Методы оценивания для статистически неопределенных систем

Галина Адольфовна Тимофеева
Gtimofeeva@mail.ru

Уральский государственный университет путей сообщения

Доклад в Институте космических исследований, Москва, 04 июня 2008

1. Введение

1. Метод максимального правдоподобия

1. Линейные доверительные оценки
   - Обобщенные доверительные множества

1. Нелинейные доверительные оценки
   - Случайные информационные множества
   - Свойства нелинейных доверительных множеств

Введение

- Рассматривается задача оценивания для статистически неопределенной системы.
- Систему с будем называть статистически неопределенной, если она содержит случайные возмущения, параметры распределения которых заданы неточно или содержит как случайные так и неопределенные возмущения.

Рассматриваются оценки различных видов:

- оценки по методу максимального правдоподобия;
- линейные доверительные оценки и обобщенные доверительные множества;
- оптимальные доверительные оценки (нелинейные).

Показано, что

- оценки по методу максимального правдоподобия сходятся с информационному множеству системы при стремлении к нулю ковариационных матриц (этого свойства нет у линейных оценок);
- линейные доверительные оценки, равные сумме линейной оценки неопределенных параметров и доверительного множества для случайной ошибки оценки, не являются оптимальными в классе линейных;
- оптимальные доверительные оценки являются нелинейными даже для линейных систем с гауссовскими возмущениями, если в системе присутствуют неопределенные параметры.

Данная тематика исследуется с 60-х годов прошлого века, в частности в работах:

- А.Б.Куржанского, И.Я. Каца; [1]
- М.Л.Лидова , А.И. Матасова;
- Б.Ц.Бахшияна, Р.Р.Назирова, П.Е. Эльясберга [2].

Последние годы вышли публикации

- А.Р. Панкова, В.Н. Соловьева, К.В. Семенихина по линейному оцениванию;
- работы Б.И.Ананьева, Г.А. Тимофеевой по нелинейному оцениванию, продолжающие подход [1].

Рассмотрим систему с наблюдением:

$$\begin{aligned} x_{i+1} = &\quad A_i x_i + u_i + \xi_i, \quad x_0 = \hat{x}_0 + \zeta_0, \\ y_{i+1} = &\quad G_{i+1} x_{i+1} + v_{i+1} + \eta_{i+1}, \; i = 1, \ldots, k-1. \end{aligned} \tag{1}$$

x_i – неизвестный n-вектор состояния,
y_i – известный m-вектор наблюдения,
ξ_i, η_i, ζ_0 – независимые гауссовские случайные вектора

$$\begin{aligned} &E\zeta_0 = 0, \quad E\zeta_0\zeta_0^T = P_0, \\ &E\xi_i = 0, \quad E\eta_i = 0, \quad E\xi_i\xi_i^T = Q_i, \; E\eta_i\eta_i^T = R_i > 0. \end{aligned} \tag{2}$$

$$u_i \in U_i, \; v_i \in V_i, \; \hat{x}_0 \in \hat{X}_0 \tag{3}$$

$U_i \subset \mathbf{R}^\mathbf{n}, V_i \subset \mathbf{R}^\mathbf{m}, \hat{X}_0 \subset \mathbf{R}^\mathbf{n}$ – выпуклые компакты.

В работах И.Я. Каца и А.Б. Куржанского (1975, 1978) получены рекуррентные уравнения для множеств возможных апостериорных средних значений $\hat{X}_k$:

$$\hat{X}_k = \bigcup_{w_k \in W_k} E(x_k \mid y_k(\cdot), w_k), \tag{4}$$

где $E(x_k \mid y_k(\cdot), w_k)$ – условное математическое ожидание.
$w_k = \{\hat{x}_0, u_0, \ldots, u_{k-1}, v_1, \ldots, v_k\} \in W_k \subset \mathbf{R}^1$,
$W_k = \hat{X}_0 \times U_0 \times \ldots \times U_{k-1} \times V_1 \times \ldots \times V_k$.

$$\begin{aligned} &\hat{X}_{i+1} = (I - \Lambda_{i+1} G_{i+1})(A_i \hat{X}_i + U_i) + \Lambda_i (y_{i+1} - V_{i+1}), \\ &\Lambda_i = P_i G_i^T R_i^{-1}, \quad i = 0, \ldots, k-1. \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь I – единичная матрица, $\hat{X}_0$ задано, матрицы P_i определяются так же, как и в фильтре Калмана и не зависят ни от реализовавшегося наблюдения $y_k(\cdot)$, ни от множеств W_k.

Рассмотрим также систему, не содержащую случайных возмущений:

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= A_i x_i + u_i, & x_0 &= \hat{x}_0, \\ y_{i+1} &= G_{i+1} x_{i+1} + v_{i+1}, & i &= 0, \ldots, k-1, \end{aligned} \tag{6}$$

информация о $\hat{x}_0, u_i, v_i$ задается включениями (3).
Определение 1.1. [Куржанский А.Б.] Информационным множеством X_k^{det} системы (6) на k-м шаге, соответствующем наблюдению $y_k^*(\cdot)$, называется множество векторов $x_k^* \in \mathbf{R}^\mathbf{n}$ таких, что существуют $x_i^* \in \mathbf{R}^\mathbf{n}$, $x_0^* \in \hat{X}_0$, $u_i^* \in U_i$, $v_{i+1}^* \in V_{i+1}$, $i = 0, \ldots, k-1$, для которых верны соотношения (6).
При стремлении матриц ковариаций случайных помех к нулю множества $\hat{X}_k$ (4) , построенные на основе линейных соотношений, не сходятся к информационному множеству X_k^{det}.

В работах И.Я. Каца, Г.А. Тимофеевой (1994,1995) было предложено использовать метод максимального правдоподобия.

Введем функцию невязки:

$$\Phi(x_k(\cdot), w_k \mid y_k(\cdot)) = (x_0 - \hat{x}_0)^T P_0^{-1}(x_0 - \hat{x}_0) +$$

$$+ \sum_{i=0}^{k} [(x_{i+1} - A_i x_i - u_i)^T Q_i^{-1}(x_{i+1} - A_i x_i - u_i) + \qquad (7)$$

$$+ (y_{i+1} - G_{i+1} x_i - v_{i+1})^T R_i^{-1}(y_{i+1} - G_{i+1} x_i - v_{i+1})],$$

где $x_k(\cdot) = \{x_0, \ldots, x_k\} \in \mathbf{R}^{\mathbf{n(k+1)}}$– вектор фазовых состояний системы.

В качестве оценки состояния статистически неопределенной системы (1) – (3) на k-том шаге выбирается x_k, доставляющее минимум функции невязки по всем переменным.

Определение 1.2. Множество $\tilde{X}_k$ минимумов функции $\psi(x_k)$, определяемой соотношениями

$$\psi(x_k) = \min_{w_k \in W_k} \varphi(x_k, w_k \mid y_k(\cdot)), \tag{8}$$

$$\varphi(x_k, w_k \mid y_k(\cdot)) = \min_{x_0, \ldots, x_{k-1}} \Phi(x_0, \ldots, x_k, w_k \mid y_k(\cdot)). \tag{9}$$

называется оценкой по методу максимального правдоподобия для фазового состояния статистически неопределенной системы (1)–(3).

Теорема 1.1. Если информационное множество X_k^{det} детерминированной системы (6), соответствующее данному наблюдению $y_k(\cdot)$, непусто, то выполняется соотношение

$$\tilde{X}_k = X_k^{\mathrm{det}}.$$

Пример 1. Рассмотрим задачу идентификации $x \in \mathbf{R}^1$ по наблюдениям

$$y_i = x + u_i + \xi_i, \quad i = 1, 2, \ldots . \tag{10}$$

Известно, что

$$x = \hat{x}_0 + u_0 + \xi_0, \quad u_i \in [-\Delta, \Delta]. \tag{11}$$

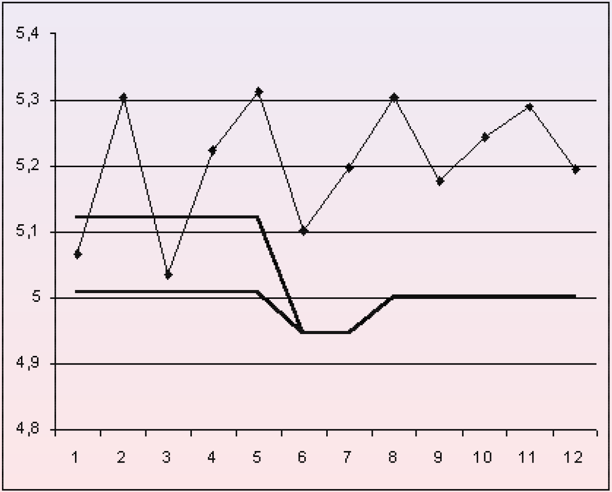
ξ_i– независимые, нормально распределенные случайные величины с

$$E\xi_i = 0, \quad E\xi_i^2 = \sigma_i^2. \tag{12}$$

Пусть $\Delta = 1$, $\sigma = 0.1$ и неопределенные параметры принимают значения:

$$u_i = \begin{cases} -1 & i = 3m+1; \quad 3m+2, \\ 1 & i = 3m, \end{cases} \qquad m = 0, 1, 2, \ldots,$$

Множество апостериорных средних $\hat{X}_k = [\hat{x}_k - 1; \hat{x}_k + 1]$, где $\hat{x}_k = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} y_i$. $\hat{x}_k \to x^* + \frac{1}{3}$ при $k \to \infty$.


5,4
5,3
5,2
5,1
5
4,9
4,8
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12

Рассмотрим одношаговую статистически неопределенную систему с наблюдением

$$\begin{aligned} x &= \quad x_0 + Q_1\xi_1, \\ y &= Gx + v + Q_2\xi_2. \end{aligned} \tag{13}$$

Здесь x – неизвестный n-вектор, $y \in \mathbf{R}^m$ – известное наблюдение. ξ_1, ξ_2 независимые гауссовские случайные вектора с заданными параметрами распределений:

$$E\xi_1 = 0, \quad E\xi_2 = 0, \quad E\xi_1\xi_1^T = I_{(n)}, \quad E\xi_2\xi_2^T = I_{(m)}, \tag{14}$$

$I_{(n)}$ – единичная матрица размера $n \times n$, Q_1, Q_2 –заданные невырожденные матрицы.
$x_0 \in \mathbf{R}^n$, $v \in \mathbf{R}^m$ неизвестные векторы, о которых известно лишь:

$$x_0 \in X_0, \quad v \in V, \tag{15}$$

где $X_0 \subset \mathbf{R}^n$, $V \subset \mathbf{R}^m$ заданные выпуклые компакты.

Из соотношений (13)–(15) следует следующее.

Утверждение 2.1. Пусть Λ – произвольная матрица $n \times m$ и B_α – доверительное множество для случайного вектора

$$e = e(\xi_1, \xi_2) = (I - \Lambda G)Q_1\xi_1 - \Lambda Q_2\xi_2.$$

Тогда множество

$$\hat{X}_\alpha = \hat{X}(\Lambda) + B_\alpha$$

является доверительным множеством для вектора x вероятности не ниже чем α, то есть $P\{x \in \hat{X}_\alpha\} \geq \alpha$. Здесь

$$\hat{X} = \hat{X}(\Lambda) = (I - \Lambda G)X_0 + \Lambda(y - V). \qquad (16)$$

Если матрица Λ определяется как для стандартной линейной оценки:

$$\Lambda = P_1 G^T R^{-1}, P_1 = ((Q_1 Q_1^T)^{-1} + G^T (Q_2 Q_2^T)^{-1} G)^{-1}. \qquad (17)$$

то оценку $\hat{X}_\alpha = \hat{X}(\Lambda) + B_\alpha$ будем называть стандартной линейной доверительной оценкой.

Оценка $\hat{X}_\alpha$ не всегда будет оптимальной в классе линейных из-за наличия неопределенной составляющей.
Проблемы выбора оптимальных линейных оценок исследованы в работах М.Л.Лидова, А.И. Матасова, А.Р.Панкова, К.В.Семенихина и др.
Продолжение примера 1. Пусть произведено лишь одно наблюдение в задаче (10)–(12). Линейная оценка имеет вид

$$\hat{X}_\alpha = \hat{X} + B_\alpha, \quad B_\alpha = [-t_\alpha \sigma/\sqrt{2};\ t_\alpha \sigma/\sqrt{2}],$$

где $\hat{X} = 0.5(x_0 + U_0) + 0.5(y_1 - U_1) = \hat{x}_1 + [-\Delta, \Delta]$,
t_α – двусторонняя квантиль уровня α для нормального распределения: $P\{|\xi| < t_\alpha\} = \alpha$.
За счет изменения $\Lambda = 0.5$ в данной задаче улучшить оценку нельзя из-за равноценности наблюдений.

Однако $\hat{X}_\alpha$ не является оптимальной оценкой в классе линейных и может быть уточнена при решении задачи оптимизации квантили
(Бахшиян Б.Ц., Назиров Р.Р., Эльясберг П.Е., 1980):

$$\min q_\alpha : \quad \min_{u \in U} P\{\hat{x}_1 + u + e \in [\hat{x}_1 - q_\alpha; \hat{x}_1 + q_\alpha]\} \geq \alpha.$$

Оптимальная линейная доверительная оценка меньше, чем $\hat{X}_\alpha$, и имеет вид:

$$[\hat{x}_1 - \Delta - \frac{\sigma g(\Delta/\sigma, \alpha)}{\sqrt{2}}; \hat{x}_1 + \Delta + \frac{\sigma g(\Delta/\sigma, \alpha)}{\sqrt{2}}],$$

где $t'_\alpha < g(z, \alpha) < t_\alpha$, t'_α – одностороняя квантиль нормального распределения. Функция $g(z, \alpha)$ задается неявно и может быть легко найдена и затабулирована.
Оказалось, что возможность сужения оценки для вектора, представимого в виде суммы неопределенной и случайной составляющей, является общей закономерностью.

Определение 2.1. Пусть C – замкнутое, связное, ограниченное множество из $\mathbf{R^m}$, содержащее более одной точки.
Статистически неопределенным случайным вектором $\tilde{\xi}(\omega, C)$ будем называть семейство случайных векторов $\{\xi(\omega, c) \mid c \in C\}$, если выполняются следующие условия:

- для любого $c \in C$ отображение $\xi(\omega, c)$ – случайный вектор,
- для любого компактного $B \subset \mathbf{R^n}$ вероятность $P_c(B) = P\{\xi(\omega, c) \in B\}$ непрерывно зависит от c.

Как и обычные доверительные множества, обобщенные доверительные множества определяются неоднозначно, то есть фиксированному уровню вероятности α соответствует целое семейство обобщенных доверительных множеств.

Определение 2.2. Множество $X_\alpha \subset \mathbf{R}^\mathbf{n}$ будем называть обобщенным доверительным множеством уровня α для статистически неопределенного случайного вектора $\tilde{\xi}(\omega, c)$, если

$$\min_{c \in C} P\{\tilde{\xi}(\omega, C) \in X_\alpha\} = \alpha.$$

Пусть $\tilde{\xi}(\omega, C)$ – статистически неопределенный случайный вектор, X_c^α – семейство доверительных множеств уровня α: $P\{\xi(\omega, c) \in X_c^\alpha\} = \alpha$. Обозначим через $\hat{X}_\alpha$ объединение доверительных множеств:

$$\hat{X}_\alpha = \bigcup_{c \in C} X_c^\alpha. \tag{18}$$

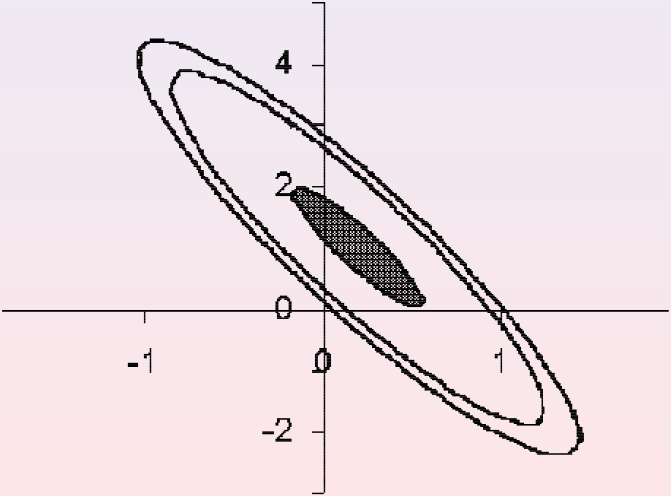
Теорема 2.1. Объединение доверительных множеств $\hat{X}_\alpha$ является обобщенным доверительным множеством уровня $\alpha_1 \geq \alpha$ для статистически неопределенной случайной величины $\tilde{\xi}(\omega, C)$,
причем $\alpha_1 = \alpha$ тогда и только тогда, когда существует $c^* \in C$ такое, что $P\{\xi(\omega, c^*) \in \hat{X}_\alpha\} = \alpha$.

Из теоремы 2.1 следует, что во многих случаях объединение доверительных множеств не является обобщенным доверительным множеством и может быть сужено при построении доверительных оценок статистически неопределенного случайного вектора.

Были изучены свойства обобщенных доверительных множеств для $x = u + \xi$, где $u \in U \subset \mathbf{R}^{\mathbf{n}}$, ξ – n-мерный гауссовский вектор с известными моментами распределения.

Для случая, когда U –эллипсоид или отрезок, вычислены обобщенные доверительные множества.

На рисунке приведен пример сужения доверительной оценки в виде суммы (внешний эллипс) до обобщенного доверительного (средний эллипс), закрашенная часть – множество апостериорных средних.


4
2
0
-2
-1
0
1

Однако линейные доверительные оценки не являются оптимальными даже с учетом сделанных уточнений.

Продолжение примера

Пусть $\Delta = 1$, $\sigma = 0.1$, и реализовалось наблюдение $y = 2$. Любая линейная оценка очевидно удовлетворяет условию

$$\hat{X}_\alpha \supset \hat{X} = 0.5X_0 + 0.5(y - V) = [0; 2].$$

Но если $\sigma = 0$, то есть в системе нет случайных возмущений, то оценкой неизвестного вектора x будет информационное множество:

$$X^{det} = X_0 \cap (y - V) = \{1\}.$$

Очевидно, что линейные оценки $\hat{X}_\alpha$ не приближаются к информационному множеству системы при $\sigma \to 0$.

Попробуем получить оценку для x, используя пересечение доверительных множеств.
Для вероятности $\beta = \sqrt{\alpha}$ доверительные множества для ξ_1, ξ_2 имеют вид $[-t_\beta; t_\beta]$.
Получаем оценку $\alpha = 0.9$, $\sigma = 0.1$:

$$\check{X}_\alpha = (X_0 + [-0.195; 0.195]) \cap (y - V - [-0.195; 0.195]) =$$

$$= [0.805; 1.195].$$

Но если $y = 2.4$, то получится пустое доверительное множество:

$$\check{X}_\alpha = [-1.195; 1.195] \cap [1.205; 3.595] = \emptyset.$$

Следовательно, подход должен быть пересмотрен.

Определение 3.1. [Ананьев Б.И., 2001] Множество $\tilde{X}(\xi^*) = \tilde{X}(y, X_0, V, \xi^*)$ всех состояний системы (13)–(15) совместимых с наблюдением y для заданного значения ξ^* случайного вектора $\xi = \{\xi_1, \xi_2\}$ называется *случайным информационным множеством*.

Очевидно, что для рассматриваемой системы

$$\tilde{X}(\xi^*) = (X_0 + Q_1\xi_1^*) \cap G^+(y - V - Q_2\xi_2^*).$$

Здесь G^+ обратный оператор $G^+z = \{u \in \mathbf{R}^n : z = Gu\}$.

Наряду с системой (13)–(15) рассмотрим систему с неопределенными возмущениями 2-х типов

$$\begin{aligned} x = &\quad x_0 + Q_1 d_1, \\ y = &\quad Gx + v + Q_2 d_2. \end{aligned} \tag{19}$$

Здесь x_0, v и d_1, d_2 удовлетворяют ограничениям (15) и

$$d = \{d_1, d_2\} \in D, \tag{20}$$

где D заданное множество в $\mathbf{R}^{n+m}$.
Случайное информационное множество – это информационное множество системы (19)–(20), (15) при $D = \{\xi^*\}$.

Определение 3.2. Множество $D^0 = D^0(y, X_0, V) \subset \mathbf{R}^{n+m}$ значений случайного вектора ξ совместимых с наблюдением y в системе (13)–(15) называется *множеством допустимых значений* случайных параметров ξ, соответствующим данному наблюдению:

$$D^0(y, X_0, V) =$$
$$= \{d = \{d_1, d_2\} \in \mathbf{R}^{n+m} : \tilde{X}(y, X_0, V, \{d\}) \neq \emptyset\}. \qquad (21)$$

Лемма 3.1. Если y является наблюдением для системы (13)–(15), тогда множество допустимых значений вектора случайных возмущений непусто, т.е. $D^0(y, X_0, V) \neq \emptyset$.
Лемма 3.1 следует из определения множества $D^0(y, X_0, V)$.

Пусть $X \subset \mathbf{R}^n$ – измеримое множество рассмотрим следующие случайные события:

$$A^-(X) = \{\tilde{X}(y, X_0, V, \xi) \subset X\},$$
$$A^+(X) = \{\tilde{X}(y, X_0, V, \xi) \cap X \neq \emptyset\}.$$

Определение 3.3. Пусть X – измеримое множество $\mathbf{R}^n$. Множество

$$D^-(X) = D^-(X; y, X_0, V) \subset \mathbf{R}^{n+m}$$

всех значений случайного параметра ξ, совместимых с наблюдением y для системы (13)–(15) и таких, что соответствующий вектор состояния $x \in X$ для любых допустимых $x_0 \in X_0$, $v \in V$,называется *минимальным допустимым множеством* случайных параметров ξ, соответствующих множеству X:

$$D^-(X) = \{d \in \mathbf{R}^{n+m} : \emptyset \neq \tilde{X}(y, X_0, V, \{d\}) \subset X\}. \quad (22)$$

Определение 3.4. Пусть X – измеримое множество из $\mathbf{R}^n$. Множество

$$D^+(X) = D^+(X; y, X_0, V) \subset \mathbf{R}^{n+m}$$

всех значений случайных возмущений ξ, совместимых с заданным наблюдением y для системы (13)–(15) при некоторых значениях $x_0 \in X_0$, $v \in V$ и $x \in X$, называется *максимальным множеством* значений случайных параметров ξ, соответствующим множеству X:

$$D^+(X) = \{d \in \mathbf{R}^{m+n} : \tilde{X}(y, X_0, V, \{d\}) \cap X \neq \emptyset\}. \qquad (23)$$

Лемма 3.2. Для любого измеримого множества $X \in \mathbf{R}^n$ и любого наблюдения y выполняется:

$$D^-(X; y, X_0, V) \subset D^+(X; y, X_0, V) \subset D^0(y, X_0, V).$$

Определение 3.5. Измеримое множество X_α называется *доверительным множеством* уровня α для системы (13)–(15),если условная вероятность

$$\mathcal{P}\{x \in X_\alpha \mid y, x_0 \in X_0, v \in V\} \triangleq$$

$$= P\{\tilde{X}(y, X_0, V, \xi) \subset X_\alpha \mid \tilde{X}(y, X_0, V, \xi) \neq \emptyset\} = \alpha.$$

Отметим, что условная вероятность не может быть заменена на безусловную в рассматриваемой задаче.
Из определения доверительного множества следует

$$\mathcal{P}\{x \in \tilde{X}_\alpha \mid y, x_0 \in X_0, v \in V\} = \frac{P\{\xi \in D^-(X_\alpha; y, X_0, V)\}}{P\{\xi \in D^0(y, X_0, V)\}}. \tag{24}$$

Теорема 3.1. Пусть $D_\beta \subset \mathbf{R}^n$ – доверительное множество уровня β для случайного вектора ξ, тогда информационное множество $\tilde{X}(D_\beta) = \tilde{X}(y, X_0, V, D_\beta)$ для системы (19)–(20) при $D = D_\beta$ является доверительным множеством для состояния x уровня не ниже чем α.
Здесь

$$\alpha = 1 - (\alpha_1)^{-1}(1 - \beta),$$

$$\alpha_1 = P\{\tilde{X}(y, X_0, V, \xi) \neq \emptyset\} = P\{\xi \in D^0(y, X_0, V)\}.$$

Замечание. Нетрудно проверить, что для системы (13)–(15)

$$P\{\tilde{X}(y, X_0, V, \xi) \neq \emptyset\} = P\{H_2\xi \in y - V - GX_0\},$$

$$H_2\xi = GQ_1\xi_1 + Q_2\xi_2. \tag{25}$$

Доверительные множества $\tilde{X}_\alpha$ приближаются к информационному множеству X^{det} если дисперсии случайных возмущений в системе (13)–(15) стремятся к нулю.

Теорема 3.2. Пусть матрицы коэффициентов в (13)–(15) стремятся 0: $Q_1(\varepsilon) = \varepsilon Q_1$, $Q_2(\varepsilon) = \varepsilon Q_2$ и $\varepsilon \to 0$. Если у множеств X_0 and V есть внутренние точки и для заданного наблюдения y информационное множество системы не пусто:

$$X^{det} = X_0 \cap G^{+}(y - V) \neq \emptyset,$$

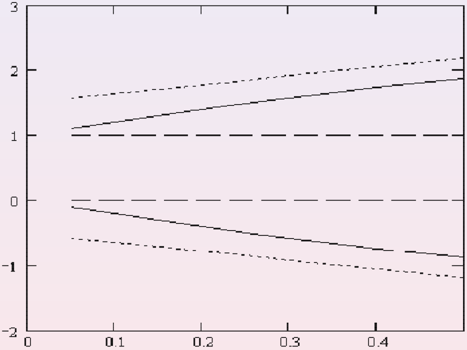
то для любой вероятности $\alpha \in (0.5; 1)$ существуют доверительные множества $\tilde{X}_\alpha^\varepsilon$, такие что:

1. $\tilde{X}_\alpha^{\varepsilon_1} \supseteq \tilde{X}_\alpha^{\varepsilon_2} \supseteq X^{det}$ если $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$;
2. $\tilde{X}_\alpha^{\varepsilon} \to X^{det}$ если $\varepsilon \to 0$, т.е. $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \rho(\tilde{X}_\alpha^\varepsilon, X^{\text{det}}) = 0$, где $\rho(\tilde{X}_\alpha^\varepsilon, X^{\text{det}})$ – Хаусдорфово расстояние между множествами:
$\rho(X, Y) \stackrel{\triangle}{=} \max\{\sup\limits_{x \in X} \inf\limits_{y \in Y} ||x - y||, \sup\limits_{y \in Y} \inf\limits_{x \in X} ||x - y||\}.$

Проиллюстрируем теорему 3.2 на примере оценивания в $\mathbf{R}^1$.
Рассмотрим задачу (10)–(12) с $\Delta = 1$, $x_0 = 0$ и $y_1 = 1$.
Построим стандартную линейную доверительную оценку $\hat{X}_\alpha$ уровня $\alpha = 0.95$ для различных $\sigma = 0.5; 0.45; \ldots; 0.05$:

$$\hat{X}_\alpha = \hat{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{2}}[-t_\alpha; t_\alpha],$$

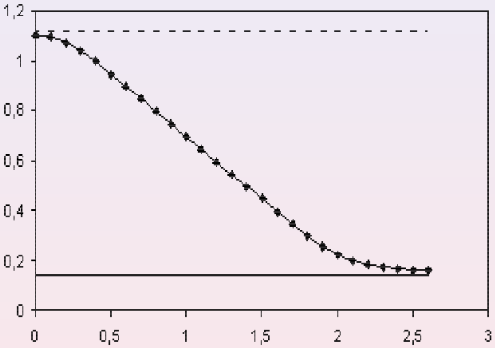
где $\hat{X} = 0.5[0;2] + 0.5[-1;1] = [-0.5; 1.5]$ множество возможных средних значений.
Найдем нелинейную доверительную оценку $\tilde{X}_\alpha$ для тех же значений σ, используя теорему 3.1.
Информационное множество (для системы без случайных возмущений): $X^{\det} = [0;1]$.



Линейные доверительные оценки $\hat{X}_\alpha$ – мелкие штихи, нелинейные доверительные оценки $\tilde{X}_\alpha$ – сплошная линия, информационные множества X^{det} (оценки в случае $\sigma = 0$) – штриховая линия.

По горизонтальной оси отмечены значения σ.

На рис.3.1 видно, что нелинейные доверительные оценки $\tilde{X}_\alpha$ приближаются к $X^{\mathrm{det}} = [0;1]$, если $\sigma \to 0$, в отличие от линейных оценок, которые приближаются к $\hat{X} = [-0.5; 1.5]$.
Основной особенностью нелинейных оценок является их зависимость их диаметра от реализовавшегося сигнала y (как и для системы без случайных возмущений).
На рис.3.2 показано, как радиусы доверительных множеств системы (10)–(12) зависят от $|y - x_0|$.
Здесь $\alpha = 0.95$, $\sigma = 0.1$, $\Delta = 1$.
Заметим, что в случае $y = x_0$ предлагаемый подход не улучшает линейную оценку, но с ростом $|y - x_0|$ нелинейная оценка $\tilde{X}_\alpha$ становиться все более и более точной.



Штриховая линия – оптимальная линейная оценка, кривая с маркерами – радиус нелинейной доверительной оценки, сплошная линия – радиус доверительного множества для случайной ошибки (без неопределенной составляющей), т.е. $\Delta = 0$ и $X_0 = \{x_0\}$, $V = \{0\}$.

Проведем сравнение линейных и нелинейных оценок.
Лемма 3.3. Пусть $X_\alpha = \hat{X} + B_\alpha$, где B_α – доверительное множество уровня α для случайного вектора e, $\hat{X}$ – множество апостериорных средних, определяемое уравнениями (16), (17). Тогда X_α является доверительным множеством уровня не ниже чем α, т.е.

$$P\{\tilde{X}(y, X_0, V, \xi) \subset X_\alpha \mid \tilde{X}(y, X_0, V, \xi) \neq \emptyset\} \geq \alpha.$$

Обозначим

$$\hat{x} = (I - \Lambda G)x_0 + \Lambda y, \tag{26}$$

Теорема 3.3. Пусть выполняются условия:

1. $X_0 = x_0 + U$, где $U \subset \mathbf{R^n}$ – заданное выпуклое компактное множество;
2. $0 \in V$, $0 \in V$;
3. B_α – доверительное множество уровня α для случайного вектора
$$e = (I - \Lambda G)Q_1\xi_1 - \Lambda Q_2\xi_2; \tag{27}$$
4. выполняется условие:
$$P\{e \in B_\alpha + b\} \leq P\{e \in B_\alpha\} = \alpha \quad \text{для всех} \quad b \in \mathbf{R}^n. \tag{28}$$

Тогда существует доверительное множество $\tilde{X}_\alpha$ уровня не ниже чем α (в смысле определения 3.5) такое, что
$$\hat{x} + B_\alpha \subseteq \tilde{X}_\alpha \subseteq \hat{X} + B_\alpha. \tag{29}$$

Здесь $\hat{x}$ и $\hat{X}$ определяются соотношениями (26),(16).

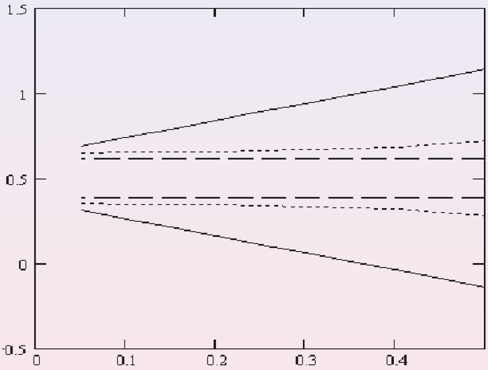
Если множества X_0, V допустимых значений неопределенных параметров в системе (13)–(15) стягиваются в точку, то нелинейные доверительные оценки приближаются к стандартным доверительным оценкам для стохастических линейных систем.

Следствие 3.1. Пусть для системы (13)–(15) выполняются следующие условия:

1. $V(\gamma) = \gamma V$, $X_0(\gamma) = x_0 + \gamma U$;
2. V, U – заданные выпуклые компактные множества, содержащие 0,
3. B_α – доверительное множество уровня α для случайного вектора e;
4. выполняется условие (28).

Тогда существуют доверительные множества $\tilde{X}_\alpha(\gamma)$ уровня не ниже чем α для системы (1)–(3) такие, что

$$\tilde{X}_\alpha(\gamma) \to \hat{x} + B_\alpha \quad \text{if} \quad \gamma \to 0,$$



Внешняя сплошная линия – стандартная линейная оценка, мелкие штрихи – нелинейные доверительные множества, значения Δ отмечены по горизонтальной оси. Штриховая линия – доверительное множество для системы без неопределенности, т.е. в случае $\Delta = 0$. Здесь $\alpha = 0.95, \sigma = 0.1$, $x_0 = 0$, $y = 2$.

В докладе рассмотрены различные подходы к оцениванию состояния статистически неопределенных систем:

1. метод максимального правдоподобия для статистически неопределенных систем;
2. сужение линейных доверительных оценок на основе обобщенных доверительных множеств для статистически неопределенного случайного вектора;
3. оптимальные (нелинейные) доверительные оценки для статистически неопределенных систем с наблюдением.

Все предлагаемые методы в реализации сложнее, чем стандартные линейные оценки: фильтр Калмана плюс доверительное множество для ошибки оценки. Предлагаемые нелинейные процедуры доверительного являются довольно сложными, но они дают более точные оценки, особенно в случае относительно малых дисперсий случайных возмущений.

- *Кац И.Я., Куржанский А.Б.* Минимаксная многошаговая фильтрация в статистически неопределенных ситуациях // Автоматика и телемеханика. 1978. №11. С. 79-87.
- *Бахшиян Б.Ц., Назиров Р.Р., Эльясберг П.Е.* Определение и коррекция движения. М.: Наука, 1980.
- *Панков А.Р., Семенихин К.В.* Минимаксная идентификация неопределенностохастической линейной модели// А. и Т., 1998. №11. С. 158–171.
- *Кац И.Я., Тимофеева Г.А.* Динамические оценки доверительных и информационных множеств в статистически неопределенных системах // Изв. РАН. Техн.кибернетика. 1994. №6. С. 42-46.
- *Ананьев Б.И.* Информационные множества для многошаговых статистически неопределенных систем // Тр. РАН. Мат. ин-та им.Стеклова, 2000. Доп.вып.2: Тр. ИММ УрО РАН. С.1-15.

- *Тимофеева Г.А.* Обобщенные доверительные множества для статистически неопределенного случайного вектора // Автоматика и телемеханика. 2002. №6. С. 44–56.
- *Тимофеева Г.А.* Оптимальные доверительные множества для статистически неопределенных систем // Автоматика и телемеханика. 2003. №11. С. 84–95.
- *Медведева Н.В., Тимофеева Г.А.* Свойства нелинейных доверительных оценок для статистически неопределеных систем // Автоматика и телемеханика. 2007. № 4. С.51–60.
- *Медведева Н.В., Тимофеева Г.А.* Сравнение линейных и нелинейных методов для статистически неопределенных систем // Автоматика и телемеханика. 2007. № 10. С.166–174.