На правах рукописи

СЛАВИН Александр Геннадьевич

ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕЧЕНИЙ ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ НАД НЕОДНОРОДНЫМ ПРОФИЛЕМ ДНА В ПРИБЛИЖЕНИИ МЕЛКОЙ ВОДЫ

01.04.02 – теоретическая физика

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2008

Работа выполнена в Институте космических исследований Российской академии наук (ИКИ РАН).

Научный руководитель:
к.ф.-м.н. Петросян Аракел Саркисович (ИКИ РАН – Институт космических исследований Российской академии наук).

Официальные оппоненты:
д.ф.-м.н, профессор, Жмур Владимир Владимирович (ИОРАН - Институт Океанологии им. П. П. Ширшова Российской академии наук).

д.ф.-м.н, профессор, Иванов Михаил Федорович (ИТЭС ОИВТ РАН - Институт теплофизики экстремальных состояний Объединенный институт высоких температур Российской академии наук).

Ведущая организация:
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет.

Защита состоится 11 ноября 2008 г. в 15 ч. 00 мин. на заседании Диссертационного Совета Д 002.113.03 ИКИ РАН по адресу: Москва, ул. Профсоюзная 84/32, 2-й подъезд, конференц-зал.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИКИ РАН.
Автореферат разослан 11 октября 2008 г.

Ученый секретарь
Диссертационного совета,
к.ф.-м.н. Буринская Т. М.

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Задача об обтекании сложной границы течениями тяжелой жидкости со свободной поверхностью в присутствии источников является фундаментальной для моделирования крупномасштабных течений атмосферы и океана. Это, прежде всего, связано с тем, что улучшение разрешения таких моделей делает необходимым учет особенностей рельефа границы и поэтому требует глубокого понимания процессов на малых масштабах и их нетривиального влияния на крупном масштабе. Уравнения Эйлера, полностью описывающие гидродинамику природных и лабораторных течений идеальной жидкости, настолько сложны, что при наличии комплексной границы даже в предположении несжимаемости, баротропности и отсутствии вращения, не поддаются численному интегрированию в задачах с достаточно сильным изменением геометрии подстилающей поверхности. По этой причине разработка приближенных моделей и вычислительных методов, альтернативных решению исходных трехмерных уравнений гидродинамики, является актуальной проблемой.

Необходимость редукции исходных уравнений в классе задач со свободной поверхностью привела после предположения гидростатичности распределения давления, усреднению поля скорости по глубине потока и пренебрежения изменением горизонтальных скоростей вдоль линий коллинеарных вектору силы тяжести, к построению Стокером математической модели более низкого порядка. Данная модель известна как модель «мелкой воды», поскольку редукция осуществляется разложением исходных уравнений по малому параметру, определяемому отношением глубины жидкости к характерному линейному размеру. При наличии внешнего источника, например, силы Кориолиса, область применения модели не ограничена условием малости глубины жидкости по сравнению с характерными линейными размерами, поскольку в этом случае двумерность течения есть следствие вращения, а не тонкости слоя. Уравнения мелкой воды, являясь системой нелинейных гиперболических уравнений, аппроксимируют полную систему уравнений Эйлера, описывающую течения несжимаемой жидкости со свободной поверхностью в поле силы тяжести при пренебрежении эффектами вертикальной неоднородности горизонтального поля скорости.

Уравнения мелкой воды широко используются для описания различных физических явлений, например для описания крупномасштабных атмосферных и океанических течений, для моделирования Большого Красного Пятна в атмосфере Юпитера, для описания течений в береговых зонах морей и океанов, моделирования цунами, распространения волн прорыва и приливных бор в реках, распространения тяжелых газов и примесей в атмосфере Земли.

Нелинейный характер уравнений мелкой воды в случае неоднородной подстилающей поверхности означает, что использование аналитических методов решения может иметь успех только при очень специальных условиях и для их решения приходится использовать численные методы. Гиперболичность уравнений мелкой воды определяет наряду с гладкими наличие разрывных решений. Даже в случае, когда начальные условия являются гладкими, нелинейный характер уравнений наряду с их гиперболичностью в конечное время может привести к разрывному решению.

Классическая модель мелкой воды разработана для изучения течений над слабоменяющимся рельефом или на наклонных плоскостях. Наличие же препятствий, обусловленных резким изменением подстилающей поверхности, требует разработки альтернативных приближений, учитывающих влияние вертикальной неоднородности течения, возникающего у препятствий, поскольку классические приближения мелкой воды на такой границе нарушаются.

Простые автомодельные решения гиперболических систем уравнений являются основополагающими в исследовании нелинейных волновых явлений, поскольку позволяют найти точное решение задачи распада произвольного разрыва. Задача Коши о распаде произвольного разрыва кусочно-постоянных начальных условий, впервые возникшая в газовой динамике (задача Римана), имеет фундаментальное значение. Ее решение облегчает понимание множества нелинейных явлений в течениях несжимаемой жидкости со свободной границей в рамках приближения мелкой воды. Решение такой задачи на ступенчатой границе особенно важно при изучении течений над сложной подстилающей поверхностью, аппроксимируемой системой таких ступенчатых границ. Существующий аналитический подход для решения задачи Римана, основанный на предположении о наличии стационарной зоны в окрестности ступенчатой границы, с одной стороны не учитывает потери кинетической энергии на турбулентное перемешивание вблизи ступеньки, с другой – накладывает ограничения на возможные глубины натекающего потока для преодоления ступенчатой границы. Решение этой задачи является важнейшим компонентом в разработке численных методов сквозного счета, основанных, как на аналитических, так и на приближенных решениях задачи Римана. Основная идея методов годуновского типа, основанные на решении задачи Римана, состоит в расщеплении решения многомерной задачи на набор одномерных подзадач, возникающих после кубирования расчетной области и записи соответствующих интегральных соотношений для всех элементов (ячеек), посредством которых осуществлялось кубирование. Данные методы особенно часто находят применение в численном моделировании, поскольку позволяют получать решение, не только в области непрерывного течения, но и в областях разрыва решений, без специального выделения и отслеживания поверхностей разрыва. Кроме того, эти методы хорошо адаптируются к сложным граничным условиям, характерным для большинства постановок задач, описывающих реальные природные течения.

При численном моделировании течений мелкой воды над неоднородным профилем дна, после перехода к конечно-разностным соотношениям, профиль произвольной неоднородной поверхности представляется ломаной, состоящей из соответствующей комбинации вертикальных горизонтальных или наклонных отрезков, концы которых соответствуют узлам сетки. Учет неоднородности границы между узлами осуществляется либо параметризацией диссипации кинетической энергии на границе, либо введением стоковых слагаемых, точно отражающих природу процессов лишь в случае плоской подстилающей поверхности с ограниченным углом наклона. В последнем случае эти слагаемые представляют собой скатывающую силу, действующую на жидкость. Однако, непосредственно сами узловые точки, где происходит достаточно резкое изменение рельефа дна, вносят свой вклад лишь опосредовано через влияние дополнительных стоковых слагаемых или изменение значения параметризации в соседних областях от узловой точки.

Строго говоря, численное решение слева и справа от точки, являющейся узлом сетки, определяет два различных течения, соответствующих различным дифференциальным системам уравнений. В малой окрестности этой точки обе аппроксимации исходных уравнений Эйлера не работают, при этом, однако, величина возмущений вблизи такой особенности может быть сопоставима с масштабом изучаемого течения и, следовательно, может нарушить аппроксимацию решений, исходных уравнений Эйлера. А именно, осредненные по глубине решения уравнений Эйлера будут принципиально отличаться от решений осредненных уравнений, т. е. уравнений мелкой воды. Физически данная ситуация обусловлена, с одной стороны, нарушением предположения о гидростатическом распределении давления, с другой, нетривиальной зависимостью горизонтальной скорости от вертикальной координаты.

Существуют различные подходы к решению уравнений мелкой воды в случае наличия подстилающей поверхности произвольного профиля. Распространенным подходом к решению являются методы, представляющие наклонную поверхность дна в виде источников в уравнениях мелкой воды. Однако данный подход неработоспособен в случае наличия участков подстилающих поверхностей с резкими перепадами высот, в частности, для уступов дна, где особенно обостряется проблема, связанная с неоднородностью горизонтальной скорости. Другой подход к решению этой проблемы состоит в замене участков с резким перепадом подстилающей поверхности наклонными плоскостями с большим углом наклона. Однако, такой подход лишь обостряет проблему возмущений, вносимых особенностями аппроксимации поверхности, и игнорирует принципиальные проблемы, обусловленные негидростатичностью давления и зависимостью горизонтальной скорости от вертикальной координаты. В качестве альтернативы используют реконструкцию данных на границе вертикальной неоднородности дна (ступенчатой границы) без учета особенностей решения задачи Римана, вызванных наличием такой неоднородности. В рамках приближения мелкой воды не существует однозначного решения вблизи разрыва дна, вследствие чего, для выбора единственного решения необходимо вводить дополнительные предположения, отражающие реальную картину течения. Вообще говоря, начиная с некоторого критического значения удельного перепада высот, необходимо принимать во внимание величину отклонения горизонтальной скорости от средней, поскольку это отклонение нетривиально отражается уже на самих средних величинах.

Одной из основных трудностей моделирования течений мелкой воды является возможность появления зон частичного или полного обмеления. Зоны частичного обмеления могут появляться в областях течений, где глубина жидкости сопоставима с величиной перепада подстилающей поверхности. В таком случае рассматриваемая область течения может преобразовываться из односвязной в многосвязную или наоборот. Зоны полного обмеления представляют вычислительную сложность для большинства конечно-разностных методов и требуют выделения и специально учета таких зон.

Для решения многих реальных задач недостаточно учитывать только неоднородность подстилающей поверхности. Необходимость рассмотрения дополнительных воздействий, определяемых конкретными условиями течения, приводит к появлению в системе уравнений мелкой воды дополнительных членов. В частности, для расчета крупномасштабных атмосферных и океанических задач следует принимать во внимание эффекты, определяемые планетарным вращением. Наличие хорошо разработанного и апробированного численного аппарата вкупе с многократно протестированной программной реализацией сделало особенно привлекательным сведение решения задачи о вращающейся «мелкой воде» над ровной подстилающей поверхностью к решению задачи о течениях мелкой воды над комплексной нестационарной границей. Представление силы Кориолиса фиктивной нестационарной границей создает важные преимущества при моделировании течений на неровной границе, сводя задачу к моделированию течений мелкой воды над нестационарной эффективной поверхностью. Однако, применение такого представления в расщепляющихся численных методах затрудняется отсутствием одномерной постановки задач для вращающейся жидкости. Формальное постановка одномерной задачи, определяемой отказом от частных производных по одному из пространственных направлений, делает особенно актуальным нахождение горизонтальной неоднородности трансверсальной составляющей вектора скорости, определяющей консервативность силы Кориолиса, в зависимости от вертикальной структуры течения.

Цель работы

Разработать теорию для течений мелкой воды на ступенчатой границе с учётом вертикальной неоднородности поля скорости вблизи ступеньки.

Найти решение задачи Римана для течений мелкой воды на ступенчатой границе с учетом диссипации кинетической энергии. Исследовать возможность формирования стационарной зоны вблизи ступенчатой границы и проверить полученное решение на автомодельность.

Построить на основе найденного решения задачи Римана численный алгоритм для исследования гидродинамических течений тяжелой невязкой жидкости со свободной поверхностью над сложным профилем дна. Провести численное исследование задачи о падении столба жидкости на сложной подстилающей поверхности и задачи о набегании волны цунами на наклонный берег.

Разработать конечно-разностное представление силы Кориолиса в моделях вращающейся мелкой воды и разработать численный метод расчета течений вращающейся мелкой воды над неоднородными подстилающими поверхностями. Провести численное исследование течения вращающейся жидкости над подстилающей поверхностью параболического профиля.

Разработать алгоритм для решения уравнений мелкой воды с источниковым членом произвольной природы.

Научная новизна работы

Разработана квазидвухслойная теория для исследования гидродинамических течений тяжелой невязкой жидкости со свободной поверхностью над неоднородным профилем дна, учитывающая вертикальную неоднородность поля скорости. Решена задача Римана для течений мелкой воды над ступенчатой границей. Впервые в результате качественного учета диссипации поступательной механической энергии, как функции крупномасштабных характеристик потока, класс полученных решений был расширен решениями, содержащими волны разряжения, проходящие через ступенчатую границу или примыкающие к ней.

Разработан новый численный алгоритм, позволяющий вести сквозной расчет гидродинамических течений над сложной подстилающей поверхностью без специального выделения зон обмеления для нестационарной многосвязной расчетной области. Впервые проведено численное исследование падения столба жидкости на сложную подстилающую поверхность.

Предложена качественная картина для обоснования использования фиктивной нестационарной подстилающей поверхности, описывающей влияния силы Кориолиса. Для расчета течений мелкой воды над произвольной поверхностью в присутствии силы Кориолиса, разработан модернизированный метод Годунова, основанный на квазидвухслойном представлении. В отличие от известных методов расчета течений вращающейся мелкой воды предложенный метод адаптируется к значению текущих параметров течения.

Впервые установлена структура решения вращающейся мелкой воды внутри пространственно-временной области для глубины и одной из составляющих вектора скорости по выбранному направлению, для уточнения, конвективно переносимой, второй составляющей вектора скорости. Тем самым были минимизированы паразитные явления, обусловленные отказом от интегрирования уравнения для трансверсальной составляющей вектора скорости.

Практическая и научная ценность работы

Разработанная в диссертации квазидвухслойная теория мелкой воды и найденное на ее основе решение задачи Римана может быть использована для исследования нелинейных процессов в течениях тяжелой жидкости со свободной поверхностью на сложной границе, а также для разработки целого ряда численных алгоритмов годуновского типа. Найденное решение задачи Римана позволяет эффективно решать практические задачи о разрушениях дамб.

Полученные в диссертации результаты увеличивают потенциальные возможности для моделирования атмосферных и океанических течений и течений в береговых зонах. Разработанные численные модели течений мелкой воды на сложной подстилающей поверхности хорошо адаптируются к реальным границам и позволяют исследовать взаимодействие волн цунами с береговой линией, изучать распространение тяжелых газов в атмосферном пограничном слое.

Предложенное в диссертации квазидвухслойное конечно-разностное представление силы Кориолиса и разработанный на ее основе численный метод моделирования крупномасштабных атмосферных и океанических течений может быть использован для изучения задачи геострофической адаптации на неоднородной границе, для изучения геофизических течений на границе с произвольной орографией.

Разработанный алгоритм расчета течений вращающейся мелкой воды может быть использован для построения других численных методов, учитывающих консервативность силы Кориолиса.

Обоснованность и достоверность полученных результатов

Достоверность полученных в диссертационной работе результатов обеспечивается использованием строгих математических методов анализа гиперболических уравнений в частных производных, а также сравнением с результатами известных численных и точных решений течений мелкой воды над подстилающими поверхностями сложного профиля. Достоверность результатов расчетов вращающейся мелкой воды обеспечивается сравнением с данными геофизических исследований и качественным согласием с представлениями геофизической гидродинамики.

Публикации

Основные результаты работы опубликованы в 2 статьях в реферируемых российских изданиях, из списка журналов рекомендованных ВАК, и 3 статьях опубликованных в трудах российских и международных конференций. Результаты работы представлены в 9 тезисах докладов российских и международных конференций.

Апробация работы

Результаты, изложенные в диссертации, были представлены на российских и международных научных конференциях и симпозиумах:

- Международной конференции МСС-04 «Трансформация волн, когерентные структуры и турбулентность». Москва, 2004.
- XLVII научной конференции МФТИ. Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук. Москва, 2004.

- II Конференции молодых ученых «Фундаментальные и прикладные космические исследования», посвященной дню космонавтики. Москва, 2005.
- XXVII конференции молодых ученых механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова. Москва, 2005.
- European Geosciences Union, General Assembly, Vienna, Austria, 2005.
- XLVIII научной конференции МФТИ. Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук. Москва, 2005.
- III Конференции молодых ученых «Фундаментальные и прикладные космические исследования», посвященной дню космонавтики. Москва, 2006.
- XXVIII Конференции молодых ученых механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова. Москва, 2006.
- The Fifth International Symposium on Environmental Hydraulics. Arizona, USA, 2007.
- XVI Научная сессия Совета РАН по нелинейной динамике. Москва, 2007.
- V Конференции молодых ученых «Фундаментальные и прикладные космические исследования», посвященной дню космонавтики. Москва, 2008.
- XXX Конференции молодых ученых механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова. Москва, 2008.

Личный вклад автора

Автор принимал участие в формулировке задачи и выборе методики ее решения. Все теоретические и численные результаты, представленные в диссертационной работе, а также разработка численных алгоритмов, сравнения результатов с известными численными и точными решениями, были получены автором лично.

Структура и объем диссертации

Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, заключения и списка цитированной литературы. Объем диссертации – 146 страниц. Библиография включает 112 наименований. Диссертация содержит 70 рисунков.

Содержание работы

Во введении обсуждается современное состояние теории течений мелкой воды в присутствии источников на неоднородных поверхностях, обосновывается актуальность и сформулированы цели работы, дается обзор литературы, приведены сведения о научной новизне, практической и научной ценности, личном вкладе автора, сформулированы положения, выносимые на защиту, и приведены сведения о структуре диссертации.

В **первой главе** диссертации предложена теория для течений мелкой воды на ступенчатой границе с учётом вертикальной неоднородности поля скорости, основанная на двухслойной аппроксимации уравнений Эйлера вблизи ступенчатой границы. Идея квазидвухслойной модели состоит в разбиении потока жидкости или газа на два слоя, так что для верхнего, с параметрами потока h_2 и u_2, влияние ступенчатой границы, высоты a, косвенно, а для нижнего, с параметрами потока h_1 и u_1, ступенчатая граница влияет непосредственно, останавливая перенос массы в нижнем слое. Система уравнений для двухслойной мелкой воды выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial h_1}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}(h_1 u_1) = 0, \\ \dfrac{\partial h_2}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}(h_2 u_2) = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial t}(h_1 u_1) + \dfrac{\partial}{\partial x}(h_1 u_1^2 + \dfrac{1}{2} g h_1^2) + g h_1 \dfrac{\partial h_2}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial t}(h_2 u_2) + \dfrac{\partial}{\partial x}(h_2 u_2^2 + \dfrac{1}{2} g h_2^2) + g h_2 \dfrac{\partial h_1}{\partial x} = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Ступенчатая граница полностью тормозит нижний слой: $u_1 = 0$, при $x = 0, \quad t \ge 0$. Условия Коши для системы (1) имеют вид:

$$\begin{aligned} &h_1 = h^*,\ h_2 = h_l - h^*,\ u_1 = u_l,\ u_2 = u_l \quad \text{при } x \le 0; \\ &h_2 = h_r,\ u_2 = u_r \quad \text{при } x > 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Предположение о том, что формирование волновой картины в нижнем слое происходит много быстрее, чем в верхнем, позволяет разделить поток на слои так, что нижний слой, взаимодействуя со ступенчатой границей, приходит в состояние покоя и образовывает с ней единую горизонтальную плоскость. Тогда возможно пренебречь членом $gh_1 \frac{\partial h_2}{\partial x}$ в третьем уравнении системы (1) и, выбирая временной шаг так, что верхний слой не успеет оказать существенного влияния на нижний, пренебречь членом $gh_2 \frac{\partial h_1}{\partial x}$. Следовательно, система (1) распадается на две подсистемы, а переменные h_1 и u_1 вычисляются независимо от переменных h_2 и u_2. Таким образом, влияние нижнего слоя на верхний будет осуществляться за счет изменения начальных условий (2), в частности условия $h_2 = h_l - h^*$ при $x \le 0$, определяемого изменением глубины нижнего слоя при торможении потока.

В результате пара параметров h_1 и u_1 связывается с параметрами h_2 и u_2 через начальный параметр h^*. Следовательно, проблема нахождения значения h^* сводится к решению обратной задачи Дирихле:

$$\begin{cases} \frac{\partial h_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(h_1 u_1) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(h_1 u_1) + \frac{\partial}{\partial x}(h_1 u_1^2 + \frac{1}{2} g h_1^2) = 0, \end{cases} \tag{3}$$

$h_1 = h^*$ при $x < 0$, $t = 0$; $u_1 = u_l$ при $x \le 0$, $t = 0$;
$u_1 = 0$ при $x = 0$, $t \ge 0$; $h_1 = a$ при $x = 0$, $t \ge 0$.

Решение системы (3) зависит от направления течения жидкости, то есть скорости u_l:

а) $u_l > 0$, картина течения имеет вид отраженной влево ударной волны, слева от которой параметры потока h^* и $u_l > 0$, а справа жидкость покоится, то есть $h = a$ и $u = 0$, и глубина запирания, определяемая влиянием ступенчатой границы, вычисляется следующим образом:

$$u_l = (a - h^*)\sqrt{\frac{g}{2}\frac{(a + h^*)}{ah^*}}. \tag{4}$$

Решение определяется непосредственно из алгебраической формулы (4), вытекающей из соотношений Гюгонио на гидравлическом прыжке;

б) $u_l < 0$, картина течения имеет вид уходящей влево волны разрежения, слева от которой параметры потока h^* и $u_l < 0$, и справа так же $h = a$ и $u = 0$, следовательно, решение определяется из постоянства соответствующего инварианта Римана, описывающего волну разрежения:

$$h^* = \frac{1}{g}\left(\sqrt{ga} - \frac{1}{2}u_l\right)^2. \qquad (5)$$

Выражение (5) в явном виде определяет глубину нижнего слоя, полностью останавливаемого влиянием ступенчатой границы.

Принципиально отличная ситуация будет складываться в случае, если h^* лежит вне интервала $(0, h_l]$. Физически это означает либо равенство нулю глубины $h^* = 0$ и, следовательно, отсутствие нижнего слоя, а вместе с ним и жидкости и/или изменения высоты подстилающей поверхности. Либо в случае превышения $h^* > h_l$ соответствует полному торможению потока слева, то есть в такой ситуации фиктивная поверхность является непротекаемой границей для всей жидкости слева, и следовательно, следует принять $h_2 = 0$ при $x < 0$. Тогда значение h_1 при $x = 0$ может быть найдено, как решение задачи о взаимодействии с непротекаемой границей всей жидкости, находящейся слева.

Найденное значение h^* позволяет найти значения потоковых величин, как решение уже классической задачи Римана для параметров верхнего слоя над ровным дном с соответствующими начальными условиями. Предложенный метод адаптируется к параметрам потока и позволяет учитывать особенности течения жидкости в каждой точке пространства и в каждый момент времени.

Разработанная конечно-разностная схема для исследования течений мелкой воды над ступенчатой границей высоты a в одномерном случае выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} H_x^{t+1} = H_x^t + \tau \times \left(\dfrac{H_{x-1/2}^t U_{x-1/2}^t - H_{x+1/2}^t U_{x+1/2}^t}{X} \right) \\ U_x^{t+1} = \tau \times \left(\begin{array}{l} H_{x-1/2}^t \left(U_{x-1/2}^t\right)^2 + \dfrac{g\left(H_{x-1/2}^t\right)^2}{2} - \\ -H_{x+1/2}^t \left(U_{x+1/2}^t\right)^2 - \dfrac{g\left(H_{x+1/2}^t + i \times a\right)^2}{2} \end{array} \right) / X H_x^{t+1} + \dfrac{H_x^t U_x^t}{H_x^{t+1}} \end{cases} \qquad (6)$$

где τ - шаг по времени, X - шаг по пространству. H_x^t - глубина жидкости, U_x^t - скорость жидкости. Нижний индекс *x* обозначает значение функции, отнесенное к центру масс ячейки с номером *x*. Полунижние индексы

$x \pm 1/2$ обозначают значения величин на границе между ячейками с номерами x и $x \pm 1$ соответственно. Верхний индекс *t* обозначает номер шага по времени.

Грань ячейки над ступенчатой границей состоит из двух частей: из части, аппроксимирующей ступенчатую границу, и оставшейся части, через которую осуществляется свободное течение жидкости. Формально, с точки зрения приближения мелкой воды, первая часть отсутствует, хотя для исходных уравнений Эйлера она фактически является подстилающей поверхностью – границей, на которой выполнено условие непротекания. При выводе уравнений мелкой воды это условие учитывается в самом уравнении, что, очевидно, не изменяет природу взаимодействия подстилающей поверхности с потоком жидкости. Поэтому члены, отвечающие в разностной схеме за работу, имеют вид: $\frac{g\left(H^t_{x-1/2}\right)^2}{2}$, $\frac{g\left(H^t_{x+1/2} + i \times a\right)^2}{2}$, где слагаемое $i \times a$ описывает работу перепада высот подстилающей поверхности над потоком жидкости. Здесь i принимает значение либо 0 в случае отрицательного перепада высот подстилающей поверхности, либо $0 \le i \le 1$ в случае положительного перепада. Переменная i принимает значение равное 1 в случае если H^*, определяемое соотношениями (4,5) для соответствующей грани ячейки *x,* не превышает значения глубины внутри нее. В противном случае значение i на соответствующей грани является отношением глубины, формирующейся при полном торможении потока на указанной грани, к соответствующему перепаду высот подстилающей поверхности. Значения $H^t_{x\pm1/2}$, $U^t_{x\pm1/2}$ на гранях вычисляются путем решения соответствующих задач Римана, на основе квазидвухслойной модели.

С помощью разработанного квазидвухслойного метода решена задача распада произвольного разрыва для уравнений мелкой воды на ступенчатой границе. Обнаружена автомодельность решений распада произвольного разрыва и наличие стационарного скачка вблизи ступенчатой границы. Были получены численные решения для всех возможных конфигураций, реализующихся, в предположении наличия стационарного перехода вблизи ступенчатой границы, при аналитическом подходе. Показано, что в результате качественного учета диссипации поступательной механической энергии за счет турбулентности, как функции крупномасштабных характеристик потока, класс полученных решений расширяется за счет волн разряжения, проходящих через ступеньку. Проведено сравнение с известными численными и точными решениями задачи Римана на ступенчатой границе.

Вторая глава диссертации посвящена разработке метода для исследования течений тяжелой жидкости со свободной поверхностью над границей произвольной формы. Метод основан на аппроксимации произвольной границы ступенчатой поверхностью и использовании традиционного метода Годунова в областях однородной горизонтальной поверхности и квазидвухслойной модели в областях, примыкающих к вертикальным особенностям рельефа дна. Метод обеспечивает единообразие построения решения как в областях со сложной геометрией подстилающей поверхности, так и в областях ровного или наклонного дна, экономичность при работе с большими расчетными областями по пространству, учет диссипации поступательной кинетической энергии за счет возникающей у ступеньки турбулентности и возможность добавления разнообразных стоков, массовых источников, трения.

Работоспособность метода была проверена на основе решений нескольких классов гидродинамических задач, определяемых особенностями подстилающих поверхностей. В частности была промоделирована и сопоставлена с аналитическим решением задача распада столба жидкости над наклонной затопленной плоскостью, аппроксимируемой системой уступов.

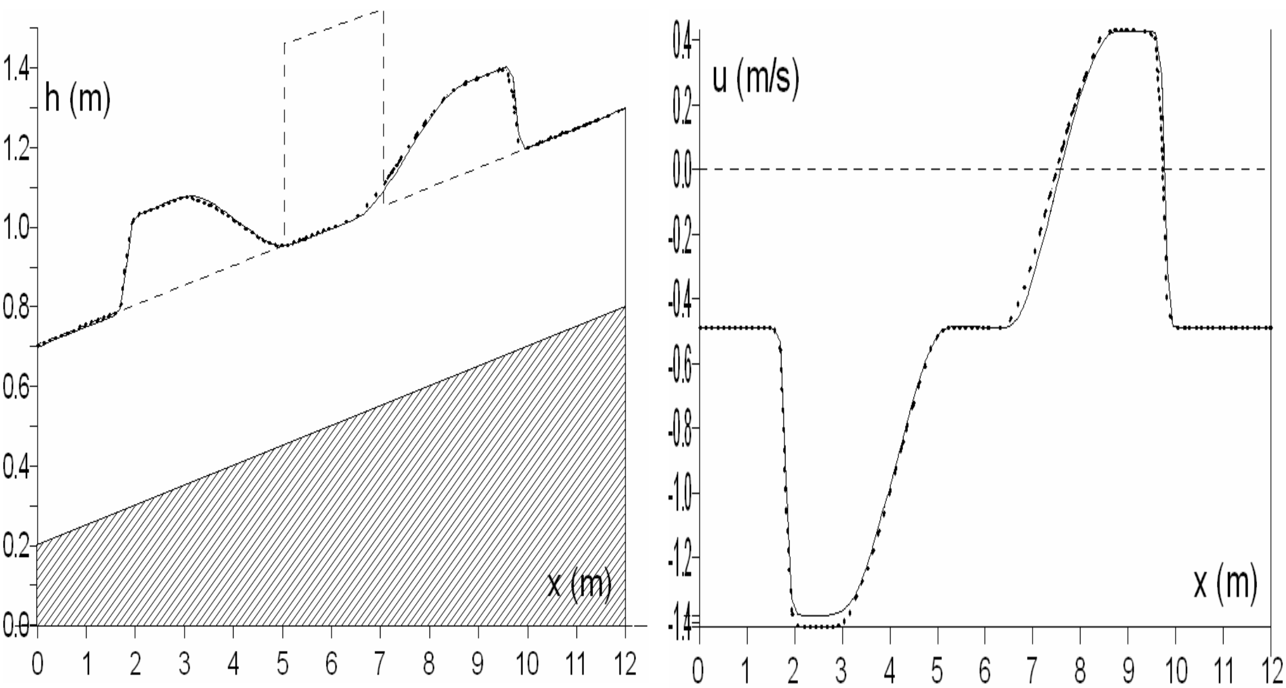

Рис.1. *Глубина (**слева**) и скорость (**справа**) потока жидкости над затопленной наклонной поверхностью в момент t = 1 с. Пунктирная линия – начальные параметры потока. Сплошная линия – параметры потока, полученные с помощью квазидвухслойного метода. Поточечная линия – параметры потока, полученные с помощью расчета, использующего стандартный метод Годунова с последующей заменой переменных.*

Показано соответствие численных результатов решения задачи распада столба жидкости над наклонной затопленной плоскостью, аппроксимируемой множеством ступенек, результатам расчета, использующего точное решение стандартной задачи Римана с последующей заменой переменных.

На рисунке 2 представлены результаты натекания гидродинамического прыжка на наклонный берег аппроксимируемый ступеньками (в природе данная ситуация аналогична натеканию волны цунами на прибрежную зону). Высота натекающей волны равна 1 м, скорость 2 м/с. Эволюция волновой картины и скорости на береговой линии показана с интервалом в две секунды.

При прохождении гидродинамического прыжка через наклонный берег наблюдается небольшое увеличение его интенсивности и значительное увеличение скорости.

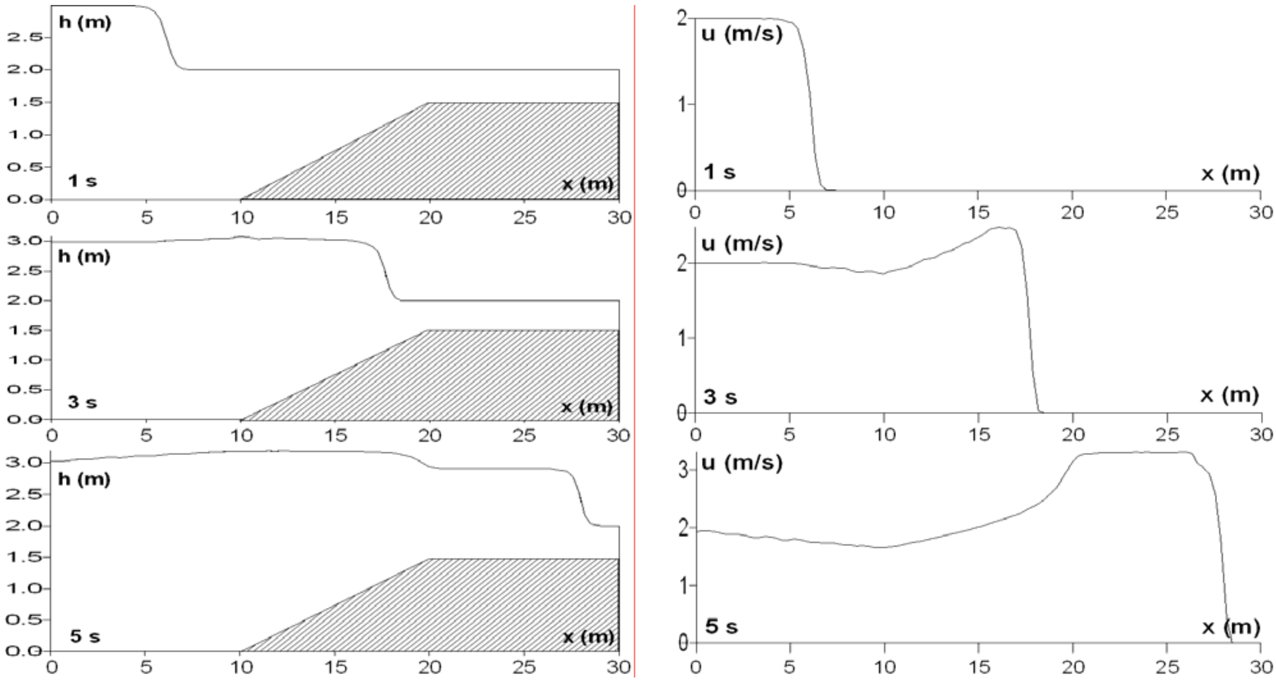

Рис.2. *Эволюция глубины (**слева**) и скорости (**справа**) натекающей на наклонный берег, аппроксимируемый ступеньками, ударной волны.*

В **третьей главе** диссертации предложено конечно-разностное представление, описывающее силу Кориолиса в численных методах годуновского типа для течений вращающейся мелкой воды. Влияние силы Кориолиса описано введением фиктивной нестационарной границы. Построена качественная интерпретация нелинейных процессов, вызванных таким представлением. Проведен анализ границы применимости данного подхода в общем, для расщепляющихся разностных схем. Главная проблема при построении расщепляющейся разностной схемы состоит в необходимости постановки и решения одномерной задачи, не имеющей физического эквивалента для конечных временных интервалов. К сожалению, наиболее очевидный путь пренебрежения одной из пространственных координат не решает полностью проблемы. Действительно, отказ от одной из пространственных переменных при решении существенно двумерной задачи приводит к нарушению закона сохранения импульса, что в свою очередь приводит к необходимости введения некоторой фиктивной работы для компенсации указанных нарушений, несмотря на всю нефизичность такой компенсации. Однако в диссертационной работе удалось восстановить структуру течения во всей пространственно-временной области с учетом вертикальных особенностей, что в свою очередь дало возможность более точного определения трансверсальной составляющей вектора скорости для класса внешних сил, определяющих существенно двумерные задачи, как например, задачи с силой Кориолиса.

Предложены конечно-разностные схемы для моделирования течений, как на ровной подстилающей поверхности, так и для подстилающей поверхности произвольного профиля. Для численной аппроксимации источниковых слагаемых применена квазидвухслойная модель течения жидкости над ступенчатой границей, учитывающая гидродинамические особенности течения. Осуществлен сравнительный анализ с известными конечно-разностными схемами, описывающими вращение и неоднородность профиля дна.

Работоспособность метода подтверждена проведенным численным экспериментом по моделированию классической задачи геострофической адаптации, известной как задача Россби. Рассматривалось начальное возмущение:

$$\begin{cases} h(x,0) = h_0 \\ u(x,0) = 0 \\ v(x,0) = V v_{jet}(x) \end{cases}, \tag{7}$$

где h_0 - начальная глубина покоя, V - характерный масштаб скорости, $v_{jet}(x)$ - нормализованный профиль, задаваемый следующим образом:

$$v_{jet}(x) = \frac{(1+\tanh(4x/L+2))(1-\tanh(4x/L-2))}{(1+\tanh(2))^2}, \tag{8}$$

где L - характерный масштаб возмущения. Характерные параметры g, h_0, f были зафиксированы, f - параметр Кориолиса. Характерный масштаб скорости V и характерный масштаб возмущения L, вычислялись из двух безразмерных параметров, числа Россби-Кибеля Ro и числа Бюргерса Bu:

$$Ro = \frac{V}{fL}, \qquad Bu = \frac{R_d^{\;2}}{L^2}, \tag{9}$$

где R_d - радиус деформации: $R_d = \frac{\sqrt{gh_0}}{f}$. Характерный масштаб времени задается следующей формулой: $T_f = \frac{2\pi}{f}$.

На рисунке 3 показана эволюция начального возмущения (7) в случае $Ro = 1$, $Bu = 0.25$.

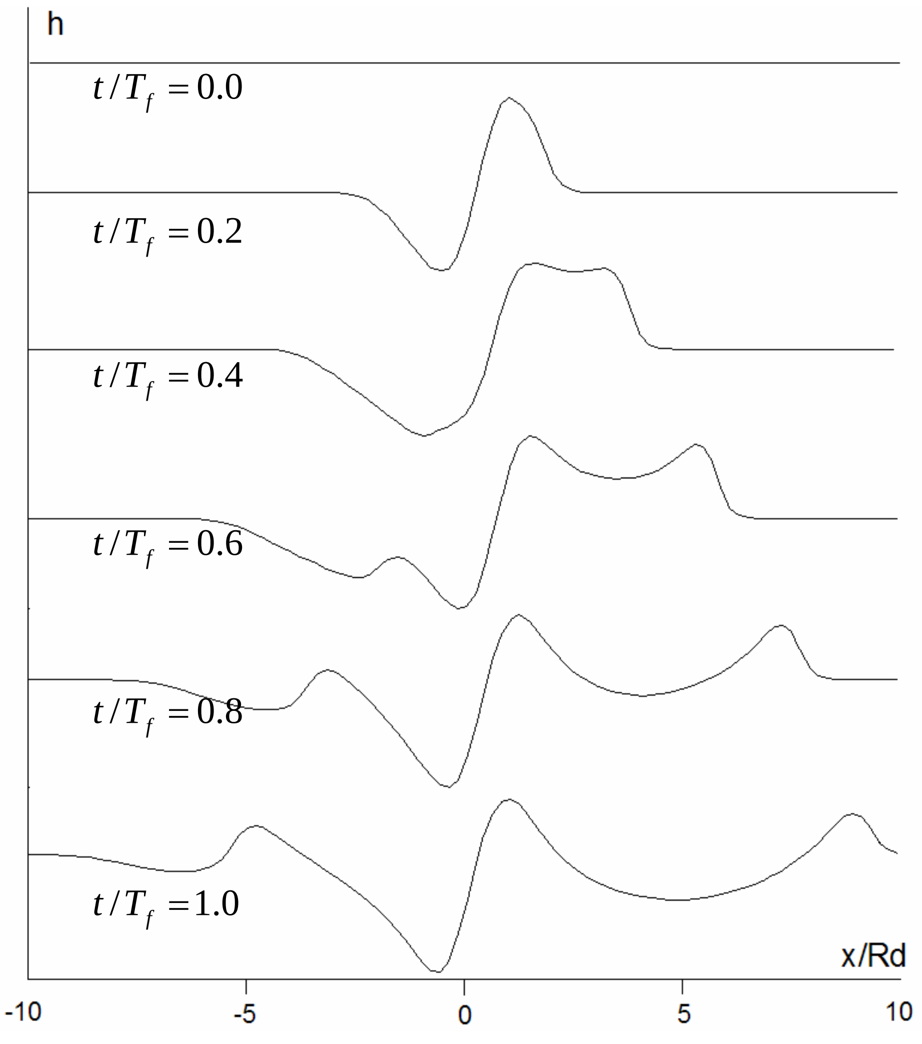

Рис.3. *Эволюция распространения акустико-гравитационных волн, в результате воздействия начального возмущения* $Vv_{jet}(x)$.

Наблюдается хорошее совпадение характерных пиков разбегающихся акустико-гравитационных волн и центральной уравновешенной части с известными геофизическими данными. Что свидетельствует об эффективности использования квазидвухслойной модели при описании крупномасштабных геофизических явлений.

На рисунке 4 показано сравнение величин потенциальной завихренности в начальный ($t = 0T_f$) и конечный ($t = 16T_f$) моменты времени для классической задачи Россби в случае $Ro = 1$, $Bu = 0.5$. Потенциальная завихренность задается следующей формулой:

$$Q = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + f}{h} \qquad (10)$$

Выявлено сохранение инварианта Q - потенциального вихря, со временем. Реальное время процесса приблизительно равно 12 суткам.

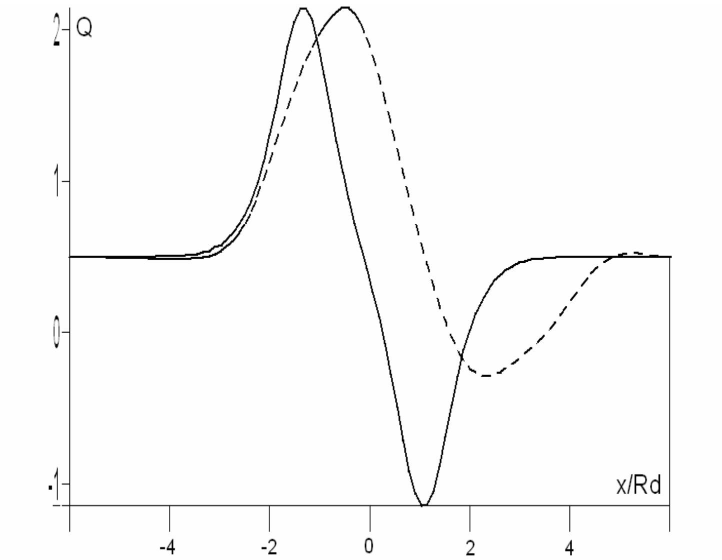

Рис.4. *Потенциальная завихренность в начальный (сплошная линия, $t = 0T_f$) и конечный (пунктирная линия, $t = 16T_f$) моменты времени.*

Из представленного графика видно, что максимум функции сдвигается в антициклонную область, а минимум потенциальной завихренности со временем увеличивается. Данные результаты, определяются чисто нелинейными эффектами и хорошо согласуются с известными данными геофизических исследований.

Так же осуществлен расчет вращающейся мелкой воды над подстилающей поверхностью параболического профиля. Получено качественное согласие с представлениями геофизической гидродинамики.

Разработанный квазидвухслойный метод обобщен на случай исследования течений мелкой воды над неоднородным профилем дна в присутствии произвольной внешней силы. Проведено численное моделирование и выполнено сравнение с лабораторными экспериментами по изучению разрушения двумерной дамбы над наклонной подстилающей поверхностью с учетом гидравлического трения. На рисунке 5 изображена динамика глубины жидкости в различных контрольных точках, полученная экспериментально – сплошная серая линия, численно на основе WAF метода – прерывная линия, сплошная черная линия – на основе предложенного квазидвухслойного метода.

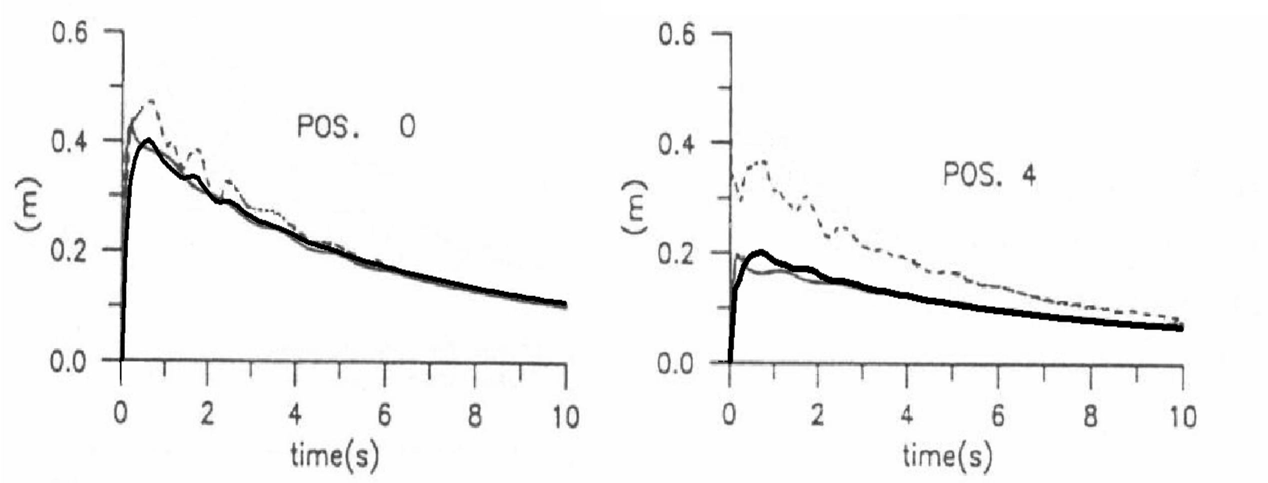

Рис.5. *Зависимости глубины жидкости от времени в различных контрольных точках.*

В заключении диссертации сформулированы основные выводы и результаты работы.

Положения, выносимые на защиту

1. Разработана теория для течений мелкой воды на ступенчатой границе, учитывающая вертикальную неоднородность поля скорости, основанная на выделении области жидкости, в которой происходит запирание потока массы. Разработана квазидвухслойная модель для определения этой области в каждый момент времени и нахождения гидродинамических параметров исходного течения.

2. Решена задача Римана для течений мелкой воды на ступенчатой границе на основе квазидвухслойной модели. Показано, что реализуется автомодельный режим течения распада произвольного разрыва со стационарным скачком вблизи уступа. Полученные решения расширяют класс аналитически допустимых включением конфигураций, связанных с прохождением волны разрежения через уступ.

3. Предложен численный метод для исследования гидродинамических течений тяжелой невязкой жидкости со свободной поверхностью над произвольным профилем дна, основанный на

найденных решениях задачи Римана. Показана эффективность предложенного алгоритма путем сравнения с решениями на наклонной плоскости, полученными с использованием точных решений задачи Римана. Результатами расчетов натекания волны цунами на наклонный берег и падения столба жидкости на подстилающей поверхности сложного профиля подтверждена работоспособность метода.

4. Разработано квазидвухслойное представление течений вращающейся мелкой воды, описывающее силу Кориолиса в численных методах Годуновского типа. Определена структура вертикальной неоднородности течения под влиянием силы Кориолиса, представленной фиктивной подстилающей поверхностью. Построена качественная интерпретация нелинейных процессов, вызванных таким представлением, и найдена соответствующая ей горизонтальная неоднородность трансверсальной составляющей скорости, определяющая консервативность силы Кориолиса.

5. Предложен численный алгоритм для изучения течений вращающейся мелкой воды для произвольной подстилающей поверхности. Работоспособность алгоритма продемонстрирована на примере решения классической задачи геострофической адаптации, известной как задача Россби. Осуществлено численное моделирование крупномасштабного течения атмосферы над подстилающей поверхностью параболического профиля и получено качественное согласие с представлениями геофизической гидродинамики. Предложенный алгоритм обобщен на случай произвольной внешней силы.

Публикации по теме диссертации

1. Karelsky K. V, Petrosyan A. S, Slavin A. G. *Quazi-two-layer model for numerical analysis shallow water flows on step*// Russian journal of Numerical Analysis and Mathematical modeling. 2006. V. 21. №6. pp. 539-559.

2. Karelsky K. V, Petrosyan A. S, Slavin A. G. *Numerical simulation of flows of a heavy nonviscous fluid with a free surface in the gravity field over a bed surface with an arbitrary profile*// Russian journal of Numerical Analysis and Mathematical modeling. 2007. V. 22. №6. pp. 543-565.

3. Карельский К.В, Петросян А.С, Славин А.Г. *Трансформация разрыва для потоков мелкой воды на скачке*// Сборник трудов

международной конференции МСС-04 «Трансформация волн, когерентные структуры и турбулентность». М., 2004. с. 111-116.

4. Славин А.Г. *Квазидвухслойная модель для потоков мелкой воды над ступенькой*// Труды XXVII конференции молодых ученых механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова. М., 2005. с. 110-116.

5. Славин А.Г. *Гидродинамика невязкой тяжелой жидкости со свободной поверхностью над подстилающей поверхностью сложного профиля*// Труды XXVIII Конференции молодых ученых механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова. М., 2006. с. 188-192.

055(02)2

Ротапринт ИКИ РАН
Москва, 117997, Профсоюзная, 84/32

Подписано к печати 4.09.2008

Заказ 2151 Формат 70х108/32 Тираж 100 0,8 уч.-изд.л.