

Пространственно неоднородные решения уравнение Колмогорова-Петровского-Пискунова с запаздыванием



Алешин С.В., Глызин С.Д.

ЯрГУ

Таруса, 2015

Уравнением КПП называют логистическое уравнение с диффузией

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u[1 - u]. \quad (1)$$

Здесь $t \geq 0$ — временная переменная, а $x \in (-\infty, \infty)$ — пространственная .

Численное исследование проводилось для уравнения КПП, содержащего запаздывание

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + (1 - u(t - \tau, x))u(t, x), \quad (2)$$

где $u(t, x)$ — достаточно гладкая функция на некотором отрезке $[a, b]$. При этом разницу $|a - b|$ будем считать достаточно большой для того, чтобы увидеть распространение волны до момента встречи фронта с границами a или b . Для задачи (2) будем задавать нулевые краевые условия $u(t, a) = u(t, b) = 0$.

Перейдем к описанию вычислительной процедуры. Вторую производную по пространственной переменной $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$ заменим конечно-разностным оператором. Для этого отрезок $[a, b]$ разобьем на N равных частей и построим сетку узлов с шагом $h = \frac{b-a}{N}$: $x_j = a + jh$, где $j = 0, \dots, N-1$. Обозначим через $u_j(t)$ значение функции $u(t, x)$ в соответствующих узлах сетки. В итоге получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial u_j(t, x)}{\partial t} = \frac{u_{j+1}(t) - 2u_j(t) + u_{j-1}(t)}{h^2} + (1 - u_j(t - \tau))u_j(t). \quad (3)$$

Для учета краевых условий полагаем $u_{-1}(t) = u_N(t) = 0$.

Моделирование проводилось на вычислительном кластере МНИЛ «Дискретная и вычислительная геометрия» им. Б.Н. Делоне. Одновременно решалось от $N = 9 \cdot 10^4$ до $N = 1.8 \cdot 10^5$ уравнений. Особенностью численного решения такого большого количества дифференциальных уравнений с запаздыванием является повышенная требовательность к объемам доступной памяти для хранения всего решения на промежутке запаздывания. В связи с чем решение приходилось сохранять на жестком диске кластера, что существенно замедляло процедуру расчета.

Для вычислений использовался метод Дормана-Принца пятого порядка с переменной длиной шага интегрирования. Абсолютная и относительная погрешность алгоритма была установлена в значение 10^{-12} . Начальный шаг интегрирования равен 10^{-3} .

Начальные условия выбраны в виде прямоугольного импульса высоты 0.1 и единичной ширины, расположенного по середине отрезка x для всех $-\tau \leq t \leq 0$. В частности, для случая $x \in [0, 1800]$:

$$u_j(t) = \begin{cases} 0.1, & \text{если } j \in [89950, 90050], \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (4)$$

где $t \in [-\tau, 0]$. Для последующего анализа полученные данные прореживались.

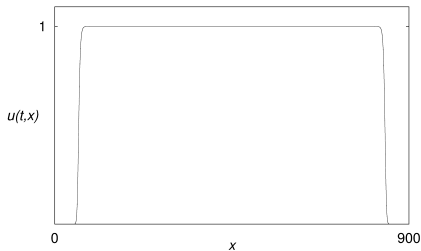
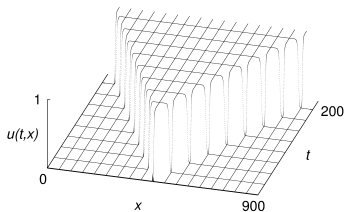


Рис. : Решение системы (3) при $\tau = 0$: а) трехмерная изображение б) разрез при $t = 200$

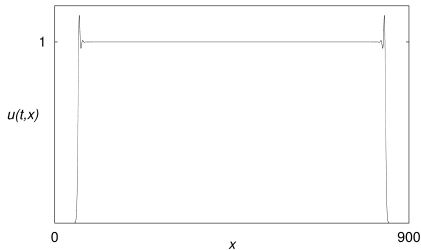
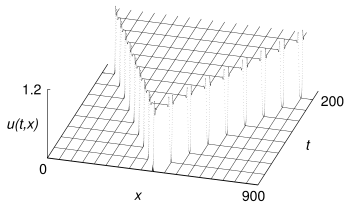


Рис. : Решение системы (3) при $\tau = 1$: а) трехмерная изображение б) разрез при $t = 200$

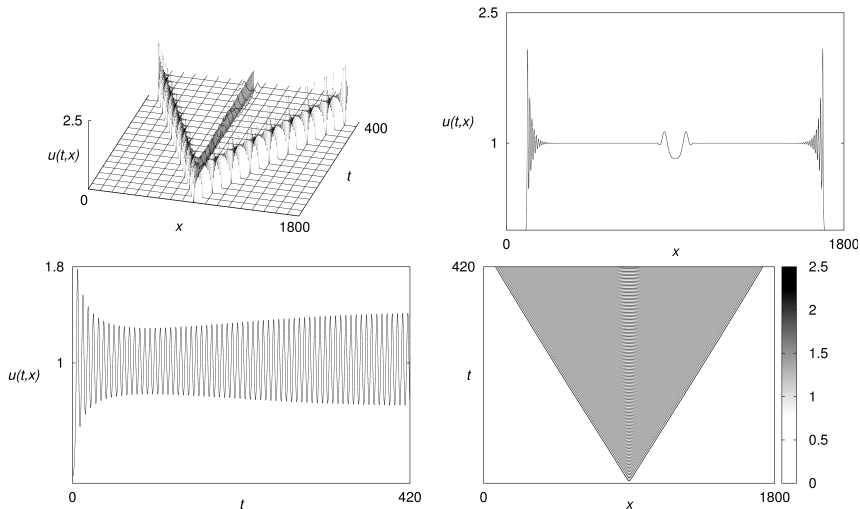


Рис. : Решение системы (3) при $\tau = 1.6$: а) трехмерное изображение б) разрез при $t = 400$ с) разрез при $x = 900$ д) вид сверху

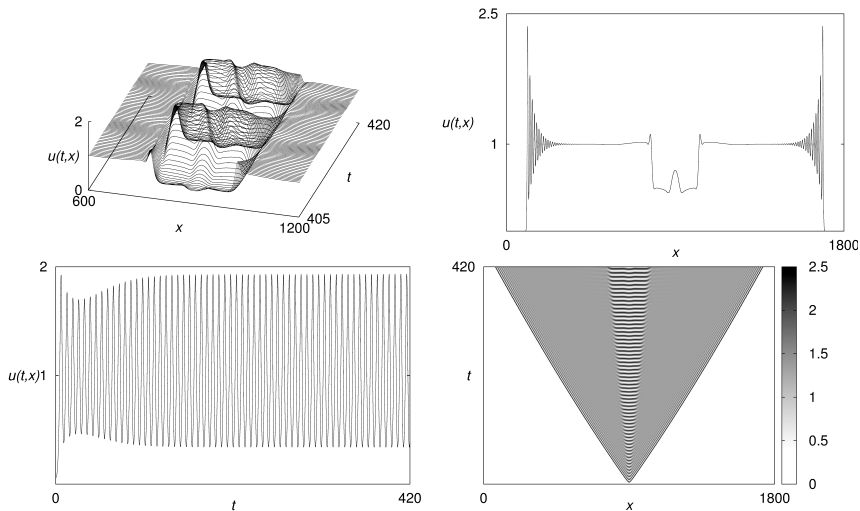


Рис. : Решение системы (3) при $\tau = 1.7$: а) трехмерное изображение при $x \in [600, 1200]$ и $t \in [405, 420]$ б) разрез при $t = 400$ с) разрез при $x = 900$ д) вид сверху

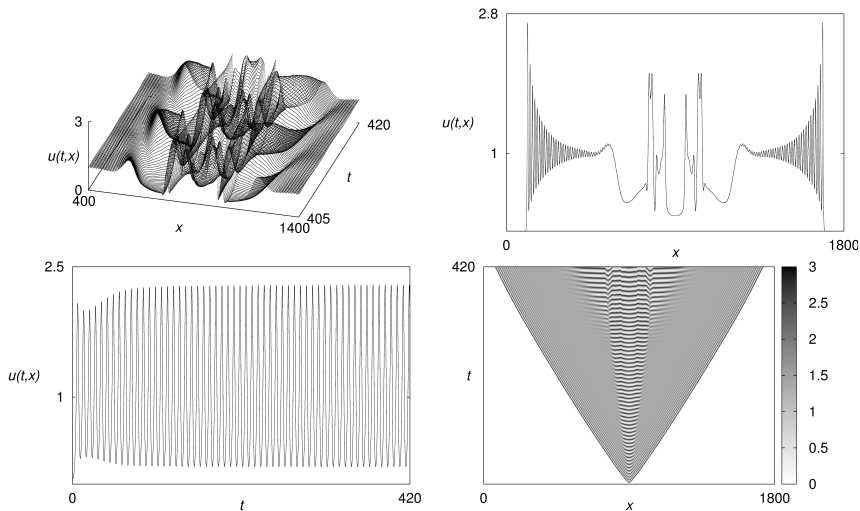


Рис. : Решение системы (3) при $\tau = 1.8$: а) трехмерное изображение при $x \in [400, 1400]$ и $t \in [405, 420]$ б) разрез при $t = 400$ с) разрез при $x = 900$ д) вид сверху

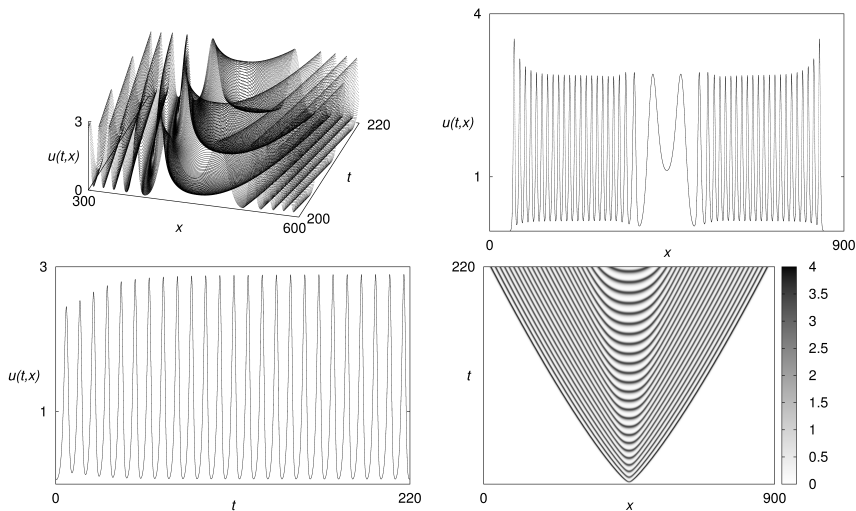


Рис. : Решение системы (3) при $\tau = 2$: а) трехмерное изображение при $x \in [300, 600]$ и $t \in [200, 220]$ б) разрез при $t = 200$ с) разрез при $x = 450$ д) вид сверху

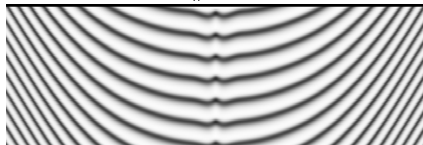
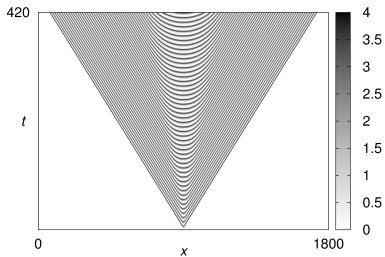
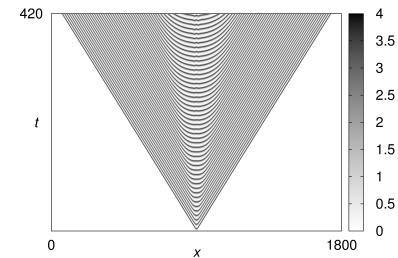


Рис. : Решение системы (3) при $\tau = 3$, вид сверху а) при $h = 0.1$ б) при $h = 0.02$