Оценка инвариантных числовых показателей аттракторов систем дифференциальных уравнений с запаздыванием

Сергей Алешин

ЯрГУ им. П.Г.Демидова

2014

Для линейной системы из n уравнений, записанной в векторной форме

$$dx/dt = A(t)x, \tag{1}$$

где $x \in R^n$, а $A(t)$ — $n \times n$ матрица, показатель решения определяется формулой

$$\chi(x) = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \ln |x(t)|. \tag{2}$$

Линеаризованная на аттракторе система вида (1) является правильной по Ляпунову, т.е.

$$\underline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \ln |x(t)| = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \ln |x(t)|,$$

что позволяет эффективно вычислять показатели Ляпунова.

- Для вычисления старшего показателя обычно применяют метод Бенеттина.
- Дальнейшее развитие данный метод получил в работе Wolf A., Swift J.B., Swinney H.L., Vastano J.A..

Алгоритм получения первых K показателей Ляпунова для систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом вида:

$$x_0'(t) = F(t, x_0(t), x_0(t-\tau)), \qquad (3)$$

где для $\forall t$ $x_0(t) \in \mathbb{R}^J$, J — размерность системы.

- Фазовое пространство $C([-\tau, 0]; \mathbb{R}^J)$.
- Выберем $N + 1 \geq K$ точек, разобьем отрезок длины τ на N равных частей, длина каждой части будет равна $\delta = \tau/N$.
- В качестве численного метода для решения системы (3) с начальными условиями

$$x_0(\varphi) = f_0(\varphi),\ \varphi \in [-\tau, 0], f_0(\varphi) \in \mathbb{R}^J \tag{4}$$

используем метод Дормана-Принса восьмого порядка (DOPRI853) с постоянным шагом (длина шага δ).

- Решаем систему (3) с начальным условием (4) до момента времени Θ — времени достаточного приближения траектории решения к атрактору.
- $x_0^0(t) \in \mathbb{R}^J$ решение на промежутке $t \in [\Theta - \tau, \Theta]$, которое в дальнейшем будет выступать в качестве начального условия.
- Используя его получим решение $x_*(t) \in \mathbb{R}^J$ на котором будем оценивать ляпуновские показатели.

- Дополним систему (3) с начальным условием $x_0^0(t)$ идентичными K системами:

$$x_i^{'}(t) = A(t, x_*(t), x_*(t-\tau))x_i(t) + B(t, x_*(t), x_*(t-\tau))x_i(t-\tau)$$

$$A(t, x_*(t), x_*(t-\tau)) = \sum_{j=1}^{J} \left. \frac{\partial F_j(t, x_i(t), x_i(t-\tau)}{\partial x_{i,j}(t)} \right|_{x_i(t)=x_*(t)}$$

$$B(t, x_*(t), x_*(t-\tau)) = \sum_{j=1}^{J} \left. \frac{\partial F_j(t, x_{i,j}(t), x_{i,j}(t-\tau)}{\partial x_{i,j}(t-\tau)} \right|_{x_{i,j}(t-\tau)=x_{*,j}(t-\tau)}, \tag{5}$$

где $i = 1, \ldots, K$. Они представляют собой линеаризованные на решении $x_*(t)$ системы уравнений (3).

- Для каждого уравнения из $K \times J$ уравнений системы (5) используем начальные условия вида:

$$\begin{aligned} & x^0_{i,j}(\varphi) = \sqrt{\frac{KJ}{N}}, \\ & \text{при } \varphi \in \left[(\Theta - \tau) + \frac{N(iJ + j - 1)}{KJ}, (\Theta - \tau) + \frac{N(iJ + j)}{KJ}\right] \\ & x^0_{i,j}(\varphi) = 0, \text{ в противоположном случае,} \end{aligned} \tag{6}$$

где i=1,...,K , j=1,...,J,

- Евклидова норма начального условия i-ой системы уравнений из (5) равна единице:

$$|x_i^0(t)| = 1 = \sqrt{\sum_{k=0}^{N}\sum_{j=1}^{J} x_{i,j,k}^2},\ i = 1, \ldots, K; \tag{7}$$

- Скалярное произведение начального условия i-ой системы уравнений на s-ую равно нулю $(i \neq s)$:

$$(x_i^0, x_s^0) = \sum_{k=0}^{N}\sum_{j=1}^{J} x_{i,j,k}^2 x_{s,j,k}^2 = \delta_{i,s}, \tag{8}$$

где $\delta_{i,s}$ — символ Кронекера, $x_{i,j,k}^2$ — квадрат значения функции $x_{i,j}^0(\varphi)$ в точке $(\Theta - 1) + kN/K + vN/(KJ)$, $k = 1, \ldots, N, v = 1, \ldots, J$.

- Решаем (3) с нач. усл. $x_0(\varphi) = x_0^0(\varphi)$ и (5) с нач. усл. (6) ($\varphi \in [\Theta - \tau, \Theta]$) на $t \in [\Theta, \Theta + T]$ получаем для каждой из систем решения $x_i^1(t) \in \mathbb{R}^J (i = 0, \dots, K)$.
- Величины x_i^k ведут себя экспоненциальным образом, необходимо время от времени их перенормировывать.
- При $t \in [\Theta + T - \tau, \Theta + T]$ ортонормируем полученные решения $x_i^1(t)$, $i = 1, \dots, K + 1$ методом Грама-Шмидта.
- После процедуры ортогонализации и до начала процедуры нормирования вычисляем и запоминаем величины

$$\xi_i^1 = \|x^1_{\text{орт }i}(t)\|. \tag{9}$$

- Повторно решаем систему (3), (5), где в качестве начальных условий используем полученные ортонормированные решения.
- Посчитав

$$\lambda_i = \lim_{M \to \infty} \frac{\sum_{k=1}^{M} \xi_i^k}{TM}, \; i = 1, \dots, K + 1, \tag{10}$$

получаем оценку показателей Ляпунова.

Тестовый пример

Вычислительные эксперименты проводились для уравнения Хатчинсона:

$$x_0' = rx_0(t)(1 - x_0(t-1)), \text{ где } R > 0. \tag{11}$$

Ненулевые решения уравнения (11) асимпт. устойчивы при $r \in [0, \pi/2]$, при $r \in [0, e^{-1}]$ монотонно, а при $r \in [e^{-1}, \pi/2]$ решение стремится к 1 колебательным образом. В этом случае показатели Ляпунова для (11) совпадают с действительными частями решений системы уравнений:

$$\begin{aligned} \tau + r\cos\omega e^{-\tau} &= 0, \\ \omega + r\sin\omega e^{-\tau} &= 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Для уравнения (11) линеаризованные уравнения имеют следующий вид:

$$x_i' = r(1 - x_0(t-1))x_i(t) - rx_0(t)x_i(t-1). \tag{13}$$

Для всех опытов используются следующие параметры:

- количество вычисляемых показателей Ляпунова $K = 10$;
- время выхода на аттрактор $\Theta = 150$;
- время перенормировки вектора начальных условий $T = 4$;
- количество пересчетов показателей Ляпунова $M = 5000$;
- начальное условие $x_0(\varphi) = 1/2\sin(\varphi) + 1$, где $\varphi \in [-1, 0]$.

Таблица : Первые десять показателей Ляпунова для уравнения Хатчинсона при различных значениях параметра R, и их разность с эталонными значениями.

$R = 1{,}5$										
i	τ_i	$N = 10$		$N = 100$		$N = 1000$		$N = 2000$		
		λ_i	σ_i	λ_i	σ_i	λ_i	σ_i	λ_i	σ_i
1	−0,0328	−0,0680	0,0352	−0,0361	0,0033	−0,0331	0,0003	−0,0330	0,0002
2	−0,0328	−0,0681	0,0353	−0,0361	0,0033	−0,0332	0,0004	−0,0331	0,0003
3	−1,6509	−1,7693	0,1184	−1,6627	0,0118	−1,6521	0,0012	−1,6516	0,0007
4	−1,6509	−1,7693	0,1184	−1,6627	0,0118	−1,6521	0,0012	−1,6516	0,0007
5	−2,2447	−2,3687	0,1240	−2,2590	0,0143	−2,2462	0,0015	−2,2454	0,0007
6	−2,2447	−2,3687	0,1240	−2,2590	0,0143	−2,2462	0,0015	−2,2454	0,0007
7	−2,6130	−2,6992	0,0862	−2,6285	0,0155	−2,6145	0,0015	−2,6137	0,0007
8	−2,6130	−2,6992	0,0862	−2,6285	0,0155	−2,6145	0,0015	−2,6137	0,0007
9	−2,8811	−2,8598	0,0213	−2,8973	0,0162	−2,8827	0,0016	−2,8818	0,0007
10	−2,8811	−2,8599	0,0212	−2,8973	0,0162	−2,8827	0,0016	−2,8818	0,0007

Таблица : Первые десять показателей Ляпунова для уравнения Хатчинсона при различных значениях параметра R, и их разность с эталонными значениями.

$R = 1{,}0$									
i	τ_i	$N = 10$		$N = 100$		$N = 1000$		$N = 2000$	
		λ_i	σ_i	λ_i	σ_i	λ_i	σ_i	λ_i	σ_i
1	−0,3181	−0,3663	0,0482	−0,3227	0,0046	−0,3186	0,0005	−0,3184	0,0003
2	−0,3181	−0,3664	0,0483	−0,3228	0,0047	−0,3187	0,0006	−0,3185	0,0004
3	−2,0623	−2,2014	0,1391	−2,0760	0,0137	−2,0637	0,0014	−2,0630	0,0007
4	−2,0623	−2,2014	0,1391	−2,0761	0,0138	−2,0637	0,0014	−2,0630	0,0007
5	−2,6532	−2,7995	0,1463	−2,6693	0,0161	−2,6548	0,0016	−2,6540	0,0008
6	−2,6532	−2,7995	0,1463	−2,6693	0,0161	−2,6548	0,0016	−2,6540	0,0008
7	−3,0202	−3,1315	0,1113	−3,0375	0,0173	−3,0219	0,0017	−3,0210	0,0008
8	−3,0202	−3,1315	0,1113	−3,0375	0,0173	−3,0219	0,0017	−3,0210	0,0008
9	−3,2878	−3,2937	0,0059	−3,3057	0,0179	−3,2895	0,0017	−3,2885	0,0007
10	−3,2878	−3,2938	0,0060	−3,3057	0,0179	−3,2895	0,0017	−3,2886	0,0007

Таблица : Первые десять показателей Ляпунова для уравнения Хатчинсона при различных значениях параметра R, и их разность с эталонными значениями.

i	τ_i	$N = 10$		$N = 100$		$N = 1000$		$N = 2000$	
		λ_i	σ_i	λ_i	σ_i	λ_i	σ_i	λ_i	σ_i
1	−0,7941	−0,8637	0,0696	−0,8006	0,0065	−0,7947	0,0006	−0,7943	0,0002
2	−0,7941	−0,8639	0,0698	−0,8008	0,0067	−0,7948	0,0007	−0,7945	0,0004
3	−2,7721	−2,9470	0,1749	−2,7891	0,017	−2,7738	0,0017	−2,7730	0,0009
4	−2,7721	−2,9470	0,1749	−2,7891	0,017	−2,7738	0,0017	−2,7730	0,0009
5	−3,3533	−3,5382	0,1849	−3,3726	0,0193	−3,3553	0,0020	−3,3543	0,0010
6	−3,3533	−3,5382	0,1849	−3,3726	0,0193	−3,3553	0,0020	−3,3543	0,0010
7	−3,7173	−3,8720	0,1547	−3,7378	0,0205	−3,7193	0,0020	−3,7183	0,0010
8	−3,7173	−3,8720	0,1547	−3,7378	0,0205	−3,7193	0,0020	−3,7183	0,0010
9	−3,9835	−4,0371	0,0536	−4,0046	0,0211	−3,9855	0,0020	−3,9844	0,0009
10	−3,9835	−4,0371	0,0536	−4,0046	0,0211	−3,9855	0,0020	−3,9844	0,0009

Система уравнений Ланга-Кобаяши динамики полупроводникового лазера, учитывающая воздействие отраженного излучения на резонатор

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= v(1+i\alpha)EZ + \gamma e^{i(\omega-\omega_0)t}E(t-h), \\ \frac{dZ}{dy} &= Q - Z - (1+Z)|E|^2, \end{aligned} \tag{14}$$

где $E(t)$ — комплексная амплитуда электрического поля, $Z(t)$ — инверсия носителей, $\gamma > 0$ — интенсивность внешнего излучения, ω_1 и ω_0 — оптическая частота задающего и синхронизируемого лазера соответственно; Q — превышение током накачки первой пороговой величины; v есть отношение времен затухания инверсии носителей и фотонов в резонаторе; α — коэфициент уширения линии, отвечающий за нелинейное взаимодействие между амплитудой и фазой поля.

Для проведения вычислений перепишем систему уравнений (14) относительно вещественной амплитуды и фазы поля полагая $E(t) = x_0(t)e^{iy_0(t)}$

$$
\begin{aligned}
x_0' &= -\omega y_0 + vz_0(x_0 - \alpha y_0) + \\
&\quad + \gamma[x_0(t-h)\cos((\omega-\omega_0)h) - y_0(t-h)\sin((\omega-\omega_0)h)] \\
y_0' &= -\omega x_0 + vz_0(y_0 - \alpha x_0) + \\
&\quad + \gamma[y_0(t-h)\cos((\omega-\omega_0)h) + x_0(t-h)\sin((\omega-\omega_0)h)] \\
z_0' &= Q - z_0 - (1 - z_0)(x_0^2 + y_0^2).
\end{aligned} \tag{15}
$$

Линеаризованная на решениях $x_{i,*}, y_{i,*}, z_{i,*}$ системы уравнений Ланга-Кобаяши имеет следующий вид

$$
\begin{aligned}
x_i' &= vz_0x_i - y_i(vz_0\alpha + \omega) + vz(x_0 - \alpha y_0) + \\
&\quad + \gamma[\cos((\omega-\omega_0)h) * x_i(t-h) - \sin((\omega-\omega_0)h) * y_i(t-h)] \\
y_i' &= vz_0y_i - x_i(vz_0\alpha + \omega) + vz(y_0 - \alpha x_0) + \\
&\quad + \gamma[\sin((\omega-\omega_0)h) * x_i(t-h) + \cos((\omega-\omega_0)h) * y_i(t-h)] \\
z_i' &= -(2(1+z_0)x_0x_i + 2(1+z_0)y_0y + z(1 + (x_0^2 + y_0^2))).
\end{aligned} \tag{16}
$$

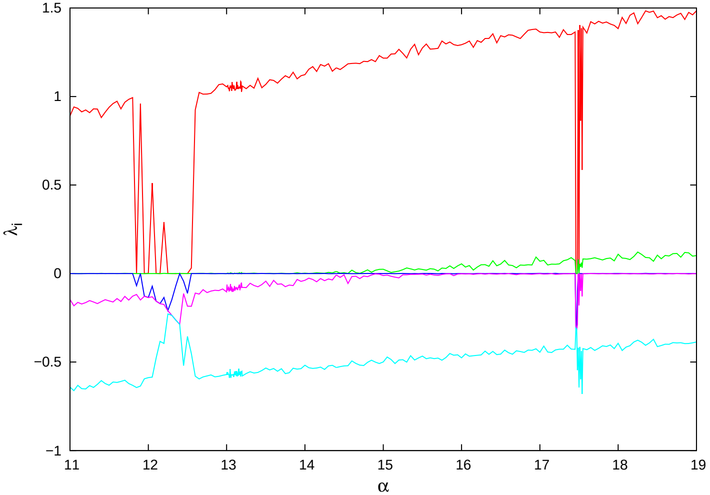

Рис. : Зависимость первых пяти показателей Ляпунова уравнения (15) от параметра α при $Q = 10$, $v = 2$, $\gamma = 2$, $\omega_0 = 0{,}3$, $\omega = 1$ $h = 1$