯ., 2005. Т.2. С.7-11.
17. *Altaisky M.V.* Scale-dependent functions, stochastic quantization and renormalization // SIGMA. 2006 V.2. P.046.
18. *Алтайский М.В.* Многомасштабное стохастическое квантование // Нелинейный мир. 2006. Т.4. С.246-255.
19. *Алтайский М.В.* Многомасштабная теория турбулентности в вейвлет-представлении // Доклады РАН. 2006. Т.410. С.326-330.