

**Онлайн-семинар ИКИ РАН
по механике, управлению и информатике
Руководитель семинара Р.Р. Назиров
26 ноября 2021 г.**

**О ВЛИЯНИИ СЖАТИЯ ЗЕМЛИ НА
ИНТЕГРАЛ ЭНЕРГИИ И НЕКОТОРЫЕ
ХАРАКТЕРИСТИКИ ОРБИТЫ
КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА**

• Ивашкин В.В.^{1, 2}

- *1 – Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва*
- *2 – Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана*

1. Введение-1

1. Кеплеровский случай - 1.

Уравнения движения КА у Земли без учета возмущений :

$$d^2\mathbf{r}/dt^2 = \partial U_0/\partial \mathbf{r}^* = \partial(\mu/r)/\partial \mathbf{r}^* = - (\mu/r^3)\mathbf{r} \quad (1)$$

Кеплеровский потенциал поля притяжения Земли:

$$U_0(\mathbf{r}) = \mu/r \quad (2)$$

Интеграл энергии в Кеплеровском случае [1-6]:

$$V^2 - 2U_0 = V^2 - 2\mu/r = h_k, \quad h_k = -\mu/a \quad (3)$$

1. Введение-2

1. Кеплеровский случай - 2

«Кеплеровская» константа энергии

$$h_K \equiv V^2 - 2\mu/r = -\mu/a = \text{const} \quad (3a)$$

Для двух точек на орбите

$$V_0^2 - 2\mu/r_0 = V_f^2 - 2\mu/r_f = h_K$$

Начальная скорость

$$V_0 = \sqrt{h_K + \frac{2\mu}{r_0}} \quad (3b)$$

2. Уравнения движения при учете сжатия Земли

2. Уравнения движения КА у Земли с учетом сжатия Земли:

$$d^2\mathbf{r}/dt^2 = \partial U/\partial \mathbf{r}^* \quad (4)$$

Потенциал поля притяжения Земли с учетом второй зональной гармоники:

$$U = U(\mathbf{r}) = U_0(\mathbf{r}) + U_2(\mathbf{r}), \quad (5)$$

где вторая зональная гармоника [2, 3, 5, 6]:

$$U_2(\mathbf{r}) = -\frac{\varepsilon}{r^3} \left(\sin^2 \varphi - \frac{1}{3} \right) = -\frac{\varepsilon}{r^3} \left(\frac{z^2}{r^2} - \frac{1}{3} \right), \quad (6)$$

$$\varepsilon = (3/2) J_2 \mu R_e^2, \quad J_2 \approx 1082,63 \cdot 10^{-6} [6], \quad \varepsilon \approx 2.63328 \cdot 10^{10} \text{ км}^5/\text{с}^2$$

3. Обобщенный интеграл энергии при учете сжатия Земли - 1

3. Рассмотрим удвоенную энергию движения КА $h(t)$:

$$h = V^2 - 2U = V^2 - 2U_0 - 2U_2 = h_K + \frac{2\varepsilon}{r^3} \left(\frac{z^2}{r^2} - \frac{1}{3} \right). \quad (7)$$

$U=U(\mathbf{r})$, и в силу уравнений движения (4-6) по произв. траектории будет [1, 4]: $dh/dt=0$, т.е. справедлива **Теорема**:

$$\mathbf{h} = V^2 - \frac{2\mu}{r} - 2U_2 = \mathbf{h}_K - 2U_2 = \mathbf{h}_K + \frac{2\varepsilon}{r^3} \left(\frac{z^2}{r^2} - \frac{1}{3} \right) = \mathbf{const} \quad (8)$$

Это – обобщенный интеграл энергии.

Для двух точек $\mathbf{x}_0 (\mathbf{r}_0, \mathbf{V}_0, t_0)$ и $\mathbf{x}_f (\mathbf{r}_f, \mathbf{V}_f, t_f)$ на произвольной орбите :

$$h = V_0^2 - \frac{2\mu}{r_0} + \frac{2\varepsilon}{r_0^3} \left(\frac{z_0^2}{r_0^2} - \frac{1}{3} \right) = V_f^2 - \frac{2\mu}{r_f} + \frac{2\varepsilon}{r_f^3} \left(\frac{z_f^2}{r_f^2} - \frac{1}{3} \right). \quad (9)$$

3. Обобщенный интеграл энергии при учете сжатия Земли - 2

Замечание 1. В общем случае в уравнениях движения (4-5) аналогично можно учесть и другие зональные гармоники:

$$U = \frac{\mu}{r} \left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left(\frac{R_e}{r} \right)^n P_n(\sin \varphi) \right], \quad (10)$$

$$J_3 = -2.5321531 \text{ E-6}; J_4 = -1.6109876 \text{ E-6} [6].$$

Замечание 2. В данном случае потенциального осесимметричного силового поля есть еще интеграл осевого момента количества движения [4]:

$$M_z = (\mathbf{e}_z, [\mathbf{r}, \mathbf{V}]) = c, \quad (10a)$$

$$M_z = xV_y - yV_x = c.$$

4. Изменение Кеплеровской константы энергии на орбите точки - 1

а) Изменение Кеплеровской константы энергии (в точном выражении):

$$h = V_0^2 - \frac{2\mu}{r_0} + \frac{2\varepsilon}{r_0^3} \left(\frac{z_0^2}{r_0^2} - \frac{1}{3} \right) = V_f^2 - \frac{2\mu}{r_f} + \frac{2\varepsilon}{r_f^3} \left(\frac{z_f^2}{r_f^2} - \frac{1}{3} \right). \quad (9)$$

$$\Delta h_K = h_{Kf} - h_{K0} = 2U_{2f} - 2U_{20} = -\frac{2\varepsilon}{r_f^3} \left(\frac{z_f^2}{r_f^2} - \frac{1}{3} \right) + \frac{2\varepsilon}{r_0^3} \left(\frac{z_0^2}{r_0^2} - \frac{1}{3} \right), \quad (11)$$

где $z/r = \sin \varphi = \sin i \sin u = \sin i \sin(\omega + \theta), \quad (11a)$

$$r = p / (1 + e \cos \theta), \quad (11b)$$

θ - истинная аномалия КА на орбите.

Изменение большой полуоси (в линейном приближении):

$$\Delta a = a_f - a_0 = (a_0 a_f) \Delta h_K / \mu \approx (a^2 / \mu) \Delta h_K. \quad (11c) \quad 7/16$$

4. Изменение Кеплеровской константы энергии на орбите точки - 2

Оценка изменения Кеплеровской константы энергии при полете к планетам и Луне.

б) Отлет к планете по квази-гиперболической орбите с $V_{\infty} > 1$ км/с:

$$\Delta h_K = h_{Kf} - h_{K0} = 2U_{2f} - 2U_{20} = -\frac{2\varepsilon}{r_f^3} \left(\frac{z_f^2}{r_f^2} - \frac{1}{3} \right) + \frac{2\varepsilon}{r_0^3} \left(\frac{z_0^2}{r_0^2} - \frac{1}{3} \right) \quad (11)$$

$$r \rightarrow \infty, U_{2f} \rightarrow 0; \Delta h_K \rightarrow \Delta h_{Kl} = -2U_{20} = \frac{2\varepsilon}{r_0^3} \left(\frac{z_0^2}{r_0^2} - \frac{1}{3} \right). \quad (12)$$

Пусть: $u_0 = \omega_0 = \theta_0 = 0, z_0 = 0 : \Delta h_{Kl} = -2\varepsilon/(3r_0^3)$ (12a)

$$z_0 = 0, r_0 = 6578 \text{ км}: \Delta h_{Kl} \sim -0.0617 \text{ км}^2/\text{с}^2 [7-8]. \quad (12b)$$

4. Изменение Кеплеровской константы энергии на орбите точки - 3

в) Полет к Луне - 1.

Вытянутая квази-эллиптическая орбита прямого полета к Луне.

Перигей в начальной точке, апогей за ц.м. Луны :

$$dr/dt > 0, r_0 \leq r \leq r_M; r_M \approx 360-405 \text{ т. км.} \quad (13a)$$

$$r_{\pi 0} = r_0 = 6578 \text{ км}; r_M \leq r_\alpha \leq 10^6 \text{ км.} \quad (13b)$$

4. Изменение Кеплеровской константы энергии на орбите точки - 4

в) Полет к Луне -2

Изменение Кеплеровской константы энергии:

$$\Delta h_K = -2U_{20} + 2U_{2f} = \frac{2\varepsilon}{r_0^3} \left(\frac{z_0^2}{r_0^2} - \frac{1}{3} \right) - \frac{2\varepsilon}{r_f^3} \left(\frac{z_f^2}{r_f^2} - \frac{1}{3} \right). \quad (11)$$

При $r_f/r_0 > 40$, $r_f > 270$ т. км: $\delta = |2U_{2f}| < 2 \cdot 10^{-6}$ км²/с².

$$\Delta h_K \approx -2U_{20} = \frac{2\varepsilon}{r_0^3} \left(\frac{z_0^2}{r_0^2} - \frac{1}{3} \right). \quad (14)$$

При $z_0=0$: $\Delta h_K \approx -2U_{20} = -2\varepsilon/(3r_0^3) = -0.0617$ км²/с²,

$\Delta a \approx -6200$ км при $a=200$ т. км,

$\Delta a \approx -8900$ км при $a=220$ т. км,

$\Delta a \approx -56$ т. км при $a=600$ т. км [7-8].

4. Изменение Кеплеровской константы энергии в первом приближении - 1

г) Изменение Кеплеровской константы энергии и большой полуоси в первом приближении :

$$\Delta h_K = 2U_2 - 2U_{20} = -\frac{2\varepsilon}{r^3} \left(\frac{z^2}{r^2} - \frac{1}{3} \right) + \frac{2\varepsilon}{r_0^3} \left(\frac{z_0^2}{r_0^2} - \frac{1}{3} \right), \quad (15a)$$

$$\Delta h_K = -\frac{2\varepsilon}{p^3} (1 + e \cos \theta)^3 \left[\sin^2 i \sin^2 (\omega + \theta) - \frac{1}{3} \right] - 2U_{20}, \quad (15)$$

$$2U_2 = c_{0\theta} + (2\varepsilon/p^3) \sum_{j=1}^{10} c_j(e, i) \cos(n_j \omega + m_j \theta), \quad (16)$$

$$c_{0\theta} = (2\varepsilon/3p^3) \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 i \right) \left(1 + \frac{3}{2} e^2 \right). \quad (17)$$

$$c_{0M} = (2\varepsilon/3ap^2) \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 i \right) (1 - e^2)^{1/2} \quad (18)$$

$$\Delta a = a_f - a_0 = (a_0 a_f) \Delta h_K / \mu \approx (a^2 / \mu) \Delta h_K \quad [9-11] \quad (19)$$

4. Изменение Кеплеровской константы энергии в первом приближении - 2

д) c_j - первое приближение:

$$\begin{aligned} c_1 &= 3e^2(\sin^2 i)/8; & n_1 &= 2; m_1 = 0; \\ c_2 &= e(1 + e^2/4)(1 - (3\sin^2 i)/2); & n_2 &= 0; m_2 = 1; \\ c_3 &= e^2(1 - (3\sin^2 i)/2)/2; & n_3 &= 0; m_3 = 2; \\ c_4 &= e^3(1 - (3\sin^2 i)/2)/12; & n_4 &= 0; m_4 = 3; \\ c_5 &= 3e(1 + e^2/4)(\sin^2 i)/4; & n_5 &= 2; m_5 = 1; \\ c_6 &= e^3(\sin^2 i)/16; & n_6 &= 2; m_6 = -1; \\ c_7 &= (1 + e^2/2)(\sin^2 i)/2; & n_7 &= 2; m_7 = 2; \\ c_8 &= 3e(1 + e^2/4)(\sin^2 i)/4; & n_8 &= 2; m_8 = 3; \\ c_9 &= 3e^2(\sin^2 i)/8; & n_9 &= 2; m_9 = 4; \\ c_{10} &= e^3(\sin^2 i)/16; & n_{10} &= 2; m_{10} = 5. \end{aligned} \quad (20)$$

5. Начальная скорость отлета КА к Луне и планетам

Две точки на орбите КА: начальная $\mathbf{x}_0 (\mathbf{r}_0, \mathbf{V}_0, t_0)$ и текущая $\mathbf{x}_f (\mathbf{r}_f, \mathbf{V}_f, t_f)$. Тогда:

$$h = V_0^2 - \frac{2\mu}{r_0} + \frac{2\varepsilon}{r_0^3} \left(\frac{z_0^2}{r_0^2} - \frac{1}{3} \right) = V_f^2 - \frac{2\mu}{r_f} + \frac{2\varepsilon}{r_f^3} \left(\frac{z_f^2}{r_f^2} - \frac{1}{3} \right). \quad (9)$$

Отсюда, при заданной конечной Кеплеровской константе энергии h_K , определяется начальная скорость КА:

$$V_0 = \sqrt{h_K + \frac{2\mu}{r_0} + 2U_{20} - 2U_{2f}} = \sqrt{h_K + \frac{2\mu}{r_0} + \Delta h}; \quad (21)$$

$$\Delta h = \frac{2\varepsilon}{r_f^3} \left(\frac{z_f^2}{r_f^2} - \frac{1}{3} \right) - \frac{2\varepsilon}{r_0^3} \left(\frac{z_0^2}{r_0^2} - \frac{1}{3} \right) \approx -\frac{2\varepsilon}{r_0^3} \left(\frac{z_0^2}{r_0^2} - \frac{1}{3} \right). \quad (21a)$$

При полете к планете или к Луне, при $z_0 \approx 0$, увеличение необходимой начальной скорости по сравнению с Кеплеровским случаем составляет $\delta V_0 \approx 3$ м/с [12-13].

6. Выводы

Для модели движения КА с учетом полярного сжатия Земли как тела вращения получен обобщенный интеграл энергии. На основе его выполнен анализ изменения, за счет учета сжатия Земли, кеплеровской константы энергии и начальной скорости полета КА к Луне или планетам. При отлете от Земли в экваториальной области Кеплеровская константа энергии уменьшается из-за сжатия Земли на $\sim 0.062 \text{ км}^2/\text{с}^2$. Поэтому необходимая скорость отлета КА от Земли увеличивается $\sim$ на 3 м/с.

7. Литература

1. Суслов Г.К. Теоретическая механика. Гостехиздат. 1944. 656 с.
2. Аким Э.Л., Энеев Т.М. Определение параметров движения космического летательного аппарата по данным траекторных измерений // Космические исследования. 1963. Т. 1. Вып. 1. С. 5-50.
3. Эльясберг П.Е. Введение в теорию полета искусственных спутников Земли. М.: Наука. 1965. 540 с.
4. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.: Наука. 1979. 432 с.
5. Охоцимский Д.Е., Сихарулидзе Ю.Г. Основы механики космического полета. М.: Наука. 1990. 448 с.
6. Chobotov V.A., Editor. Orbital Mechanics. AIAA Education Series. AIAA, USA. - 2002. 365 p.
7. Ивашкин В.В. Оптимизация космических маневров при ограничениях на расстояния до планет. М: Наука. 1975. 392 с.
8. Ивашкин В.В. Об оптимальных траекториях полета КА к Луне в системе Земля-Луна-Солнце//Препринт ИПМ им. М.В.Келдыша РАН, 2001г., № 85.

7. Литература

9. Krause H.G.L. Die säkularen und periodischen Störungen der Bahn eines künstlichen Erdsattelliten // 7th International Astronautical Congress, Rome. September 1956. Proceedings, pp. 523-585.
10. Проскурин В.Ф., Батраков Ю.В. Возмущения в движении искусственных спутников, вызываемые сжатием Земли // Бюллетень Института теоретической астрономии. Том VII. № 7 (90). 1960. С. 537-549.
11. Абалакин В.К. и др. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. Издание 2-е. М.: Наука. 1976. 864 с.
12. Ивашкин В.В. Применение обобщенного интеграла энергии для анализа движения космического аппарата с учетом сжатия Земли // Инженерный журнал: наука и инновации # 3, 2021. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. С. 242-246. DOI: 10.18698/2308-6033-2021-3-2067.
13. Ивашкин В.В. Влияние сжатия Земли на интеграл энергии и некоторые характеристики орбиты космического аппарата // Космические исследования-Cosmic Research, 2021, том 59, № 5, с. 373-376. DOI: 10.31857/S0023420621050046 - 10.1134/S001095252105004X.

Спасибо за Внимание!