Численное исследование взаимодействия волн в уравнении Колмгорова–Петровского–Пискунова с запаздыванием

Сергей Алешин, Сергей Глызин

ЯрГУ

Таруса, 2016

Логистическое уравнение с диффузией (КПП), моделирующее распространение генной волны[1,2]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u[1 - u]. \qquad (1)$$

1. *A. Kolmogorov, I. Petrovsky, N. Piskunov.* Etude de l'equation de la diffusion avec croissance de la quantite de la matiere et son application a un ploblеme biologique. Moscow Univ. Bull. Math., 1, 1–25 (1937)
2. *Fisher, R.A.* The Wave of Advance of Advantageous Genes / *R.A. Fisher* // Annals of Eugenics, 7 (1937), 355–369.

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \Delta u(t,x) + u(t,x)[1 + \alpha u(t,x) - (1 + \alpha(g * u)(t,x)] \quad (2)$$

$$(g * u)(t,x) = \int_{-\infty}^{t} \int_{\Omega} g(t - \tau, x - y) u(\tau, y) dy d\tau, \quad (3)$$

1. *Гурли, С.А.* Нелокальные уравнения реакции–диффузии с запаздыванием: биологические модели и нелинейная динамика / *С.А. Гурли, Дж.В.-Х. Соу, Дж.Х. Ву* // Современная математика. Фундаментальные направления. Том 1 (2003). с. 84–120.
2. *Britton N. F.* Reaction-diffusion equations and their applications to biology / *N. F. Britton* — New York: Academic Press, 1986.
3. *Britton N. F.* Spatial structures and periodic travelling waves in an integro-differential reaction-diffusion population model / *N. F. Britton* // SIAM J. Appl. Math. 1990. V. 50. P. 1663–1688.

Уравнение КПП с запаздыванием

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u[1 - u(t-h,x)], \tag{4}$$

$$u(t, x+T) \equiv u(t,x), \tag{5}$$

$$h = \pi/2 + \varepsilon h_1 \quad 0 < \varepsilon \ll 1 \quad T \gg 1$$

$$u(t+h/k,x) = u(t,x)\times$$

$$\times \exp\left[\int\limits_{t}^{t+h/k} \frac{1}{u(\tau,x)}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\tau,x)d\tau + \left(\frac{h}{k} - \int\limits_{t-h}^{t-h+h/k} u(\tau,x)d\tau\right)\right].$$

Зададим узлы $x_j = T(j-1/2)/N$, $j = 1,\ldots,N$. Для переменных $u_{n,j} = u(nh/k, x_j)$ имеем систему разностных уравнений

$$u_{n+1,j} = u_{n,j} \exp\left[d\left(\frac{u_{n,j+1}}{u_{n,j}} + \frac{u_{n,j-1}}{u_{n,j}} - 2\right) + \frac{h}{k}(1 - u_{n-k,j})\right],$$

$$j = 1,\ldots,N,$$

где $n = 1,2,\ldots,$ $d = hN^2/(kT^2)$, $u_{n,0} = u_{n,N}$, $u_{n,N+1} = u_{n,1}$.

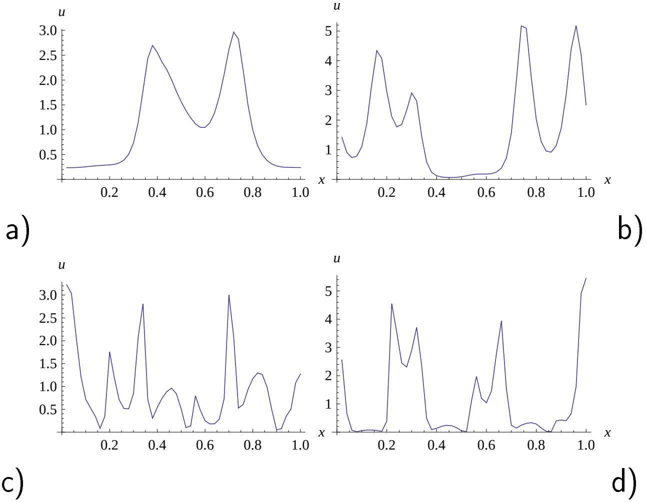


Рис. : Пространственное распределение решения $u(t,x)$ при a) $T = 60$, $h = 1.6$; b) $T = 60$, $h = 1.8$; c) $T = 120$, $h = 1.6$; d) $T = 120$, $h = 1.8$

Уравнение КПП с запаздыванием

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u[1 - u(t-h, x)], \tag{6}$$

$$u(t, x+T) \equiv u(t, x), \tag{7}$$

$$h = \pi/2 + \varepsilon h_1 \quad 0 < \varepsilon \ll 1 \quad T \gg 1$$

$$\lambda = -k^2 - \exp\left(-\left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon\right)\lambda\right), \; k \in (-\infty, \infty). \tag{8}$$

$$u(t,x) = 1 + \varepsilon^{1/2}\left[\xi(\tau, y)\exp(it) + \bar{\xi}(\tau, y)\exp(-it)\right] + \varepsilon u_2(\tau, y, t) + \varepsilon^{3/2} u_3(\tau \tag{9}$$

где $\tau = \varepsilon t, \; y = \varepsilon^{1/2} x$

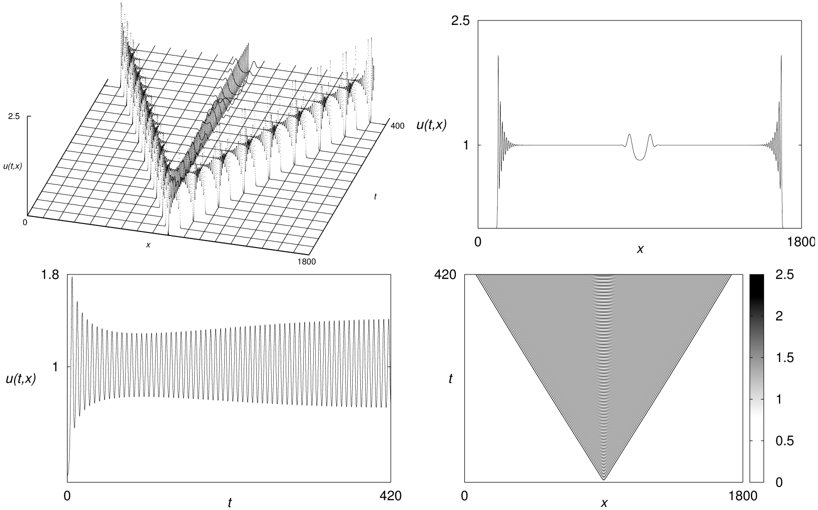
$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \delta \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \delta \xi + d|\xi|^2 \xi, \tag{10}$$

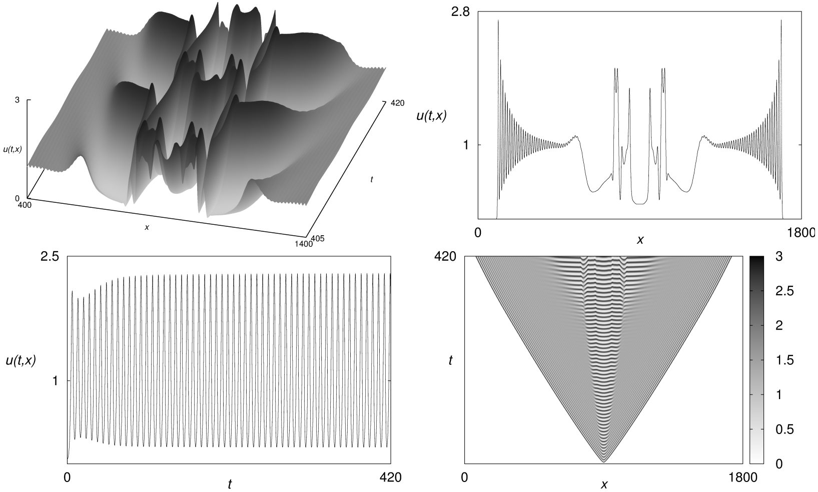
$\delta = (4 - 2\pi i)/(4 + \pi^2), \; d = -2(3\pi - 2 + i(\pi + 6))/(20 + 5\pi^2)$

Теорема 5.

Пусть уравнение (10) имеет ограниченное при $\tau \to +\infty$ и при $y \to \pm\infty$ решение $\xi_0(\tau, y)$. Тогда уравнение (6) имеет асимптотическое по невязке с точностью до $O(\varepsilon^{3/2})$ решение $u(t, x, \varepsilon)$, для которого

$$u(t, x, \varepsilon) = 1 + \varepsilon^{1/2}[\xi_0(\tau, y)\exp(it) + \bar{\xi}_0(\tau, y)\exp(-it)] +$$
$$+ \varepsilon\left[\frac{2-i}{5}\xi^2(\tau, y)\exp(2it) + \frac{2+i}{5}\bar{\xi}^2(\tau, y)\exp(-2it)\right] +$$


2.5
u(t,x)
0
x
1800
t
400
2.5
1
u(t,x)
0
x
1800
1.8
1
u(t,x)
0
t
420
420
t
0
x
1800
2.5
2
1.5
1
0.5
0


3
u(t,x)
0
400
x
1400
405
t
420
2.8
u(t,x)
1
0
x
1800
2.5
u(t,x)
1
0
t
420
420
t
0
x
1800
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0

Численное исследование взаимодействия волн в уравнении КПП с запаздыванием

$$\dot{u}_j = \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{(\Delta x)^2} + \big[1 - u_j(t-h)\big]\, u_j, \quad j = 0, \ldots, N-1. \tag{11}$$

$$u_{-1}(t) = u_N(t) = 0$$

Начальные условия выбирались в виде прямоугольного импульса высоты 0.1 и единичной ширины, расположенного в центре отрезка $[a, b]$ для всех $-h \leqslant t \leqslant 0$. В частности, для случая $x \in [0, 1800]$:

$$u_j(t) = \begin{cases} 0.1, & \text{если } j \in [89950, 90050], \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases} \tag{12}$$

где $t \in [-h, 0]$.

Численное исследование взаимодействия волн в уравнении КПП с запаздыванием

Видео 1,2,3,4