ISSN 2075-6836

УЧРЕЖДЕНИЕ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
ИНСТИТУТ КОСМИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ РАН

А. А. Суханов

АСТРОДИНАМИКА

Серия «Механика, управление, информатика»

МОСКВА
2010

УДК 521.3 : 681.1 : 629.7
ББК

Astrodynamics. Series “Mechanics, control, informatics”

A. A. Sukhanov

Lectures on Astrodynamics

Basic knowledge in different areas of astrodynamics is given. Primary consideration is given to the chapters related to the two-body problem and space transfers both with impulsive and continuous thrust. Other parts of the space flight mechanics (such as orbit perturbations and navigation in space) are described in fewer details. The issue begins with necessary mathematical knowledge. A brief dictionary of the English analogues of the used terminology is given in the end.

It may be used for independent study of the Astrodynamics and as a handbook.

Keywords: two body problem, orbital maneuver, Lambert problem, interplanetary transfer, transfer optimization, low thrust

Астродинамика. Серия «Механика, управление, информатика»

Приводятся основные сведения из различных областей механики космического полета (астродинамики). Главное внимание уделено разделам, относящимся к задаче двух тел и космическим перелетам с импульсной и малой тягой. Другие разделы механики космического полета (такие, как возмущения орбиты и навигация в космосе) рассматриваются менее подробно. Работа предваряется сведениями из математики, необходимыми для понимания излагаемого материала. В конце дается краткий словарь английских аналогов используемых терминов.

Может использоваться для самостоятельного изучения астродинамики и в качестве справочника.

Ключевые слова: задача двух тел, орбитальный маневр, задача Ламберта, межпланетный перелет, оптимизация перелетов, малая тяга

Суханов Александр Александрович — старший научный сотрудник, кандидат физико-математических наук

Sukhanov Alexander Alexandrovich — senior scientist, PhD

E-mail: sukhanov@iki.rssi.ru

Содержание

Предисловие

Предлагаемый материал является существенно переработанным переводом последнего (пятого) английского издания лекций автора “Lectures on Astrodynamics” по механике космического полета, прочитанных в шведском Институте космической физики (IRF, г. Кируна), в Национальном институте космических исследований Бразилии (INPE, г. Сан Жозе дус Кампус), а также в бразильских университетах г. Бразилиа (UnB) и штата Сан Пауло (UNESP, г. Гуаратингетá) в 1996–2009 гг.

Работа охватывает основные области механики космического полета, от основ (законы Кеплера и закон всемирного тяготения Ньютона) до таких специальных разделов, как матрица изохронных производных, оптимизация перелетов с малой тягой, ограничения на направление тяги. Основная цель издания — дать углубленные знания о движении в пространстве в рамках задачи двух тел и о космических перелетах как с импульсной, так и с малой тягой на основе современных математических методов. О других разделах астродинамики, не относящихся к этой проблематике (таких, например, как возмущения орбиты и космическая навигация), даются лишь самые общие представления. Для удобства пользователей многие главы предваряются набором используемых в этих главах формул и обозначений. Важные формулы и положения заключены в рамку, общеупотребительные термины выделены подчеркиванием. Теоретический материал иллюстрируется рисунками, графиками и таблицами. Во избежание недоразумений следует отметить, что векторы в тексте работы помечаются верхними стрелками, однако на рисунках стрелки заменены черточками.

Главы 6, 7, 9, 11, 14–16 основаны на математических методах, разработанных автором.

Работа “Lectures on Astrodynamics”, послужившая основой данного издания, является иллюстративным материалом, используемым при чтении лекций, и написана намеренно сжатым, конспективным стилем; многие положения работы нуждаются в разъяснениях и комментариях. Отчасти этот стиль сохранился и в данном издании. Тем не менее, издание доступно и для самостоятельного изучения подготовленными студентами, аспирантами и специалистами в смежных областях. Издание содержит большое количество полезных формул, таблиц и других сведений, поэтому также может использоваться специалистами в качестве справочника по механике космического полета.

1. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ МАТЕМАТИКИ

Производные по времени

$x = x(t)$,

$\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d\dot{x}}{dt}$.

Векторы

$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ — вектор-столбец размерности n, n-вектор

$\vec{x} = \vec{x}(t)$: $\dot{\vec{x}} = \{\dot{x}_1, \dot{x}_2, ..., \dot{x}_n\}$.

Транспонирование: $\vec{x}^T = [x_1 \ x_2 \ ... \ x_n]$ — строка.

Скалярное произведение: $\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$,
$\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x} = \vec{x}^T \vec{y} = \vec{y}^T \vec{x}$.

Векторы $\vec{x}_1, ..., \vec{x}_m$ $(m \leqslant n)$ линейно независимы, если равенство $\sum_{i=1}^{m} c_i \vec{x}_i = \vec{0}$ выполняется только для $c_1 = ... c_m = 0$.

Матрицы

$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mn} \end{bmatrix}$ — матрица размерности $m \times n$, $m \times n$-матрица

Если $m = n$, то A является матрицей порядка n, или n-матрицей.

$A = A(t)$: $\dot{A} = \begin{bmatrix} \dot{A}_{11} & \dot{A}_{12} & \dots & \dot{A}_{1n} \\ \dot{A}_{21} & \dot{A}_{22} & \dots & \dot{A}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dot{A}_{m1} & \dot{A}_{m2} & \dots & \dot{A}_{mn} \end{bmatrix}$.

Скалярный множитель: $cA = \begin{bmatrix} cA_{11} & cA_{21} & \dots & cA_{m1} \\ cA_{12} & cA_{22} & \dots & cA_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ cA_{1n} & cA_{2n} & \dots & cA_{mn} \end{bmatrix}$.

Пусть A — $l \times m$-матрица:

$\vec{x}$ — m-вектор: $\vec{y} = A\vec{x}$ — l-вектор, $y_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j$;

B — $m \times n$-матрица: $C = AB$ — $l \times n$-матрица, $C_{ij} = \sum_{k=1}^{m} A_{ik} B_{kj}$.

Транспонирование:

$A^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{m1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{mn} \end{bmatrix}$ — транспонированная $n \times m$-матрица

Обратная матрица:

A — n-матрица, $I = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$ — единичная матрица;

A^{-1} — обратная матрица: $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

Важные свойства транспонированных и обратных матриц:

$(AB)^T = B^T A^T$, $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$,

$\frac{dA^{-1}}{dt} = -A^{-1} \dot{A} A^{-1}$.

Ранг матрицы:

Ранг $n \times m$-матрицы A равен $\operatorname{rank}(A) = r$ ($r \leqslant \min(m, n)$), если существуют r линейно независимых столбцов или строк матрицы A и любые $r + 1$ столбцов или строк являются линейно зависимыми.

Матрица A порядка n может быть обращена, если и только если $\operatorname{rank}(A) = n$.

Производные по вектору

$y = y(\vec{x})$, $\vec{x} = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$:

$$\frac{\partial y}{\partial \vec{x}} = \operatorname{grad}_{\vec{x}} y = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial y}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial y}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$ — градиент (строка);

$$\vec{y} = \vec{y}\left(\vec{x}\right) = \left\{ y_1, \dots, y_m \right\},\ \vec{x} = \left\{ x_1, \dots, x_n \right\}:$$

$$Y = \frac{\partial \vec{y}}{\partial \vec{x}}$$ — $m\times n$-матрица, $Y_{ij} = \dfrac{\partial y_i}{\partial x_j}$ $(i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots, n)$.

Экстремум функции

Экстремум — минимум или максимум функции.

Скалярный аргумент:

$x = x(t)$: $\dot{x} = 0$ — необходимое условие $\min x$ или $\max x$.

Векторный аргумент:

$y = y\left(\vec{x}\right)$: $\dfrac{\partial y}{\partial \vec{x}} = \vec{0}^T$ — необходимое условие $\min y$ или $\max y$.

Метод Ньютона–Рафсона решения алгебраических уравнений

Скалярное уравнение:

$$y(x) = a\ , \quad y' = \frac{dy}{dx}.$$

Пусть x_0 — начальное приближение; на k-й итерации

$$\boxed{x_k = x_{k-1} - \frac{y\left(x_{k-1}\right) - a}{y'\left(x_{k-1}\right)} \quad (k = 0, 1,\ \dots)}$$

Векторное уравнение:

$\vec{y}\left(\vec{x}\right) = \vec{a}$ $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{a}$ — n-векторы, $Y\left(\vec{x}\right) = \dfrac{\partial \vec{y}\left(\vec{x}\right)}{\partial \vec{x}}$.

Пусть $\vec{x}_0$ — начальное приближение; на k-й итерации

$$\boxed{\vec{x}_k = \vec{x}_{k-1} - Y^{-1}\left(\vec{x}_{k-1}\right)\left[\vec{y}\left(\vec{x}_{k-1}\right) - \vec{a}\right],\ (k = 0, 1, \dots)}$$

Вектор в 3-мерном пространстве

$\vec{a} = \left\{ a_x, a_y,\ a_z \right\}$ — 3-вектор,

$a = \left| \vec{a} \right| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ — модуль вектора.

$\vec{a}^0 = \dfrac{\vec{a}}{a}$ — единичный вектор,

$\left| \vec{a}^0 \right| = 1$,

$$\frac{\partial a}{\partial \vec{a}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial a}{\partial a_x} & \dfrac{\partial a}{\partial a_y} & \dfrac{\partial a}{\partial a_z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{a_x}{a} & \dfrac{a_y}{a} & \dfrac{a_z}{a} \end{bmatrix} = \vec{a}^{0T}.$$

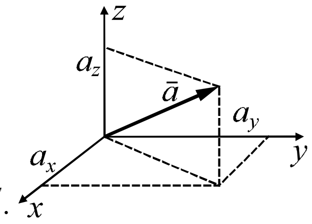


Рис. 1.1

Скалярное произведение:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{a}^T\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z .$$

Векторное произведение:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \left\{ a_y b_z - a_z b_y ,\ a_z b_x - a_x b_z ,\ a_x b_y - a_y b_x \right\}.$$

Пусть φ — угол между $\vec{a}$ и $\vec{b}$; тогда

$\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\varphi$, $\left| \vec{a}\times\vec{b} \right| = ab\sin\varphi$.

Канонические уравнения

$$H = H\left(\vec{x}\right),\ \ \vec{x} = \begin{bmatrix} \vec{x}' \\ \vec{x}'' \end{bmatrix},\ \ \vec{x}' = \left\{ x_1', \dots, x_n' \right\},\ \vec{x}'' = \left\{ x_1'', \dots, x_n'' \right\};$$

$$\boxed{\dot{\vec{x}}' = \left(\frac{\partial H}{\partial \vec{x}''}\right)^T,\ \ \dot{\vec{x}}'' = -\left(\frac{\partial H}{\partial \vec{x}'}\right)^T} \tag{1.1}$$

H — гамильтониан, функция Гамильтона;

$\vec{x}'$, $\vec{x}''$ — канонические переменные.

Уравнения (1.1) — уравнения Гамильтона, каноническая форма дифференциальных уравнений.

В силу (1.1) $\dfrac{dH}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial \vec{x}'}\dot{\vec{x}}' + \dfrac{\partial H}{\partial \vec{x}''}\dot{\vec{x}}'' = 0$

$\Rightarrow$ $\boxed{H = \mathrm{const}}$ — первый интеграл уравнений (1.1).

Гиперповерхность

$\vec{x} = \left\{ x_1, \dots, x_n \right\}$ — вектор в n-мерном пространстве,

$f\left(\vec{x}\right) = 0$ — уравнение гиперповерхности S.

Если $f\left(\vec{x}\right) = A\vec{x} + \vec{b}$, то S — гиперплоскость.

Пусть $f(\vec{x}_0)=f(\vec{x})=0 \Rightarrow \vec{x}_0,\ \vec{x}\in S$,

$\vec{x}\to\vec{x}_0 \Rightarrow d\vec{x}=\vec{x}-\vec{x}_0\in P$ — касательная гиперплоскость,

$$f(\vec{x})=f(\vec{x}_0)+\left.\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial\vec{x}}\right|_{\vec{x}_0} d\vec{x} \Rightarrow \left.\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial\vec{x}}\right|_{\vec{x}_0} d\vec{x}=0$$

$\Rightarrow \dfrac{\partial f(\vec{x})}{\partial\vec{x}}=\operatorname{grad}_{\vec{x}} f(\vec{x})$ ортогонален P и S.

Многообразие

Уравнения

$$f_1(\vec{x})=0,\dots,f_m(\vec{x})=0 \qquad (1.2)$$

определяют m гиперповерхностей $S_1, \dots, S_m$.

Пересечение M гиперповерхностей $S_1, \dots, S_m$ (т. е. $\vec{x}\in M$, если $\vec{x}$ удовлетворяет всем уравнениям (1.2)) является многообразием, если векторы

$$\frac{\partial f_1}{\partial\vec{x}},\dots,\frac{\partial f_m}{\partial\vec{x}}$$

линейно независимы.

Пересечение касательных гиперплоскостей к гиперповерхностям $S_1, \dots, S_m$ в точке $\vec{x}\in M$ — касательная плоскость к многообразию M в $\vec{x}$.

Любая линейная комбинация

$$\sum_{i=1}^{m} c_i \frac{\partial f_i(\vec{x})}{\partial\vec{x}}$$

ортогональна касательной плоскости к многообразию.

2. ЗАДАЧА ДВУХ ТЕЛ

2.1. Уравнения движения

Законы Кеплера, основанные на наблюдениях (рис. 2.1):

1. Каждая планета обращается по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце (F_1 или F_2).

2. За равные промежутки времени радиус-вектор, соединяющий Солнце и планету, заметает сектора равной площади:

$$\boxed{t_2-t_1=t_4-t_3 \Rightarrow S_1=S_2}$$

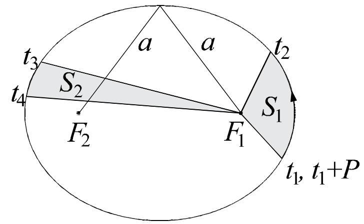


Рис. 2.1

3. Квадраты периодов обращения планет вокруг Солнца относятся, как кубы больших полуосей орбит планет:

$$\boxed{\frac{P_1^2}{P_2^2}=\frac{a_1^3}{a_2^3}}$$

Закон всемирного тяготения Ньютона (закон обратных квадратов) выводится из законов Кеплера:

$F=\dfrac{GMm}{r^2}$ — сила тяготения, гравитационная сила;

$G=6{,}672\cdot10^{-20}$ км$^3\cdot$кг$^{-1}\cdot$с$^{-2}$ — гравитационная постоянная;

M, m — притягивающие массы;

r — расстояние между M и m.

Векторная форма закона:

$$\vec{F}=-\frac{GMm}{r^2}\vec{r}^{\,0},$$

$$\vec{r}^{\,0}=\frac{\vec{r}}{r},\quad r=|\vec{r}|,$$

$\vec{r}=\{x,y,z\}$ — вектор положения, радиус-вектор.

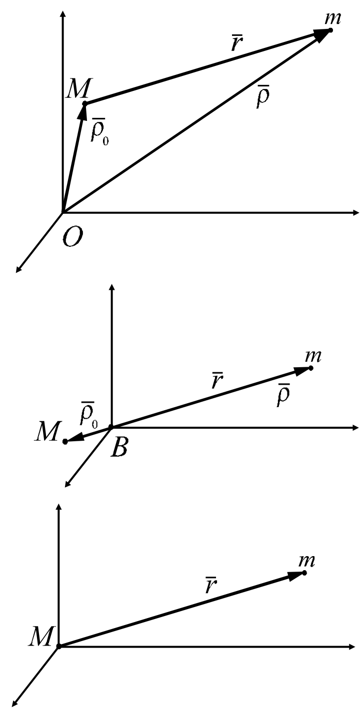


Рис. 2.2

Ускорение (рис. 2.2)

$\vec{r} = \vec{\rho} - \vec{\rho}_0$.

1. Инерциальные координаты:

$$\ddot{\vec{\rho}} = -\frac{GM}{r^3}\vec{r}\ ,\ \ddot{\vec{\rho}}_0 = \frac{Gm}{r^3}\vec{r}\ . \qquad (2.1)$$

2. Барицентрические координаты:

$$\vec{\rho}_0 = -\frac{m}{M}\vec{\rho}$$

и используется (2.1) с

$$\vec{r} = \frac{M+m}{M}\vec{\rho} = -\frac{M+m}{m}\vec{\rho}_0\ .$$

3. M-центрические координаты:

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{\rho}} - \ddot{\vec{\rho}}_0 = -\frac{G(M+m)}{r^3}\vec{r}\ . \qquad (2.2)$$

$\mu_1 = GM$, $\mu_2 = Gm$ — гравитационные параметры,

$\mu = \mu_1 + \mu_2 = G(M+m)$.

Пусть $m \ll M \ \Rightarrow\ \mu \approx GM$.

Закон всемирного тяготения Ньютона:

$$\boxed{\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\vec{r}} \qquad (2.3)$$

Другие формы закона всемирного тяготения:

1. $U = \dfrac{\mu}{r}$ — гравитационный потенциал;

$$\boxed{\ddot{\vec{r}} = \left(\frac{\partial U}{\partial \vec{r}}\right)^T} \qquad (2.4)$$

$\Rightarrow$ сила является консервативной.

2. $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$, $\vec{x} = \begin{bmatrix}\vec{r}\\ \vec{v}\end{bmatrix}$, $\vec{f}\left(\vec{x}\right) = \begin{bmatrix}\vec{v}\\ -\dfrac{\mu}{r^3}\vec{r}\end{bmatrix}$;

$$\boxed{\dot{\vec{x}} = \vec{f}\left(\vec{x}\right)} \qquad (2.5)$$

$\vec{v} = \left\{v_x, v_y, v_z\right\}$ — вектор скорости,

$\vec{x}$ — вектор состояния.

Уравнения (2.1)–(2.5) описывают задачу двух тел, кеплеровское движение, невозмущенное движение

В табл. 2.1 приведены гравитационные параметры Солнца, планет и Луны, а также средние расстояния планет от Солнца и Луны от Земли.

Таблица 2.1. Гравитационные параметры Солнца, планет и Луны и средние расстояния планет от Солнца и Луны от Земли

Небесное тело	μ, км^3/с^2	Средние расстояния от Солнца	
		а.е.	10^6 км
Солнце	$132712{,}440 \cdot 10^6$	—	—
Меркурий	22032,080	0,387	57,909
Венера	324858,599	0,723	108,209
Земля	398600,433	1,000	149,598
Марс	42828,314	1,524	227,941
Юпитер	126712767,858	5,203	778,293
Сатурн	37940626,061	9,555	1429,371
Уран	5794549,007	19,218	2874,995
Нептун	6836534,064	30,110	4504,346
Плутон	981,601	39,518	5911,775
Луна*	4902,801	0,00257	0,3844

* Среднее расстояние от Земли

2.2. Гравитационное поле тела конечных размеров

Выше предполагалось, что притягивающие тела представляют собой массивные точки. Теперь рассмотрим тело конечных размеров. Обозначим (рис. 2.3):

dm , dV — элементарные масса и объем,

$\sigma = \sigma\left(\vec{R}\right)$ — плотность,

$R = \left|\vec{R}\right|$.

Тогда

$dm = \sigma dV$,

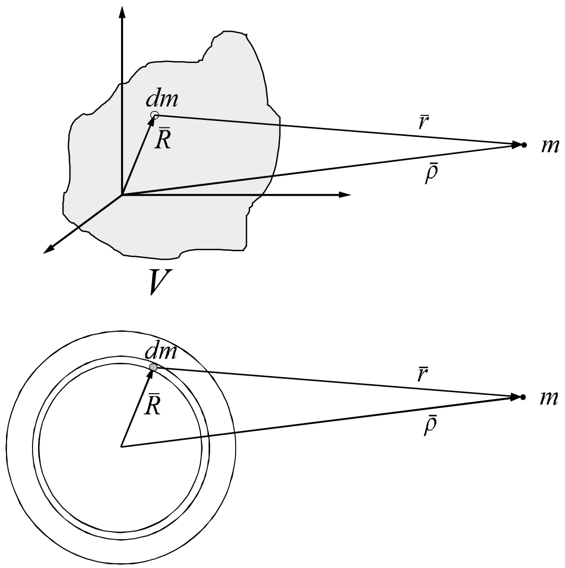


Рис. 2.3

$$\int_V dm = M,$$

$$U = G\int_V \frac{\sigma dV}{r} = G\int_V \frac{\sigma dV}{\left|\vec\rho - \vec R\right|}.$$

Если $\sigma = \sigma(R)$, то $U = \dfrac{GM}{\rho} = \dfrac{\mu}{\rho}$

Тело со сферически распределенной плотностью притягивает как точка такой же массы, расположенная в центре масс тела, т. е. тело имеет центральное гравитационное поле

2.3. Первые интегралы

Скалярное умножение (2.3) на $\vec v = \dot{\vec r}$ дает:

левая часть — $\dot{\vec r}\cdot\ddot{\vec r} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\dot{\vec r}\cdot\dot{\vec r}\right) = \frac{d}{dt}\frac{v^2}{2}$,

правая часть — $\dot{\vec r}\cdot\left(-\frac{\mu}{r^3}\vec r\right) = \frac{d}{dt}\frac{\mu}{r}$

$$\Rightarrow \boxed{h = v^2 - \frac{2\mu}{r}} \qquad (2.6)$$

— интеграл энергии;

$h = \text{const}$ — постоянная энергии (удвоенная энергия).

Векторное умножение (2.3) на $\vec r$ дает:

левая часть — $\vec r\times\ddot{\vec r} = \frac{d}{dt}\vec r\times\vec v - \frac{d}{dt}\vec v\times\vec v = \frac{d}{dt}\vec r\times\vec v$

(так как $\vec v\times\vec v = \vec 0$),

правая часть — $\vec r\times\left(-\frac{\mu}{r^3}\vec r\right) = -\frac{\mu}{r^3}\vec r\times\vec r = \vec 0$

$$\Rightarrow \boxed{\vec c = \vec r\times\vec v} \qquad (2.7)$$

— угловой момент, интеграл площадей;

$\vec c = \text{const}$ — постоянная площадей, постоянный вектор углового момента;

$\vec r\cdot\vec c = 0$ $\Rightarrow$ движение является плоским

Вектор $\vec c$ ортогонален плоскости орбиты

Векторное умножение (2.3) на $\vec c$ дает:

левая часть — $\ddot{\vec r}\times\vec c = \frac{d}{dt}\left(\vec v\times\vec c\right)$

правая часть — $-\frac{\mu}{r^3}\vec r\times\vec c = -\frac{\mu}{r^3}\vec r\times\left(\vec r\times\vec v\right) = -\frac{\mu}{r^3}\left(\vec r r\dot r - \vec v r^2\right) =$

$$= \mu\left(-\frac{\vec r}{r^2}\dot r + \frac{\dot{\vec r}}{r}\right) = \frac{d}{dt}\left(\mu\frac{\vec r}{r}\right)$$

(так как $\vec r\cdot\vec v = r\dot r$)

$$\Rightarrow \boxed{\vec l = -\mu\frac{\vec r}{r} + \vec v\times\vec c} \qquad (2.8)$$

— интеграл Лапласа;

$\vec l = \text{const}$ — вектор Лапласа, расположенный в плоскости орбиты.

Связи между первыми интегралами:

$$\boxed{\vec c\cdot\vec l = 0} \qquad (2.9)$$

$$\boxed{l^2 = \mu^2 + c^2 h} \qquad (2.10)$$

где $l = \left|\vec{l}\right|$, $c = \left|\vec{c}\right|$

$\Rightarrow$ интегралы h, $\vec{c}$, $\vec{l}$ дают 5 независимых постоянных.
Обозначим

$$H = \frac{h}{2}.$$

В силу (2.5), (2.6)

$$\boxed{\dot{\vec{r}} = \frac{\partial H}{\partial \vec{v}}, \ \dot{\vec{v}} = -\frac{\partial H}{\partial \vec{r}}} \qquad (2.11)$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\frac{h}{2} \text{ – гамильтониан, а (2.11) является канонической формой уравнений движения}}$

2.4. Типы орбит

Умножим скалярно вектор Лапласа на радиус-вектор:

$\vec{l}\cdot\vec{r} = lr\cos\vartheta$ (ϑ — угол между $\vec{l}$ и $\vec{r}$).

Из (2.8) получим

$$\vec{l}\cdot\vec{r} = -\mu r + c^2 \Rightarrow r = \frac{c^2}{\mu + l\cos\vartheta}.$$

Определим следующие параметры с учетом (2.10):

$$p = \frac{c^2}{\mu} \qquad (2.12)$$

— <u>фокальный параметр</u>,

$$e = \frac{l}{\mu} = \sqrt{1 + \frac{c^2}{\mu^2}h} \qquad (2.13)$$

— <u>эксцентриситет</u>,

ϑ — <u>истинная аномалия</u>

$$\Rightarrow \boxed{r = \frac{p}{1 + e\cos\vartheta}} \qquad (2.14)$$

Уравнение (2.14) описывает коническое сечение в полярных координатах и дает обобщенный 1-й закон Кеплера:

2. Задача двух тел

$$\boxed{\begin{array}{ll} e<1 & \text{– эллиптические орбиты,} \\ e=1 & \text{– параболические орбиты,} \\ e>1 & \text{– гиперболические орбиты} \end{array}} \qquad (2.15)$$

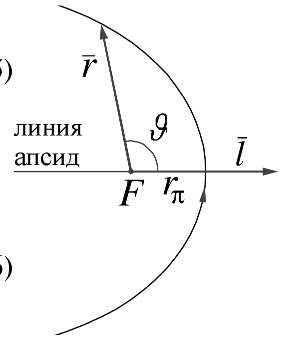


Рис. 2.4

Так как $l \geqslant 0$, то $e \geqslant 0$.

Пусть $\vartheta = 0$; тогда

$$\boxed{r = r_\pi = \frac{p}{1+e}} \qquad (2.16)$$

— <u>радиус перицентра</u>.

Вектор $\vec{l}$ направлен в перицентр вдоль <u>линии апсид</u> (рис. 2.4)

Из (2.7)

$$c = rv\sin\varphi = rv_n = r^2\dot{\vartheta} \qquad (2.17)$$

(рис. 2.5);

$$dS = \frac{r\cdot rd\vartheta}{2} = \frac{cdt}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{S = \frac{c}{2}\left(t_2 - t_1\right)} \qquad (2.18)$$

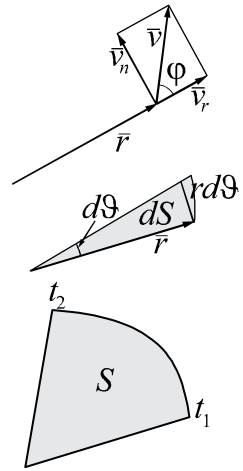


Рис. 2.5

Уравнение (2.18) дает 2-й закон Кеплера.

2.5. Энергетическая классификация орбит

Из (2.11), (2.13), (2.16) получим (рис. 2.6)

$$v_r = \dot{r} = \frac{pe\sin\vartheta}{\left(1+e\cos\vartheta\right)^2}\dot{\vartheta} = \sqrt{\frac{\mu}{p}}\cdot e\sin\vartheta \qquad (2.19)$$

— радиальная скорость;

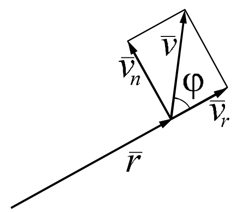


Рис. 2.6

Из (2.17)

$$v_n = \frac{c}{r} = \sqrt{\frac{\mu}{p}}\left(1 + e\cos\vartheta\right) \qquad (2.20)$$

— трансверсальная скорость,

$$v^2 = v_r^2 + v_n^2 = \frac{\mu}{p}\left(1 + e^2 + 2e\cos\vartheta\right) \tag{2.21}$$

$\Rightarrow$ уравнение (2.6) с учетом (2.14), (2.21) дает

$$h = v^2 - \frac{2\mu}{r} = \frac{\mu}{p}\left[1 + e^2 + 2e\cos\vartheta - 2\left(1 + e\cos\vartheta\right)\right] = -\frac{\mu}{p}\left(1 - e^2\right) \tag{2.22}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{ll} h < 0 \left(\text{т. е. } v^2 < \dfrac{2\mu}{r}\right) & – \text{ эллиптические орбиты,} \\ h = 0 \left(\text{т. е. } v^2 = \dfrac{2\mu}{r}\right) & – \text{ параболические орбиты,} \\ h > 0 \left(\text{т. е. } v^2 > \dfrac{2\mu}{r}\right) & – \text{ гиперболические орбиты} \end{array}} \tag{2.23}$$

3. ТИПЫ И ЭЛЕМЕНТЫ ОРБИТ

3.1. Используемые в главе формулы

В данной главе будут использоваться следующие орбитальные параметры и их значения, полученные в главе 2:

$$h = v^2 - \frac{2\mu}{r} = -\frac{\mu}{p}\left(1 - e^2\right) \text{ — интеграл энергии,} \tag{3.1а}$$

$$\vec{c} = \vec{r} \times \vec{v} \text{ — интеграл площадей,} \tag{3.1б}$$

$$c = \left|\vec{c}\right| = \sqrt{\mu p} = r v_n = r^2\dot{\vartheta}\,, \tag{3.1в}$$

$$\vec{l} = -\mu\frac{\vec{r}}{r} + \vec{v} \times \vec{c} \text{ — интеграл Лапласа,} \tag{3.1г}$$

$$l = \left|\vec{l}\right| = \mu e\,,$$

$$p = \frac{c^2}{\mu} \text{ — фокальный параметр,} \tag{3.1д}$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{c^2}{\mu^2}h} \text{ — эксцентриситет,} \tag{3.1е}$$

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\vartheta} \text{ — радиус орбиты,} \tag{3.1ж}$$

$$r_\pi = \frac{p}{1 + e} \text{ — радиус перицентра,} \tag{3.1з}$$

$$v_r = \dot{r} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} \cdot e\sin\vartheta \text{ — радиальная скорость,} \tag{3.1и}$$

$$v_n = \frac{c}{r} = \sqrt{\frac{\mu}{p}}\left(1 + e\cos\vartheta\right) \text{ — трансверсальная скорость.} \tag{3.1к}$$

3.2. Эллиптические орбиты

Эллиптические орбиты (рис. 3.1) характеризуются следующими неравенствами (см. главу 2):

$$\boxed{e < 1,\ h < 0,\ v^2 < \frac{2\mu}{r}}$$

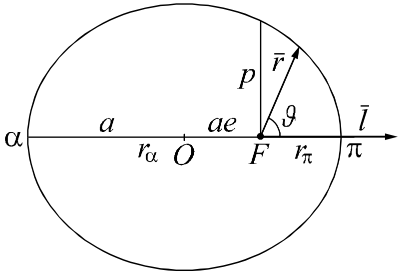


Рис. 3.1

Рассмотрим следующие значения истинной аномалии:

$$\vartheta = 0 \Rightarrow r_\pi = F\pi = \frac{p}{1+e}$$

— радиус перицентра,

$$\vartheta = \pi \Rightarrow r_\alpha = F\alpha = \frac{p}{1-e}$$

— радиус апоцентра

(см. (3.1ж) и рис. 3.1); $r_\pi \leqslant r \leqslant r_\alpha$. Соотношение (3.1ж) также дает

$$\vartheta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow r = p\,.$$

Введем еще один орбитальный параметр:
$a = O\pi = O\alpha$ — большая полуось, средний радиус:

$$\boxed{a = \frac{r_\pi + r_\alpha}{2} = \frac{p}{1-e^2}} \tag{3.2}$$

$$\Rightarrow \boxed{h = -\frac{\mu}{a},\ v^2 = \frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a}} \tag{3.3}$$

Круговая орбита:
$e = 0$, $r = a = p$,

$$v = \sqrt{\frac{\mu}{a}}$$ — круговая скорость.

Время полета

Угол E, показанный на рис. 3.2, — эксцентрическая аномалия;

$$r\sin\vartheta = a\sin E\sqrt{1-e^2},$$
$$a\cos E - r\cos\vartheta = ae$$

$$\Rightarrow\ r = \sqrt{a^2\sin^2 E\left(1-e^2\right) + \left(a\cos E - ae\right)^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{r = a\left(1 - e\cos E\right)} \tag{3.4}$$

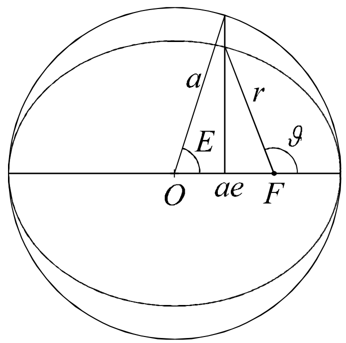


Рис. 3.2

Сравнивая r в (3.1ж) и (3.4) и принимая во внимание (3.2), получим

$$\cos\vartheta = \frac{\cos E - e}{1 - e\cos E}\,. \tag{3.5}$$

Соотношение (3.5) с учетом равенства $\cos\alpha = \dfrac{1-\mathrm{tg}^2\,\alpha/2}{1+\mathrm{tg}^2\,\alpha/2}$, справедливого для любого α, дает

$$\boxed{\mathrm{tg}\frac{\vartheta}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,\mathrm{tg}\frac{E}{2}} \tag{3.6}$$

Принимая во внимание (3.5) и равенство $2\cos^2\alpha/2 = 1 + \cos\alpha$, найдем из (3.6):

$$\dot\vartheta = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1 - e\cos E}\dot E\,. \tag{3.7}$$

С другой стороны, из (3.1в), (3.4) можно получить:

$$a^2\left(1 - e\cos E\right)^2\dot\vartheta = \sqrt{\mu p}$$

$\Rightarrow$ используя (3.2), имеем

$$\frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}}\left(1 - e\cos E\right)\dot E = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{t - t_\pi = \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}}\left(E - e\sin E\right)} \text{ — уравнение Кеплера,} \tag{3.8}$$

где t_π — время прохождения перицентра.

Период орбиты соответствует значению $E = 2\pi \Rightarrow$ из (3.8)

$$\boxed{P = 2\pi\frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}} \text{ – орбитальный период}} \tag{3.9}$$

Уравнение (3.9) дает 3-й закон Кеплера:

$$\frac{P_1^2}{P_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}\,.$$

Обозначим

$n = \dfrac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}}$ — <u>среднее движение,</u>

$M = n\left(t - t_\pi\right)$ — <u>средняя аномалия</u>

$$\Rightarrow \quad \boxed{M = E - e\sin E \; - \text{ уравнение Кеплера}} \qquad (3.10)$$

Предположим, что $\tau = t - t_\pi$ задано $\Rightarrow M$ также задана. Значение E в (3.10) может быть найдено методом Ньютона–Рафсона (см. главу 1).

$$\frac{d}{dE}\left(E - e\sin E\right) = 1 - e\cos E$$

$\Rightarrow$ на n-й итерации

$$E_n = E_{n-1} - \frac{E_{n-1} - e\sin E_{n-1} - M}{1 - e\cos E_{n-1}} \quad (n = 0, 1, \ldots). \qquad (3.11)$$

В качестве начального приближения процедуры (3.11) может быть принято значение

$E_0 = 0$ или $E_0 = M$.

3.3. Параболические орбиты

Параболические орбиты (рис. 3.3) задаются следующими значениями орбитальных параметров (см. главу 2):

$$\boxed{e = 1, \; h = 0, \; v^2 = \frac{2\mu}{r}}$$

Если $\vartheta \to \pi$ или $\vartheta \to -\pi$ в (3.1ж), то

$r \to \infty \;\Rightarrow\; v \to 0$.

Из (3.1ж) также следует, что

$r_\pi = \dfrac{p}{2}$.

Далее,

$$\boxed{a = \frac{p}{1 - e^2} = \infty}$$

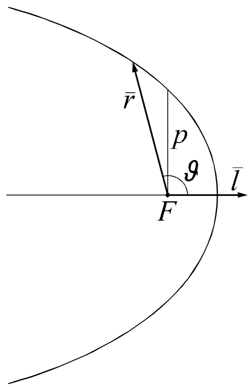


Рис. 3.3

$$v_p = \sqrt{\frac{2\mu}{r}} \; - \text{параболическая скорость} \qquad (3.12)$$

Время полета

Из (3.1в), (3.1ж) получим

$$\frac{p^2\dot{\vartheta}}{\left(1 + \cos\vartheta\right)^2} = \sqrt{\mu p} \;\Rightarrow\; \frac{p^{3/2}}{\sqrt{\mu}} \frac{d\vartheta}{\left(1 + \cos\vartheta\right)^2} = dt$$

$$\Rightarrow \quad t - t_\pi = \frac{p^{3/2}}{2\sqrt{\mu}}\left(\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2} + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\frac{\vartheta}{2}\right). \qquad (3.13)$$

Пусть $\tau = t - t_\pi$ задано. Переменная $x = \operatorname{tg}\dfrac{\vartheta}{2}$ может быть найдена из кубического уравнения (3.13) аналитически или методом Ньютона–Рафсона (см. главу 1): на n-й итерации метода

$$x_n = x_{n-1} - \frac{\dfrac{x^3}{3} + x - \dfrac{2\sqrt{\mu}}{p^{3/2}}\left(t - t_\pi\right)}{x^2 + 1} \quad (n = 0, 1, \ldots). \qquad (3.14)$$

В качестве начального приближения итерационной процедуры (3.14) может быть взято значение

$$x_0 = 0 \quad \text{или} \quad x_0 = \frac{2\sqrt{\mu}}{p^{3/2}}\left(t - t_\pi\right) \quad \text{или} \quad x_0 = \left[\frac{6\sqrt{\mu}}{p^{3/2}}\left(t - t_\pi\right)\right]^{1/3}.$$

После нахождения x находим истинную аномалию: $\vartheta = 2\operatorname{arctg} x$.

3.4. Гиперболические орбиты

На гиперболических орбитах выполняются неравенства

$$\boxed{e > 1, \; h > 0, \; v^2 > \frac{2\mu}{r}}$$

Как следует из (3.1ж), существует некоторый предельный угол ϑ_*,

$$\cos\vartheta_* = -\frac{1}{e}, \quad -\vartheta_* < \vartheta < \vartheta_*.$$

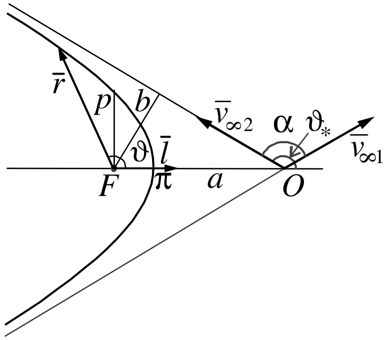


Рис. 3.4

Если $\vartheta \to \vartheta_*$ или $\vartheta \to -\vartheta_*$, то $r \to \infty \Rightarrow v \to v_\infty$,

v_∞ — скорость на бесконечности, асимптотическая скорость

$$\Rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{2\mu}{r} + v_\infty^2} = \sqrt{v_p^2 + v_\infty^2}}$$

где v_p — параболическая скорость. Соотношение (3.1а) дает

$$\boxed{h = v_\infty^2} \qquad (3.15)$$

Расстояние b от притягивающего центра до асимптоты — прицельная дальность (рис. 3.4). Согласно (3.1в)

$$bv_\infty = c = \sqrt{\mu p}$$

и из (3.1а), (3.15) получим

$$b = \frac{p}{\sqrt{e^2 - 1}}. \qquad (3.16)$$

Рассмотрим величину $a = O\pi$ (рис. 3.4):

$$a = \frac{b}{\sin \vartheta_*} - r_\pi = \frac{be}{\sqrt{e^2 - 1}} - r_\pi.$$

Окончательно с учетом (3.1з), (3.16) получим

$$\boxed{a = \frac{p}{e^2 - 1}} \qquad (3.17)$$

$$\Rightarrow \boxed{h = \frac{\mu}{a} = v_\infty^2,\ v^2 = \frac{2\mu}{r} + \frac{\mu}{a}} \qquad (3.18)$$

Пусть α — угол между входящей ($\vec{v}_{\infty 1}$) и исходящей ($\vec{v}_{\infty 2}$) скоростями на бесконечности (угол поворота) (см. рис. 3.4), $|\vec{v}_{\infty 1}| = |\vec{v}_{\infty 2}| = v_\infty$.

$$\frac{\alpha}{2} = \vartheta_* - \frac{\pi}{2},\ \cos \vartheta_* = -\frac{1}{e} \Rightarrow \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{e}$$

$$c^2 = r_\pi^2 v_\pi^2 = r_\pi^2 \left(\frac{2\mu}{r_\pi} + v_\infty^2 \right),\ h = v_\infty^2$$

$\Rightarrow$ согласно (3.1е)

$$e = \sqrt{1 + \frac{c^2}{\mu^2} h} = 1 + \frac{r_\pi v_\infty^2}{\mu}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{1 + \frac{r_\pi v_\infty^2}{\mu}}} \qquad (3.19)$$

Время полета

$e > 1 \Rightarrow$ в (3.7)

$$\dot{\vartheta} = \frac{\sqrt{e^2 - 1}}{1 - e \cos E} i\dot{E},\ \boxed{i = \sqrt{-1}} \qquad (3.20)$$

Определим новую переменную H:

$$E = iH,\ H = -iE$$

$\Rightarrow$ с учетом равенств $\cos iH = \operatorname{ch} H$, $\sin iH = -i \operatorname{sh} H$ из (3.6), (3.20) получим

$$\boxed{\operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} \operatorname{th} \frac{H}{2}} \qquad (3.21)$$

$$\dot{\vartheta} = \frac{\sqrt{e^2 - 1}}{e \operatorname{ch} H - 1} \dot{H}.$$

Согласно (3.2) и (3.17) заменим a на $-a$ в (3.4), (3.8):

$$\boxed{r = a(e \operatorname{ch} H - 1)} \qquad (3.22)$$

$$\boxed{t - t_\pi = \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}} (e \operatorname{sh} H - H)} \qquad (3.23)$$

— уравнение Кеплера для гиперболических орбит.

Пусть $\tau = t - t_\pi$ задано. Подобно тому, как это было сделано для эллиптических орбит (см. (3.11)), получим

$$H_n = H_{n-1} - \frac{e\,\mathrm{sh}\,H_{n-1} - H_{n-1} - \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}}\tau}{e\,\mathrm{ch}\,H_{n-1} - 1} \quad (n = 0, 1, \ldots). \tag{3.24}$$

3.5. Вычисление положения и скорости на орбите (вектора состояния) на заданное время

Постановка задачи нахождения вектора состояния:

Начальный вектор состояния $\vec{x}_0 = \vec{x}(t_0) = \begin{bmatrix} \vec{r}_0 \\ \vec{v}_0 \end{bmatrix}$ задан.

Задача заключается в нахождении вектора $\vec{x} = \vec{x}(t) = \begin{bmatrix} \vec{r} \\ \vec{v} \end{bmatrix}$ на заданное время t.

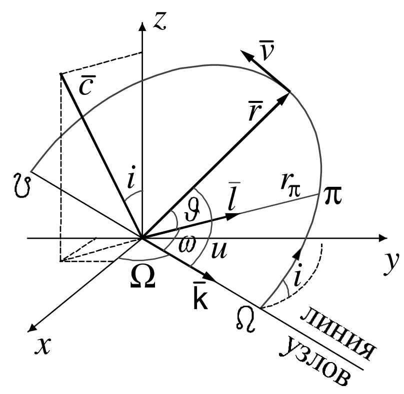


Рис. 3.5

Обозначим (рис. 3.5):
☊ — восходящий узел,
☋ — нисходящий узел,
Ω — долгота восходящего узла,
ω — аргумент перицентра,
$u = \omega + \vartheta$ — аргумент широты,
i — наклонение.

Углы Ω, ω, i являются постоянными и могут быть найдены из $\vec{r}_0$, $\vec{v}_0$ по формулам:

$$\left.\begin{aligned} &\cos i = \frac{c_z}{c}, \\ &\sin\Omega = \frac{c_x}{\sqrt{c_x^2 + c_y^2}}, \ \cos\Omega = -\frac{c_y}{\sqrt{c_x^2 + c_y^2}}, \\ &\sin\omega = \frac{\left|\vec{l} \times \vec{k}\right|}{\mu e}, \ \cos\omega = \frac{\vec{l} \cdot \vec{k}}{\mu e} \end{aligned}\right\} \tag{3.25}$$

(см. рис. 3.5), где $\vec{k} = \left\{\cos\Omega,\ \sin\Omega, 0\right\}$ и $\vec{c}$, $\vec{l}$ заданы в (3.1б), (3.1г) с $\vec{r}$, $\vec{v}$, замененными на $\vec{r}_0$, $\vec{v}_0$.

Истинная аномалия ϑ может быть найдена из (3.6), (3.8) для эллиптических орбит, из (3.13) для параболических орбит и из (3.21), (3.23) для гиперболических орбит.

Из геометрических соображений получим единичные векторы радиального и трансверсального направлений

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{r}^{\,0} &= \begin{bmatrix} \cos\Omega\cos u - \sin\Omega\sin u\cos i \\ \sin\Omega\cos u + \cos\Omega\sin u\cos i \\ \sin u\sin i \end{bmatrix}, \\ \vec{n}^{\,0} &= \begin{bmatrix} -\cos\Omega\sin u - \sin\Omega\cos u\cos i \\ -\sin\Omega\sin u + \cos\Omega\cos u\cos i \\ \cos u\sin i \end{bmatrix} \end{aligned}} \tag{3.26}$$

Теперь могут быть найдены координаты и скорости на орбите:

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{r} &= r\vec{r}^{\,0}, \\ \vec{v} &= v_r\vec{r}^{\,0} + v_n\vec{n}^{\,0} \end{aligned}} \tag{3.27}$$

где r, v_r, v_n даны в (3.1ж), (3.1и), (3.1к).

3.6. Элементы орбиты

Набор элементов орбиты, полностью определяющий орбиту:

a, e, i, Ω, ω, t_π

Другие варианты:
вместо a: r_π, p, h, P, n;
вместо e, ω: $e\cos\omega$, $e\sin\omega$;
вместо t_π: $t - t_\pi$, M (для эллиптических орбит), ϑ, u.

Ниже дана сводка формул для вычисления различных элементов орбиты по координатам и скоростям.

$$a=\frac{\mu}{|h|}=\frac{1}{\left|\frac{2}{r}-\frac{v^2}{\mu}\right|},\ e=\sqrt{1+\frac{c^2}{\mu^2}h}=\sqrt{1+\frac{r^2v^2-\left(\vec r\cdot\vec v\right)^2}{\mu^2}\left(v^2-\frac{2\mu}{r}\right)},$$

$$\cos i=\frac{c_z}{c}=\frac{xv_y-yv_x}{\sqrt{r^2v^2-\left(\vec r\cdot\vec v\right)^2}},\ \mathrm{tg}\,\Omega=-\frac{c_x}{c_y}=\frac{zv_y-yv_z}{zv_x-xv_z},$$

$$\cos\omega=\frac{\vec l\cdot\vec k}{\mu e},\ \vec l=-\mu\frac{\vec r}{r}+\vec v\times\left(\vec r\times\vec v\right),\ \vec k=\begin{bmatrix}\cos\Omega\\ \sin\Omega\\ 0\end{bmatrix},$$

$$t-t_\pi=\begin{cases}\dfrac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}}\left(E-e\sin E\right) & \text{– для эллиптических орбит,}\\ \dfrac{p^{3/2}}{2\sqrt{\mu}}\left(\mathrm{tg}\dfrac{\vartheta}{2}+\dfrac{1}{3}\mathrm{tg}^3\dfrac{\vartheta}{2}\right) & \text{– для параболических орбит,}\\ \dfrac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}}\left(e\,\mathrm{sh}\,H-H\right) & \text{– для гиперболических орбит,}\end{cases}$$

$$\mathrm{tg}\frac{E}{2}=\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\,\mathrm{tg}\frac{\vartheta}{2},\ \mathrm{th}\frac{H}{2}=\sqrt{\frac{e-1}{e+1}}\,\mathrm{tg}\frac{\vartheta}{2},$$

$$p=\frac{c^2}{\mu}=\frac{r^2v^2-\left(\vec r\cdot\vec v\right)^2}{\mu},\ r_\pi=\frac{p}{1+e},\ P=2\pi\frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}},\ n=\frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}},$$

$$M=\frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}}\left(t-t_\pi\right),\ \cos\vartheta=\frac{1}{e}\left(\frac{p}{r}-1\right),\ u=\omega+\vartheta$$

4. УНИВЕРСАЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ КЕПЛЕРОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ

4.1. Вводные замечания

Подход к вычислению кеплеровского движения, рассмотренный в главе 3, имеет следующие недостатки:

- используются разные формулы для разных типов орбит;
- для нахождения орбитальных параметров на заданное время недостаточно значений t_0, t, необходимо вычислять также t_π и соответствующие параметры;
- формулы не могут применяться для околопараболических орбит, т. е. при очень больших значениях a.

В данной главе будут получены универсальные формулы, лишенные этих недостатков. Ниже будут использоваться следующие соотношения, полученные в главах 2, 3:

$$h=v^2-\frac{2\mu}{r}, \tag{4.1а}$$

$$\vec c=\vec r\times\vec v, \tag{4.1б}$$

$$c^2=\vec c\cdot\vec c=r^2v^2-\left(\vec r\cdot\vec v\right)^2, \tag{4.1в}$$

$$\vec l=-\mu\frac{\vec r}{r}+\vec v\times\vec c. \tag{4.1г}$$

Эллиптические орбиты:

$$t-t_\pi=\frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}}\left(E-e\sin E\right), \tag{4.1д}$$

$$r=a\left(1-e\cos E\right). \tag{4.1е}$$

Гиперболические орбиты:

$$t-t_\pi=\frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}}\left(e\,\mathrm{sh}H-H\right), \tag{4.1ж}$$

$$r=a\left(e\,\mathrm{ch}H-1\right). \tag{4.1з}$$

4.2. Функции Штумпфа и их свойства

Функции Штумпфа:

$$\boxed{c_n = c_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-x)^m}{(2m+n)!} \ (n = 0, 1, 2, \ldots)} \tag{4.2}$$

Из (4.2):

$$c_n = \frac{1}{n!} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-x)^m}{(2m+n)!} = \frac{1}{n!} - x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^k}{(2k+n+2)!} \quad (k = m-1)$$

$$\Rightarrow \boxed{c_n = \frac{1}{n!} - x\, c_{n+2}} \tag{4.3}$$

$\Rightarrow$ если требуется c_n для $n_1 \leqslant n \leqslant n_2$, достаточно найти c_{n_2-1}, c_{n_2} (или c_{n_1}, c_{n_1+1} если $x \neq 0$).

Также из (4.2):

$$\frac{dc_n}{dx} = -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m(-x)^{m-1}}{(2m+n)!} = -\frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(2m+n)(-x)^{m-1}}{(2m+n)!} + \frac{n}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-x)^{m-1}}{(2m+n)!} =$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^k}{(2k+n+1)!} + \frac{n}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-x)^k}{(2k+n+2)!} \quad (k = m-1)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dc_n}{dx} = \frac{nc_{n+2} - c_{n+1}}{2}} \tag{4.4}$$

Используя равенства

$$\cos y = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-y)^{2m}}{(2m)!}, \ \sin y = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-y)^{2m+1}}{(2m+1)!},$$

$$\operatorname{ch} y = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{y^{2m}}{(2m)!}, \ \operatorname{sh} y = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{y^{2m+1}}{(2m+1)!},$$

получим из (4.2) конечные выражения для некоторых функций Штумпфа, данные в табл. 4.1.

Таблица 4.1. Конечные выражения для функций Штумпфа

	$x > 0$	$x < 0$
c_0	$\cos\sqrt{x}$	$\operatorname{ch}\sqrt{-x}$
c_1	$\dfrac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$	$\dfrac{\operatorname{sh}\sqrt{-x}}{\sqrt{-x}}$
c_2	$\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{x}$	$\dfrac{\operatorname{ch}\sqrt{-x}-1}{-x}$
c_3	$\dfrac{\sqrt{x}-\sin\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}$	$\dfrac{\operatorname{sh}\sqrt{-x}-\sqrt{-x}}{-x\sqrt{-x}}$

Другие соотношения между функциями Штумпфа

Из табл. 4.1 можно получить, что

$$c_1^2 - c_0 c_2 = c_2\,. \tag{4.5}$$

Уравнения (4.3), (4.5) дают

$$\begin{aligned} &c_2^2 - c_1 c_3 = c_3 - 2c_4, \\ &c_3^2 - c_2 c_4 = \frac{c_4}{2} - 2c_5 + 2c_6. \end{aligned} \tag{4.6}$$

4.3. Универсальная формула для времени полета

Определим универсальную переменную s (фиктивное время, обобщенная эксцентрическая аномалия) уравнением

$$\boxed{\dot{s} = \frac{1}{r}, \ s(t_0) = 0} \tag{4.7}$$

Заметим, что

$$\boxed{s > 0, \text{ если } t > t_0} \tag{4.8}$$

С учетом интеграла энергии (4.1а) и равенства $v^2 = \vec{v} \cdot \vec{v}$, из (4.7) получим

$$s = \int_{t_0}^{t} \frac{dt}{r} = \frac{1}{2\mu} \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{v} \cdot d\vec{r} - \frac{h(t - t_0)}{2\mu},$$

$$\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{v} \cdot d\vec{r} = \vec{r} \cdot \vec{v} - \vec{r}_0 \cdot \vec{v}_0 - \int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}} \vec{r} \cdot d\vec{v} = \vec{r} \cdot \vec{v} - \vec{r}_0 \cdot \vec{v}_0 + \mu \int_{t_0}^{t} \frac{dt}{r}$$

$$\Rightarrow \quad s = \frac{\vec{r} \cdot \vec{v} - \vec{r}_0 \cdot \vec{v}_0 - h\tau}{\mu}, \tag{4.9}$$

где

$$\tau = t - t_0 . \tag{4.10}$$

Из (4.1д), (4.1ж):

$$1 = \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}} (1 - e \cos E) \dot{E} = \sqrt{\frac{a}{\mu}} \cdot r \dot{E},$$

$$1 = \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}} (e \operatorname{ch} H - 1) \dot{H} = \sqrt{\frac{a}{\mu}} \cdot r \dot{H}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{E} = \dot{H} = \sqrt{\frac{\mu}{a}} \frac{1}{r} = \sqrt{\frac{\mu}{a}} \cdot \dot{s}, \quad E(t_0) = E_0, \quad H(t_0) = H_0 \tag{4.11}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{s = \begin{cases} \sqrt{\frac{a}{\mu}} (E - E_0) & \text{для эллиптических орбит,} \\ \sqrt{\frac{a}{\mu}} (H - H_0) & \text{для гиперболических орбит} \end{cases}} \tag{4.12}$$

Определим переменную

$$\boxed{x = -hs^2} \tag{4.13}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{E - E_0 = \sqrt{x}, \ H - H_0 = \sqrt{-x}} \tag{4.14}$$

Рассмотрим эллиптические орбиты; уравнения (4.1е), (4.11) дают

$$\dot{r} = ae \sin E \, \dot{E} = \frac{\sqrt{\mu a} \, e \sin E}{r}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{r} \cdot \vec{v} = r\dot{r} = \sqrt{\mu a} \cdot e \sin E . \tag{4.15}$$

Из (4.14):

$$\sin E = \sin\left(E_0 + \sqrt{x}\right) = \sin E_0 \cos\sqrt{x} + \cos E_0 \sin\sqrt{x} \tag{4.16}$$

$\Rightarrow$ из уравнения (4.9) с учетом (4.14), (4.15) и равенства $e \cos E_0 = 1 - \frac{r_0}{a}$ (см. (4.1е)) найдем

$$\tau = \frac{\vec{r} \cdot \vec{v} - \vec{r}_0 \cdot \vec{v}_0 - \mu s}{h} = \frac{\vec{r}_0 \cdot \vec{v}_0 \left(1 - \cos\sqrt{x}\right) - \sqrt{\mu a}\left(1 - \frac{r_0}{a}\right) \sin\sqrt{x} + \mu s}{-hs^2} s^2 . \tag{4.17}$$

Уравнения (4.17), (4.3), (4.13) и табл. 4.1 дают

$$\boxed{\tau = r_0 s c_1 + \vec{r}_0 \cdot \vec{v}_0 \, s^2 c_2 + \mu s^3 c_3} \tag{4.18}$$

— <u>универсальное уравнение Кеплера</u>.

Пользуясь равенством $\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\dot{s}}$, из (4.7), (4.10) получим

$$r = \frac{d\tau}{ds} . \tag{4.19}$$

Из (4.4) и равенства $\frac{dx}{ds} = 2\frac{x}{s}$ следует, что

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\left(s^n c_n\right) &= n s^{n-1} c_n + s^n \frac{n c_{n+2} - c_{n+1}}{2} \frac{dx}{ds} = \\ &= n s^{n-1} c_n + s^{n-1}\left[n\left(\frac{1}{n!} - c_n\right) - \frac{1}{(n-1)!} + c_{n-1}\right] = s^{n-1} c_{n-1} \end{aligned} \tag{4.20}$$

$\Rightarrow$ из (4.18)–(4.20) получим

$$\boxed{r = r_0 c_0 + \vec{r}_0 \cdot \vec{v}_0 \, s c_1 + \mu s^2 c_2} \tag{4.21}$$

4.4. Решение универсального уравнения Кеплера

Предположим, что τ задано, и используем метод Ньютона–Рафсона (см. главу 1) для нахождения s из (4.18). Используя (4.18), (4.19), (4.21), на n-й итерации получим

$$s_n = s_{n-1} - \frac{r_0 s c_1 + \vec{r}_0 \cdot \vec{v}_0 \, s^2 c_2 + \mu s^3 c_3 - \tau}{r_0 c_0 + \vec{r}_0 \cdot \vec{v}_0 \, s c_1 + \mu s^2 c_2} \quad (n = 0, 1, \ldots)\,. \tag{4.22}$$

С учетом (4.8), (4.9) начальное приближение может быть задано следующими значениями:

$$s_0 = 0 \quad \text{или} \quad s_0 = -\frac{h\tau}{\mu} \quad (\text{если } h < 0).$$

4.5. Вычисление положения и скорости на орбите (вектора состояния) на заданное время

Представим векторы положения $\vec{r} = \vec{r}(t)$ и скорости $\vec{v} = \vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}$ в виде

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{r} &= f\vec{r}_0 + g\vec{v}_0, \\ \vec{v} &= \dot{f}\vec{r}_0 + \dot{g}\vec{v}_0 \end{aligned}} \tag{4.23}$$

Для нахождения *f*, *g* умножим скалярно и векторно первое из уравнений (4.23) на вектор Лапласа

$$\vec{l} = -\mu\frac{\vec{r}}{r} + \vec{v} \times \vec{c} = -\mu\frac{\vec{r}_0}{r_0} + \vec{v}_0 \times \vec{c}$$

с использованием соотношений

$$\vec{l} \cdot \vec{r} = c^2 - \mu r\,, \quad \vec{l} \cdot \vec{v} = -\mu\frac{\vec{r} \cdot \vec{v}}{r} = -\mu\dot{r}\,,$$

$$\vec{l} \times \vec{r} = \left(\vec{v} \times \vec{c}\right) \times \vec{r} = \left(\vec{r} \cdot \vec{v}\right)\vec{c}\,,$$

$$\vec{l} \times \vec{v} = -\frac{\mu}{r}\vec{r} \times \vec{v} + \left(\vec{v} \times \vec{c}\right) \times \vec{v} = \left(v^2 - \frac{\mu}{r}\right)\vec{c}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} c^2 - \mu r &= f\left(c^2 - \mu r_0\right) - g\mu\dot{r}_0, \\ \vec{r} \cdot \vec{v} &= f\vec{r}_0 \cdot \vec{v}_0 + g\left(v^2 - \frac{\mu}{r_0}\right). \end{aligned}\right\} \tag{4.24}$$

Из (4.24) с учетом (4.18), (4.21) можно получить

$$\boxed{f = 1 - \frac{\mu s^2 c_2}{r_0}, \;\; g = \tau - \mu s^3 c_3} \tag{4.25}$$

Уравнения (4.20), (4.7) дают

$$\frac{d}{dt}\left(s^n c_n\right) = \frac{d}{ds}\left(s^n c_n\right)\dot{s} = \frac{s^{n-1} c_{n-1}}{r}$$

$\Rightarrow$ из (4.25) получим

$$\boxed{\dot{f} = -\frac{\mu s c_1}{r_0 r}, \;\; \dot{g} = 1 - \frac{\mu s^2 c_2}{r}} \tag{4.26}$$

5. ВОЗМУЩЕНИЯ ОРБИТЫ

5.1. Используемые в главе формулы

В этой главе будут использованы следующие соотношения:

$$\vec{c} = \vec{r} \times \vec{v}\ ,\ c = \left|\,\vec{c}\,\right| = r v_n = \sqrt{\mu p}\ , \tag{5.1а}$$

$$p = a\left(1 - e^2\right) = \frac{c^2}{\mu} = \frac{r^2 v_n^2}{\mu}, \tag{5.1б}$$

$$e^2 = 1 + \frac{c^2}{\mu^2} h = 1 + \frac{r^2 v_n^2}{\mu^2}\left(v^2 - \frac{2\mu}{r}\right), \tag{5.1в}$$

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\vartheta}\ , \tag{5.1г}$$

$$v^2 = v_r^2 + v_n^2\ , \tag{5.1д}$$

$$v_r = \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin\vartheta\ ,\ v_n = \frac{c}{r} = \sqrt{\frac{\mu}{p}}\left(1 + e\cos\vartheta\right), \tag{5.1е}$$

$$r^2 \dot{\vartheta} = c\ . \tag{5.1ж}$$

5.2. Общие сведения о возмущениях

Невозмущенное движение удовлетворяет уравнению (см. главу 2)

$$\boxed{\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\vec{r}} \tag{5.2}$$

Уравнение возмущенного движения имеет вид

$$\boxed{\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\vec{r} + \vec{\varphi}} \tag{5.3}$$

где $\vec{\varphi} = \vec{\varphi}\left(\vec{r}, \vec{v}, t\right)$ — <u>возмущающее ускорение</u> или <u>возмущение</u>. Обычно

$$\boxed{\varphi = \left|\vec{\varphi}\right| \ll \left|-\frac{\mu}{r^3}\vec{r}\right| = \frac{\mu}{r^2}} \tag{5.4}$$

Типы возмущений:

1. <u>Гравитационные возмущения</u>:
- влияние несферической формы планет;
- притяжение других небесных тел.

Гравитационные возмущения являются <u>консервативными</u>.

2. <u>Негравитационные возмущения</u>:
- сопротивление атмосферы;
- световое давление;
- реактивные возмущения, вызываемые воздействием системы ориентации или утечкой газа с космического аппарата или испарением ядра кометы и т. п.

Другая форма уравнения движения (для вектора состояния):

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}\left(\vec{x}\right) + \vec{g}\left(\vec{x}, t\right), \tag{5.5}$$

$$\boxed{\vec{x} = \begin{bmatrix} \vec{r} \\ \vec{v} \end{bmatrix},\ \vec{f}\left(\vec{x}\right) = \begin{bmatrix} \vec{v} \\ -\dfrac{\mu}{r^3}\vec{r} \end{bmatrix},\ \vec{g} = \vec{g}\left(\vec{x}, t\right) = \begin{bmatrix} \vec{0} \\ \vec{\varphi} \end{bmatrix}} \tag{5.6}$$

Простейший способ решения уравнения (5.5) — численное интегрирование.

5.3. Оскулирующие элементы

Рассмотрим вектор элементов орбиты

$$\boxed{\vec{q} = \vec{q}\left(\vec{x}\right) = \left\{a,\ e,\ i,\ \Omega,\ \omega,\ t_\pi\right\}} \tag{5.7}$$

где вектор состояния $\vec{x}$ удовлетворяет уравнению (5.5). Из (5.7), (5.5) получим

$$\dot{\vec{q}} = \frac{\partial \vec{q}}{\partial \vec{x}}\dot{\vec{x}} = \frac{\partial \vec{q}}{\partial \vec{x}}\left[\vec{f}\left(\vec{x}\right) + \vec{g}\left(\vec{x}, t\right)\right].$$

Если $\vec{g}\left(\vec{x}, t\right) = \vec{0}$ (т. е. движение <u>кеплеровское</u>, <u>невозмущенное</u>), то $\vec{q} = \text{const}$

$$\Rightarrow\ \frac{\partial \vec{q}}{\partial \vec{x}}\vec{f}\left(\vec{x}\right) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow\ \dot{\vec{q}} = \frac{\partial \vec{q}}{\partial \vec{x}}\vec{g}\left(\vec{x}, t\right) \tag{5.8}$$

и, следовательно, в общем случае

$$a=a(t),\quad e=e(t),\quad i=i(t),\quad \Omega=\Omega(t),\quad \omega=\omega(t),\quad t_\pi=t_\pi(t) \tag{5.9}$$

— <u>оскулирующие элементы</u>; соответствующая мгновенная орбита — <u>оскулирующая орбита</u> (рис. 5.1).

Из (5.8), (5.6) получим

$$\boxed{\dot{\vec q}=\frac{\partial\vec q}{\partial\vec v}\vec\varphi} \tag{5.10}$$

— дифференциальное уравнение для оскулирующих элементов.

Определим <u>орбитальную систему координат</u> ξης (рис. 5.2):

— начало в центре масс тела;
— ось ξ направлена вдоль $\vec r$;
— ось η лежит в плоскости, заданной $\vec r$, $\vec v$, и составляет острый угол с $\vec v$;
— ось ζ формирует правую систему координат.

Пусть в этой системе координат

$$\vec\varphi=\left\{S,T,W\right\},\quad \vec v=\left\{v_r,v_n,v_\zeta\right\}, \tag{5.11}$$

где $v_\zeta=0$, $\dot v_\zeta=W$ (см. рис. 5.2 и уравнения (5.1д), (5.1е))

⇒ уравнения (5.10) дают

$$\boxed{\dot{\vec q}=\frac{\partial\vec q}{\partial v_r}S+\frac{\partial\vec q}{\partial v_n}T+\frac{\partial\vec q}{\partial v_\zeta}W} \tag{5.12}$$

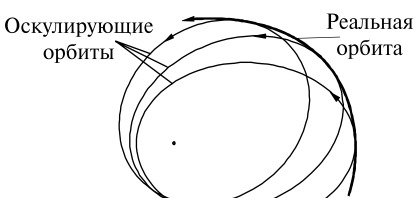


Рис. 5.1

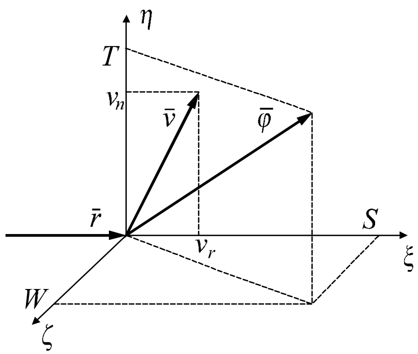


Рис. 5.2

Из (5.1б), (5.1в) следует, что

$$\boxed{\begin{aligned}&\dot a=\sqrt{\frac{p}{\mu}}\frac{2a}{1-e^2}\left(e\sin\vartheta\, S+\frac{p}{r}T\right),\\&\dot e=\sqrt{\frac{p}{\mu}}\left\{\sin\vartheta\, S+\left[\left(1+\frac{r}{p}\right)\cos\vartheta+\frac{r}{p}e\right]T\right\}\end{aligned}} \tag{5.13}$$

Умножим (5.3) векторно на $\vec r$:

$$\vec r\times\ddot{\vec r}=\vec r\times\vec\varphi \tag{5.14}$$

(так как $\vec r\times\vec r=\vec 0$); кроме того,

$$\dot{\vec c}=\frac{d}{dt}\vec r\times\vec v=\dot{\vec r}\times\dot{\vec r}+\vec r\times\ddot{\vec r}=\vec r\times\ddot{\vec r} \tag{5.15}$$

⇒ уравнения (5.14), (5.15) дают

$$\boxed{\dot{\vec c}=\vec r\times\vec\varphi}. \tag{5.16}$$

Из (5.16) с учетом (3.23) можно получить (см. п. 3.5 главы 3):

$$\boxed{\begin{aligned}&\dot i=\sqrt{\frac{p}{\mu}}\frac{r}{p}\cos u\,W,\\&\dot\Omega=\sqrt{\frac{p}{\mu}}\frac{r}{p}\frac{\sin u}{\sin i}W,\\&\dot\omega=\sqrt{\frac{p}{\mu}}\left[-\frac{\cos\vartheta}{e}S+\frac{1}{e}\left(1+\frac{r}{p}\right)\sin\vartheta\, T-\frac{r}{p}\frac{\sin u}{\operatorname{tg} i}W\right]\end{aligned}} \tag{5.17}$$

(здесь $u=\omega+\vartheta$ — аргумент широты).

5.4. Вековые и долгопериодические возмущения

Рассмотрим эллиптические орбиты. Предположим, что функции

$$S=S(\vec q,\vartheta),\quad T=T(\vec q,\vartheta),\quad W=W(\vec q,\vartheta) \tag{5.18}$$

заданы. Тогда в силу (5.7), (5.13), (5.17), (5.18)

$$\dot{\vec q}=\vec\psi(\vec q,\vartheta)$$

является заданной функцией. Уравнение (5.1ж) дает

$$\frac{dt}{d\vartheta}=\frac{1}{\dot{\vartheta}}=\frac{r^2}{\sqrt{\mu p}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\vec{q}}{d\vartheta}=\dot{\vec{q}}\,\frac{dt}{d\vartheta}=\vec{\psi}\left(\vec{q},\vartheta\right)\frac{r^2}{\sqrt{\mu p}}=\vec{\chi}\left(\vec{q},\vartheta\right) \tag{5.19}$$

— заданная функция. Пусть выполняется неравенство (5.4)
$\Rightarrow$ оскулирующие элементы $\vec{q}$ меняются медленно со временем
$\Rightarrow$ можно предположить, что

$\vec{q}=\text{const}$ в $\vec{\chi}\left(\vec{q},\vartheta\right)$ в пределах одного витка, т. е. для $0\leqslant\vartheta\leqslant 2\pi$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Delta\vec{q}\approx\int_0^{2\pi}\vec{\chi}\left(\vec{q},\vartheta\right)d\vartheta} \tag{5.20}$$

— изменение элементов за один виток. Соотношение (5.20) осредняет <u>короткопериодические вариации</u> элементов и дает <u>вековые</u> и <u>долгопериодические вариации</u>:

- вековая вариация монотонно растет со временем;
- долгопериодическая вариация — это периодическая (или почти периодическая) вариация с периодом больше орбитального.

5.5. Гравитационное влияние других небесных тел

Пусть μ_0, μ' — гравитационные параметры центрального (главного) тела и рассматриваемого меньшего тела,

$$\mu=\mu_0+\mu'. \tag{5.21}$$

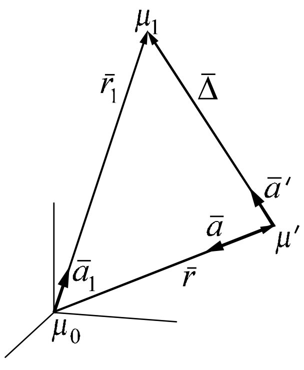


Рис. 5.3

Рассмотрим третье массивное тело с радиус-вектором $\vec{r}_1$ и гравитационным параметром μ_1 и обозначим (рис. 5.3):

$\vec{a}=-\dfrac{\mu}{r^3}\vec{r}$ — главное (центральное) ускорение;

$\vec{a}'=\dfrac{\mu_1}{\Delta^3}\vec{\Delta}$ — ускорение от третьего тела, где $\vec{\Delta}=\vec{r}_1-\vec{r}$, $\Delta=\left|\vec{\Delta}\right|$;

$\vec{a}_1=\dfrac{\mu_1}{r_1^3}\vec{r}_1$ — ускорение начала координат, вызванное третьим телом $\Rightarrow$ $-\vec{a}_1$ — ускорение инерции

$$\Rightarrow \quad \boxed{\ddot{\vec{r}}=-\frac{\mu}{r^3}\vec{r}+\mu_1\left(\frac{\vec{\Delta}}{\Delta^3}-\frac{\vec{r}_1}{r_1^3}\right)} \tag{5.22}$$

Неравенство (5.4) выполняется, если:

1) $\mu_1\ll\mu$;

2) $r\ll r_1$, $r\ll\Delta$.

<u>Примеры</u>

1) μ_0 — Солнце, μ' — Земля, μ_1 — другая планета.

$\mu_1\ll\mu_0<\mu$, $r_1\sim r\sim\Delta$
$\Rightarrow$ (5.4) выполняется.

2) μ_0 — Земля, $\mu'=0$ — спутник Земли, μ_1 — Солнце.

$\mu_1\gg\mu_0=\mu$, но $r\ll r_1$, $r\ll\Delta$
$\Rightarrow$ (5.4) выполняется.

<u>Вариации элементов орбиты</u>

Вариация большой полуоси:

$\Delta a=0$.

Вариации других элементов зависят от положения возмущающего тела по отношению к плоскости орбиты и линии апсид возмущаемого тела.

Вариации эксцентриситета (рис. 5.4):

(а) если проекция возмущающего тела на плоскость орбиты находится в квадрантах I или III, то

$\Delta e<0 \Rightarrow \Delta r_\pi>0$, $\Delta r_\alpha<0$;

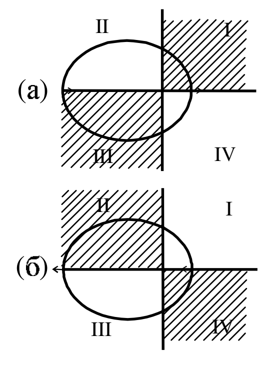


Рис. 5.4

(б) если проекция возмущающего тела на плоскость орбиты находится в квадрантах II или IV, то

$$\Delta e > 0 \Rightarrow \Delta r_{\pi} < 0,\ \Delta r_{\alpha} > 0.$$

5.6. Сфера действия планеты

Обозначим (рис. 5.5):

μ_0, μ_1 — гравитационные параметры Солнца и планеты;

$\vec{r}_0, \vec{r}_1$ — гелиоцентрический и планетоцентрический радиус-векторы тела (μ на рис. 5.5);

$\vec{\rho} = \vec{r}_0 - \vec{r}_1$ — радиус-вектор планеты относительно Солнца.

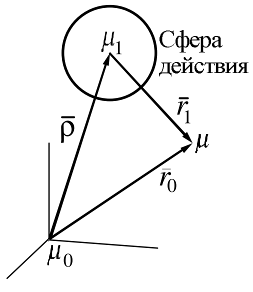


Рис. 5.5

Сравнивая рис. 5.3 и 5.5, из (5.22) получим уравнения движения тела в гелиоцентрической (1) и планетоцентрической (2) системах координат:

$$(1)\quad \ddot{\vec{r}}_0 = \vec{f}_0 + \vec{\varphi}_0,\ \vec{f}_0 = -\frac{\mu_0}{r_0^3}\vec{r}_0,$$

$$\vec{\varphi}_0 = -\mu_1\left(\frac{\vec{r}_1}{r_1^3} + \frac{\vec{\rho}}{\rho^3}\right),$$

$$(2)\quad \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{f}_1 + \vec{\varphi}_1,\ \vec{f}_1 = -\frac{\mu_1}{r_1^3}\vec{r}_1,$$

$$\vec{\varphi}_1 = -\mu_0\left(\frac{\vec{r}_0}{r_0^3} - \frac{\vec{\rho}}{\rho^3}\right).$$

Сфера действия — это поверхность, окружающая планету, на которой $\left|\vec{\varphi}_0\right| / \left|\vec{f}_0\right| = \left|\vec{\varphi}_1\right| / \left|\vec{f}_1\right|$

Радиус R_S сферы действия:

$$\boxed{R_S \approx \rho\left(\frac{\mu_1}{\mu_0}\right)^{2/5}} \qquad (5.23)$$

В табл. 5.1 приводятся радиусы сфер действия планет.

Таблица 5.1. Радиусы сфер действия планет

Планета	R_S, 10^6 км
Меркурий	0,11
Венера	0,62
Земля	0,93
Марс	0,58
Юпитер	48,2
Сатурн	54,6
Уран	51,8
Нептун	87,0
Плутон	3,36

5.7. Влияние сжатия планеты

Обозначим (рис. 5.6):

R_e, R_p — экваториальный и полярный радиусы планеты;

$\alpha = \dfrac{R_e - R_p}{R_e}$ — коэффициент сжатия ($\alpha \ll 1 \Rightarrow \alpha^2 \approx 0$);

$R_0 = R_e\left(1 - \dfrac{\alpha}{3}\right)$ — средний интегральный радиус;

ψ — планетоцентрическая широта.

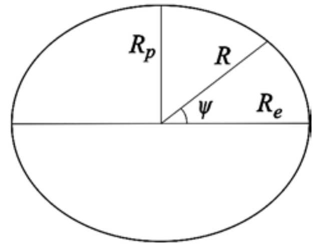


Рис. 5.6

Опорный эллипсоид:

$$\boxed{R = R_e\left(1 - \alpha\sin^2\psi\right) \approx R_0 + \alpha R_0\left(\frac{1}{3} - \sin^2\psi\right)} \qquad (5.24)$$

— радиус эллипсоида на широте ψ. Гравитационный потенциал U планеты равен

$$\boxed{U = \frac{\mu}{r} + U_{pert},\ U_{pert} = \frac{3}{2}J_2\frac{\mu}{r}\left(\frac{R_e}{r}\right)^2\left(\frac{1}{3} - \sin^2\psi\right)} \qquad (5.25)$$

где U_{pert} — возмущающая функция,

$J_2 = \text{const}$

— коэффициент 2-й зональной гармоники.

Возмущающее ускорение

$$\vec{\varphi} = \left(\frac{\partial U_{pert}}{\partial \vec{r}}\right)^T$$

может быть найдено из (5.25) с учетом равенства

$$\sin\psi = \frac{z}{r}.$$

Значения J_2 для планет даны в табл. 5.2.

Таблица 5.2. Значения J_2

Планета	J_2
Меркурий	?
Венера	~ 0
Земля	$1{,}08263 \cdot 10^{-3}$
Марс	$1{,}96 \cdot 10^{-3}$
Юпитер	$1{,}471 \cdot 10^{-2}$
Сатурн	$1{,}667 \cdot 10^{-2}$
Уран	$1{,}3 \cdot 10^{-2}$
Нептун	$5{,}0 \cdot 10^{-2}$
Плутон	?

Вековые возмущения:

$$\boxed{\begin{aligned} &\dot a = \dot e = \dot i = 0, \\ &\dot\Omega = -\frac{3}{2} J_2 n \left(\frac{R_e}{p}\right)^2 \cos i, \\ &\dot\omega = \frac{3}{4} J_2 n \left(\frac{R_e}{p}\right)^2 \left(5\cos^2 i - 1\right) \end{aligned}} \tag{5.26}$$

где p — фокальный параметр, $n = \dfrac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}}$ — среднее движение.

Вариации элементов за один оборот:

$$\boxed{\begin{aligned} &\Delta a = \Delta e = \Delta i = 0, \\ &\Delta\Omega = -3\pi J_2 \left(\frac{R_e}{p}\right)^2 \cos i, \\ &\Delta\omega = \frac{3}{2} \pi J_2 \left(\frac{R_e}{p}\right)^2 \left(5\cos^2 i - 1\right) \end{aligned}} \tag{5.27}$$

Решение уравнения $5\cos^2 i - 1 = 0$: $i = 63{,}4°$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} i < 63{,}4° \Rightarrow \Delta\omega > 0, \\ i > 63{,}4° \Rightarrow \Delta\omega < 0. \end{array}$$

5.8. Влияние сопротивления атмосферы

Сопротивление атмосферы вычисляется по формуле

$$F = c_x S_m \frac{\rho v^2}{2},$$

где c_x — безразмерный баллистический коэффициент (обычно $2 \leqslant c_x \leqslant 2.2$);

S_m — миделевое сечение космического аппарата (КА) (площадь проекции фигуры КА на плоскость, ортогональную вектору скорости);

ρ — плотность атмосферы;

v — скорость КА.

Возмущающее ускорение:

$$\boxed{\vec\varphi = -\frac{F}{m}\frac{\vec v}{v} = -c_x \frac{S_m}{m}\frac{\rho v}{2}\vec v} \tag{5.28}$$

Высокоэллиптическая орбита: сопротивление атмосферы действует как тормозной импульс в перицентре (рис. 5.7)

$\Rightarrow$ $r_\pi \approx \text{const}$, r_α постепенно понижается.

Круговая орбита: высота постепенно понижается (т. е. КА снижается по спиральной орбите).

Вековые вариации элементов:

$\Delta a < 0$, $\Delta e < 0$,

$\Delta i = \Delta\Omega = \Delta\omega = 0$

(здесь не учитывается вращение атмосферы вместе с планетой).

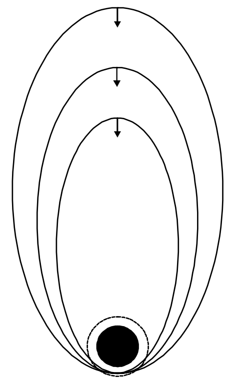


Рис. 5.7

6. ОРБИТАЛЬНЫЕ МАНЕВРЫ

6.1. Используемые в главе формулы

Рассмотрим эллиптические орбиты:

$$\left.\begin{array}{l} v^2 = \dfrac{2\mu}{r} - \dfrac{\mu}{a}, \\ a = \dfrac{r_\pi + r_\alpha}{2},\ r_\pi = a(1-e),\ r_\alpha = a(1+e). \end{array}\right\} \quad (6.1)$$

Определим параметр

$$\xi = \frac{r_\pi}{r_\alpha} = \frac{1-e}{1+e}. \quad (6.2)$$

1) $r = r_\pi$:

$$v_\pi^2 = \frac{\mu}{a}\left(\frac{2}{1-e} - 1\right) = \frac{\mu}{a}\frac{1+e}{1-e}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{v_\pi = \sqrt{\frac{\mu}{a}\frac{r_\alpha}{r_\pi}} = \sqrt{\frac{\mu}{a\xi}}} \quad (6.3)$$

2) $r = r_\alpha$:

$$v_\alpha^2 = \frac{\mu}{a}\left(\frac{2}{1+e} - 1\right) = \frac{\mu}{a}\frac{1-e}{1+e}$$

$$\Rightarrow \quad v_\alpha = \sqrt{\frac{\mu}{a}\frac{r_\pi}{r_\alpha}} = \sqrt{\frac{\mu}{a}}\,\xi = \xi v_\pi. \quad (6.4)$$

Другой способ получения величины v_α:

$\vec{c} = \vec{r} \times \vec{v}$,

$c = \left|\vec{c}\right| = r_\pi v_\pi = r_\alpha v_\alpha \ \Rightarrow\ v_\alpha = \xi v_\pi$.

6.2. Реактивное движение

Обозначим:

t_0, t — время начала действия реактивной тяги и текущее время ($t \geqslant t_0$);

$m_0 = m(t_0)$, $m = m(t)$ — начальная и текущая масса КА;

$m_p = m_p(t)$ — израсходованное топливо;

dm_p — расход топлива за бесконечно малое время dt;

$dm = -dm_p$ — уменьшение массы КА за время dt;

$\dot{m}_p = \dfrac{dm_p}{dt}$ — расход топлива в единицу времени;

$\dot{m} = \dfrac{dm}{dt} = -\dot{m}_p \quad (\dot{m} \leqslant 0)$;

u — скорость истечения реактивной струи (предположим $u = \mathrm{const}$);

dv — изменение скорости КА за время dt.

Закон сохранения момента количества движения:

$$m\,dv = u\,dm_p \quad (6.5)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dv}{u} = -\frac{dm}{m}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Delta v = v - v_0 = u \ln\frac{m_0}{m}} \quad (6.6)$$

— изменение скорости КА реактивной тягой (формула Циолковского). Из (6.6) получим расход топлива:

$$m_p = m_0 - m = m_0\left[1 - \exp\left(-\frac{\Delta v}{u}\right)\right]. \quad (6.7)$$

Сила тяги:

$$F_T = m\dot{v}$$

$\Rightarrow$ из (6.5) получим

$$\boxed{F_T = -\dot{m}u}. \quad (6.8)$$

Реактивное ускорение:

$$\boxed{\alpha = \frac{F_T}{m} = -\frac{\dot{m}u}{m}} \quad (6.9)$$

6.3. Импульсный маневр на орбите

Импульсный маневр — мгновенное изменение орбитальной скорости КА реактивной тягой:

$$\vec{v}_- = \vec{v}\left(t-0\right),\ \vec{v}_+ = \vec{v}\left(t+0\right),$$

$$\vec{v}_+ = \vec{v}_- + \Delta\vec{v},$$

$\Delta\vec{v}$ — импульс (рис. 6.1);

$$\Delta v = \left|\Delta\vec{v}\right| = \left|\vec{v}_+ - \vec{v}_-\right| = \sqrt{v_-^2 + v_+^2 - 2v_- v_+ \cos\varphi}$$

— дельта-V маневра, цена маневра

(φ — угол между $\vec{v}_-$ и $\vec{v}_+$, см. рис. 6.1).

Задача заключается в минимизации m_p ⇒ в силу (6.7) — в минимизации Δv.

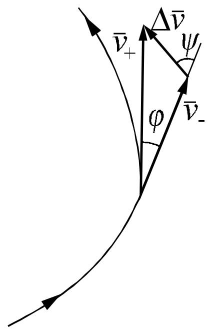


Рис. 6.1

6.4. Оптимальное импульсное изменение орбитальных параметров

1. Изменение орбитальной энергии

$$h = v^2 - \frac{2\mu}{r} \tag{6.10}$$

— удвоенная орбитальная энергия.

Радиус r не меняется в течение маневра ⇒ из (6.10) следует, что

$$\Delta h \approx \frac{\partial h}{\partial\vec{v}}\Delta\vec{v} = 2\vec{v}\cdot\Delta\vec{v} = 2v\Delta v\cos\psi\ , \tag{6.11}$$

где ψ — угол между $\vec{v}$ и $\Delta\vec{v}$ (см. рис. 6.1);

Δv задано ⇒ $\max\left|\Delta h\right|$ соответствует $\max v$ и $\psi = 0$ или $\psi = \pi$;

Δh задано ⇒ $\min\Delta v$ соответствует $\max v$ и $\psi = 0$ или $\psi = \pi$. (6.12)

Из (6.1) следует, что

$\max v = v_\pi$ — скорость в перицентре орбиты.

Эллиптическая орбита:

$$\Delta h \approx \frac{\mu}{a^2}\Delta a$$

⇒ вывод (6.12) также справедлив для Δa.

Вывод:

> Импульс в перицентре, коллинеарный скорости КА, является оптимальным для изменения орбитальной энергии или большой полуоси, причем h и a растут, если $\Delta\vec{v}\uparrow\uparrow\vec{v}_\pi$, и убывают, если $\Delta\vec{v}\uparrow\downarrow\vec{v}_\pi$

2. Изменение радиуса апоцентра

Радиус r не меняется в течение маневра ⇒ 1-е уравнение из (6.1) дает

$$2\vec{v}\cdot\Delta\vec{v} \approx \frac{\mu}{a^2}\Delta a = \frac{\mu}{2a^2}\left(\Delta r_\pi + \Delta r_\alpha\right).$$

Если Δr_α задано, то $\min\Delta v$ достигается при $\Delta\vec{v}\uparrow\uparrow\vec{v}$ или $\Delta\vec{v}\uparrow\downarrow\vec{v}$ и $v = \max$. В перицентре $v = v_\pi = \max$ и $\Delta r_\pi = 0$.

Вывод:

> Импульс в перицентре, коллинеарный скорости КА, является оптимальным для изменения радиуса апоцентра, причем r_α растет при $\Delta\vec{v}\uparrow\uparrow\vec{v}_\pi$ и убывает при $\Delta\vec{v}\uparrow\downarrow\vec{v}_\pi$

3. Изменение радиуса перицентра

$$\Delta r_\pi \approx \frac{\partial r_\pi}{\partial\vec{v}}\Delta\vec{v} = \pm\left|\frac{\partial r_\pi}{\partial\vec{v}}\right|\left|\Delta\vec{v}\right|,$$

$$\frac{\partial r_\pi}{\partial\vec{v}} = \frac{\left(r^2\vec{v}_n - r_\pi^2\vec{v}\right)^T}{\mu e}\quad (\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_n\text{, см. ниже}),$$

$\vec{c} = \vec{r}\times\vec{v}$ — интеграл площадей,

$$c = \left|\vec{c}\right| = rv_n = \sqrt{\mu p} = \text{const}\ ,$$

$$\left|r^2\vec{v}_n - r_\pi^2\vec{v}\right|^2 = r^4 v_n^2 - 2r^2 r_\pi^2 v_n^2 + r_\pi^4 v^2 = \left(r^2 - 2r_\pi^2\right)c^2 + r_\pi^4\left(\frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a}\right),$$

$$\frac{d}{dr}\left|r^2\vec{v}_n - r_\pi^2\vec{v}\right|^2 = 2c^2 r - \frac{2\mu r_\pi^4}{r^2} = 2\mu\left(pr - \frac{r_\pi^4}{r^2}\right) > 0\ ,$$

так как $r > r_\pi$, $p > r_\pi$

$\Rightarrow$ оптимальный импульс — в апоцентре.

Вывод:

Импульс в апоцентре, коллинеарный скорости КА, является оптимальным для изменения радиуса перицентра, причем r_π растет при $\Delta\vec{v} \uparrow\uparrow \vec{v}_\alpha$ и убывает при $\Delta\vec{v} \uparrow\downarrow \vec{v}_\alpha$

4. Поворот плоскости орбиты

Рассмотрим изменение плоскости орбиты КА на угол ε без изменения размера и формы орбиты, т. е.

$\left|\vec{v}_-\right| = \left|\vec{v}_+\right| = v$ (рис. 6.2)

$$\Rightarrow \quad \Delta v = 2v\sin\frac{\varepsilon}{2}$$

$\Rightarrow$ min Δv соответствует min $v = v_\alpha$ — скорости в апоцентре.

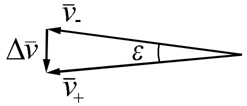


Рис. 6.2

Вывод:

Импульс в апоцентре является оптимальным для изменения плоскости орбиты КА

6.5. Одноимпульсный межорбитальный переход

1. Переход с круговой орбиты на эллиптическую

Обозначим (рис. 6.3):

r_0 — радиус начальной орбиты и радиус перицентра конечной орбиты;

r_1 — радиус апоцентра конечной орбиты;

$$\xi = \frac{r_0}{r_1};$$

$v_0 = \sqrt{\dfrac{\mu}{r_0}}$ — скорость на начальной орбите;

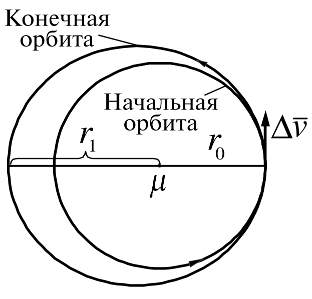


Рис. 6.3

$v_1 = \sqrt{\dfrac{2\mu}{r_0 + r_1}\dfrac{r_1}{r_0}}$ — скорость в перицентре конечной орбиты;

$$v_1 = \sqrt{\frac{\mu}{r_0}\frac{2}{1+\xi}} = v_0\sqrt{\frac{2}{1+\xi}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Delta v = v_1 - v_0 = v_0\left(\sqrt{\frac{2}{1+\xi}} - 1\right)} \qquad (6.13)$$

Рассмотрим малый маневр, т. е. $\Delta r = r_1 - r_0 \ll r_0$. Импульс является касательным (см. п. 6.4) $\Rightarrow$ (6.1) дает

$$2v\,\Delta v \approx \frac{\mu}{a^2}\Delta a\,.$$

В рассмотренном случае $a = r_0$, $\Delta a = \dfrac{r_0 + r_1}{2} - r_0 = \dfrac{\Delta r}{2}$, $v = v_0 = \sqrt{\dfrac{\mu}{r_0}}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Delta v \approx \frac{\sqrt{\mu}}{4r_0^{3/2}}\Delta r = \frac{v_0}{4r_0}\Delta r = \frac{n_0}{4}\Delta r = \frac{\pi}{2P_0}\Delta r} \qquad (6.14)$$

где n_0, P_0 — угловая скорость (среднее движение) и период начальной орбиты.

2. Переход с круговой орбиты на параболическую

В этом случае $v_1 = \sqrt{\dfrac{2\mu}{r_0}} = \sqrt{2}v_0$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Delta v = v_0\left(\sqrt{2} - 1\right)} \qquad (6.15)$$

3. Переход с круговой орбиты на гиперболическую

В этом случае $v_1 = \sqrt{\dfrac{2\mu}{r_0} + v_\infty^2} = v_0\sqrt{2 + \left(\dfrac{v_\infty}{v_0}\right)^2}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Delta v = \sqrt{\frac{2\mu}{r_0} + v_\infty^2} - \sqrt{\frac{\mu}{r_0}} = v_0\left[\sqrt{2 + \left(\frac{v_\infty}{v_0}\right)^2} - 1\right]} \qquad (6.16)$$

Замечание. Рассмотренные переходы являются обратимыми, т. е. Δv перехода с эллиптической, параболической или гиперболической орбиты на круговую вычисляется по формулам (6.13), (6.15), (6.16) соответственно.

6.6. Двухимпульсный межорбитальный переход

Рассмотрим переход между компланарными круговой и эллиптической орбитами (рис. 6.4).

Обозначим:

r_0 — радиус начальной круговой орбиты;

r_π, r_α — радиусы перицентра и апоцентра конечной эллиптической орбиты;

$$\xi_0 = \frac{r_0}{r_\alpha}, \quad \xi_1 = \frac{r_\pi}{r_\alpha}$$

$(0 < \xi_1 \le 1)$;

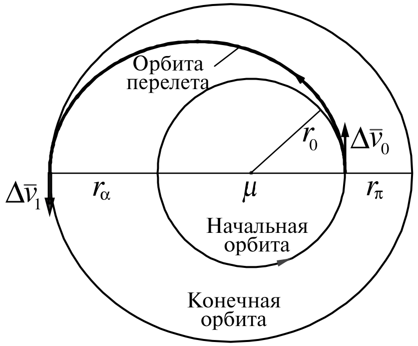


Рис. 6.4

v_0, v_1 — скорости на начальной орбите и в точке прибытия на конечную орбиту;

v_b, v_e — скорости КА в начале и в конце орбиты перелета;

Δv_0, Δv_1 — первый и второй импульсы;

Δv — суммарный импульс,

$$\Delta v_0 = \left|v_b - v_0\right|, \ \Delta v_1 = \left|v_e - v_1\right|, \ \Delta v = \Delta v_0 + \Delta v_1 . \tag{6.17}$$

Перелет в апоцентр конечной орбиты (см. рис. 6.4)

$$\left.\begin{aligned} v_0 &= \sqrt{\frac{\mu}{r_0}}, \ v_1 = \sqrt{\frac{2\mu}{r_\pi + r_\alpha}\frac{r_\pi}{r_\alpha}} = v_0\sqrt{\frac{2\xi_0\xi_1}{1+\xi_1}}, \\ v_b &= \sqrt{\frac{2\mu}{r_0 + r_\alpha}\frac{r_\alpha}{r_0}} = v_0\sqrt{\frac{2}{1+\xi_0}}, \ v_e = \sqrt{\frac{2\mu}{r_0 + r_\alpha}\frac{r_0}{r_\alpha}} = v_0\xi_0\sqrt{\frac{2}{1+\xi_0}}. \end{aligned}\right\} \tag{6.18}$$

В этом случае обозначим суммарный импульс через Δv_α.

Перелет в перицентр конечной орбиты (рис. 6.5)

$$\left.\begin{aligned} v_0 &= \sqrt{\frac{\mu}{r_0}}, \ v_1 = \sqrt{\frac{2\mu}{r_\pi + r_\alpha}\frac{r_\alpha}{r_\pi}} = v_0\sqrt{\frac{2\xi_0}{\xi_1\left(1+\xi_1\right)}}, \\ v_b &= \sqrt{\frac{2\mu}{r_0 + r_\alpha}\frac{r_\pi}{r_0}} = v_0\sqrt{\frac{2\xi_1}{\xi_0+\xi_1}}, \ v_e = \sqrt{\frac{2\mu}{r_0 + r_\alpha}\frac{r_0}{r_\pi}} = v_0\xi_0\sqrt{\frac{2}{\xi_1\left(\xi_0+\xi_1\right)}}. \end{aligned}\right\} \tag{6.19}$$

В этом случае обозначим суммарный импульс через Δv_π.

Конечная орбита находится снаружи начальной (как показано на рис. 6.4, 6.5), т. е. $r_0 \leqslant r_\pi \leqslant r_\alpha$

$$\Rightarrow \quad 0 < \xi_0 \leqslant \xi_1 \leqslant 1; \tag{6.20}$$

$$\Delta v_0 = v_b - v_0 ,$$

$$\Delta v_1 = v_1 - v_e \tag{6.21}$$

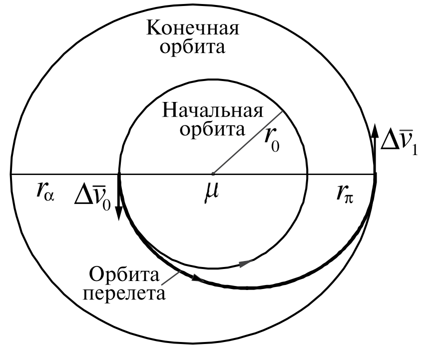


Рис. 6.5

$\Rightarrow$ в силу (6.17)–(6.19), (6.21)

$$\begin{aligned} \Delta v_\alpha &= v_0\left[\sqrt{\frac{2\xi_0\xi_1}{1+\xi_1}} + \left(1-\xi_0\right)\sqrt{\frac{2}{1+\xi_0}} - 1\right], \\ \Delta v_\pi &= v_0\left[\sqrt{\frac{2\xi_0}{\xi_1\left(1+\xi_1\right)}} + \left(\xi_1-\xi_0\right)\sqrt{\frac{2}{\xi_1\left(\xi_0+\xi_1\right)}} - 1\right]. \end{aligned} \tag{6.22}$$

Как показано в Приложении А, в этом случае $\Delta v_\alpha \leqslant \Delta v_\pi$ (см. (А.4)) $\Rightarrow$ оптимальным является перелет в апоцентр и

$$\boxed{\Delta v = v_0\left[\sqrt{\frac{2\xi_0\xi_1}{1+\xi_1}} + \left(1-\xi_0\right)\sqrt{\frac{2}{1+\xi_0}} - 1\right]}. \tag{6.23}$$

Конечная орбита находится внутри начальной, т. е. $r_\pi \leqslant r_\alpha \leqslant r_0$

$$\Rightarrow \quad 0 \leqslant \xi_1 \leqslant 1 \leqslant \xi_0 ; \tag{6.24}$$

$$\Delta v_0 = v_0 - v_b , \quad \Delta v_1 = v_e - v_1 \tag{6.25}$$

$\Rightarrow$ в силу (6.17)–(6.19), (6.25)

$$\Delta v_\alpha = v_0\left[1-\sqrt{\frac{2\xi_0\xi_1}{1+\xi_1}}-\left(1-\xi_0\right)\sqrt{\frac{2}{1+\xi_0}}\right],$$
$$\Delta v_\pi = v_0\left[1-\sqrt{\frac{2\xi_0}{\xi_1\left(1+\xi_1\right)}}-\left(\xi_1-\xi_0\right)\sqrt{\frac{2}{\xi_1\left(\xi_0+\xi_1\right)}}\right]. \qquad (6.26)$$

Как показано в Приложении А, в этом случае $\Delta v_\pi \leqslant \Delta v_\alpha$ (см. (А.5)) $\Rightarrow$ оптимальным является перелет в перицентр и

$$\boxed{\Delta v = v_0\left[1-\sqrt{\frac{2\xi_0}{\xi_1\left(1+\xi_1\right)}}-\left(\xi_1-\xi_0\right)\sqrt{\frac{2}{\xi_1\left(\xi_0+\xi_1\right)}}\right]} \qquad (6.27)$$

<u>Начальная и конечная орбиты пересекаются</u>, т. е. $r_\pi \leqslant r_0 \leqslant r_\alpha$

$$\Rightarrow \quad 0<\xi_1 \leqslant \xi_0 \le 1 \qquad (6.28)$$

$\Rightarrow$ в силу (6.17)–(6.19) $\Delta v_0 = v_b - v_0$, $\Delta v_1 = v_e - v_1$,

$$\Delta v_\alpha = v_0\left[\sqrt{2\left(1+\xi_0\right)}-\sqrt{\frac{2\xi_0\xi_1}{1+\xi_1}}-1\right] \qquad (6.29)$$

для перелета в апоцентр, и $\Delta v_0 = v_0 - v_b$, $\Delta v_1 = v_1 - v_e$,

$$\Delta v_\pi = v_0\left[\sqrt{\frac{2\xi_0}{\xi_1\left(1+\xi_1\right)}}-\sqrt{\frac{2\left(\xi_0+\xi_1\right)}{\xi_1}}+1\right] \qquad (6.30)$$

для перелета в перицентр. Как показано в Приложении А, в этом случае $\Delta v_\alpha \leqslant \Delta v_\pi$ (см. (А.8)) $\Rightarrow$ оптимальным является перелет в апоцентр и

$$\boxed{\Delta v = v_0\left[\sqrt{2\left(1+\xi_0\right)}-\sqrt{\frac{2\xi_0\xi_1}{1+\xi_1}}-1\right]} \qquad (6.31)$$

<u>Замечание</u>. Рассмотренные переходы являются обратимыми, т. е. Δv перехода с эллиптической орбиты на круговую вычисляется по формулам (6.23), (6.27), (6.31).

<u>Хомановский переход</u>

Рассмотрим частный случай перехода с круговой на эллиптическую орбиту: оптимальный переход между двумя круговыми орбитами (<u>хомановский переход</u>). Обозначим:

r_1 — радиус конечной орбиты

$$\Rightarrow \quad r_\pi = r_\alpha = r_1 \;\Rightarrow\; \xi_0 = \frac{r_0}{r_1}, \; \xi_1 = 1$$

и

$\xi_0 < 1$, если конечная орбита находится снаружи начальной,
$\xi_0 > 1$, если конечная орбита находится внутри начальной.
Соотношения (6.23), (6.27) дают:

$$\boxed{\Delta v = v_0\left|\sqrt{\frac{2}{1+\xi_0}}\left(1-\xi_0\right)-\left(1-\sqrt{\xi_0}\right)\right|} \qquad (6.32)$$

Рисунок 6.6 показывает зависимость $\Delta v/v_0$ от ξ_0 для хомановского перехода, если конечная орбита находится снаружи ($\xi_0 < 1$). Значение $\xi_0^{(1)} = \arg\max \Delta v$ может быть найдено из уравнения

$$\frac{d}{d\xi_0}\left(\frac{\Delta v}{v_0}\right)=0$$

$$\Rightarrow \quad \xi_0^3 + 9\xi_0^2 + 15\xi_0 - 1 = 0\,. \qquad (6.33)$$

Существует единственное решение уравнения (6.33) между 0 и 1:

$$\boxed{\xi_0^{(1)} = 0{,}064178 \quad \Rightarrow \quad r_1^{(1)} = 15{,}58172 r_0} \qquad (6.34)$$

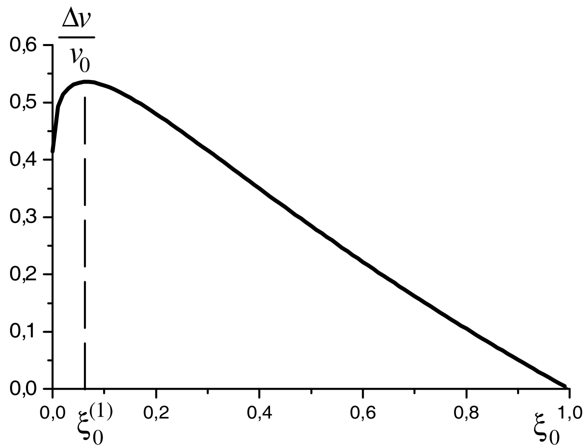


Рис. 6.6

Замечание. Этот результат применим также для случая, когда конечная орбита находится внутри начальной (т. е. для $\xi_0 > 1$) путем замены ξ_0 на $1/\xi_0$ на рис. 6.6 и в (6.34). Тогда

$$r_1^{(1)} = 0{,}064178 r_0 .$$

6.7. Трехимпульсный межорбитальный переход

1. Переход между круговыми компланарными орбитами (биэллиптический и бипараболический переходы).

Обозначим (рис. 6.7):

r_0, r_1 — радиусы начальной и конечной круговых орбит;

r_α — радиус апоцентра орбиты перехода;

$$\xi_0 = \frac{r_0}{r_1},\ \xi = \frac{r_0}{r_\alpha},\ \xi_1 = \frac{r_1}{r_\alpha} = \frac{\xi}{\xi_0}\ \ (0 < \xi_0 < 1,\ 0 < \xi_1 \le 1);$$

$0 \leqslant \xi \leqslant \xi_0$:

$\xi = \xi_0$ — двухимпульсный переход ($r_\alpha = r_1$);

$0 < \xi < \xi_0$ — биэллиптический переход ($r_1 < r_\alpha < \infty$);

$\xi = 0$ — бипараболический переход ($r_\alpha = \infty$);

$$\Delta v_0 = \sqrt{\frac{2\mu}{r_0 + r_\alpha}\frac{r_\alpha}{r_0}} - \sqrt{\frac{\mu}{r_0}} = v_0\left(\sqrt{\frac{2}{1+\xi}} - 1\right);$$

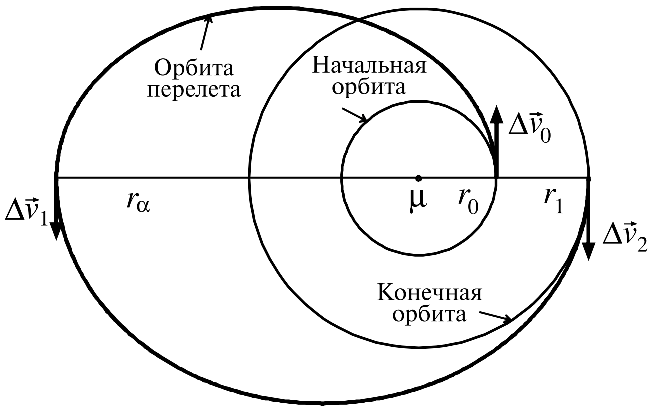


Рис. 6.7

$$\Delta v_1 = \sqrt{\frac{2\mu}{r_1 + r_\alpha}\frac{r_1}{r_\alpha}} - \sqrt{\frac{2\mu}{r_0 + r_\alpha}\frac{r_0}{r_\alpha}} = v_0\left(\sqrt{\frac{2\xi\xi_1}{1+\xi_1}} - \xi\sqrt{\frac{2}{1+\xi}}\right);$$

$$\Delta v_2 = \sqrt{\frac{2\mu}{r_1 + r_\alpha}\frac{r_\alpha}{r_1}} - \sqrt{\frac{\mu}{r_1}} = v_0\left(\sqrt{\frac{2\xi_0}{1+\xi_1}} - \sqrt{\xi_0}\right);$$

$$\boxed{\Delta v = \Delta v_0 + \Delta v_1 + \Delta v_2 = v_0\left[\sqrt{\frac{2}{1+\xi}}(1-\xi) + \sqrt{2(\xi_0+\xi)} - 1 - \sqrt{\xi_0}\right]} \quad (6.35)$$

Найдем значение $\xi_0^{(2)}$ параметра ξ_0, начиная с которого трехимпульсный биэллиптический переход становится предпочтительным. Рисунок 6.8 показывает зависимость $\Delta v/v_0$ от ξ для $\xi_0 = 0{,}08$. Если $\xi < \xi_m$, то трехимпульсный биэллиптический переход предпочтительнее двухимпульсного хомановского; здесь ξ_m — решение уравнения

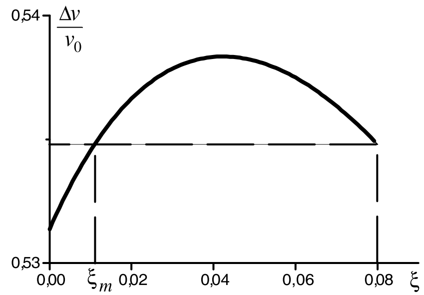


Рис. 6.8

$$\Delta v(\xi = \xi_m) = \Delta v(\xi = \xi_0). \quad (6.36)$$

Значение $\xi_0^{(2)}$ может быть найдено из уравнения

$$\Delta v(\xi = 0) = \Delta v(\xi = \xi_0).$$

Из (6.35) получим

$$\sqrt{2} + \sqrt{2\xi_0} - 1 - \sqrt{\xi_0} = \sqrt{\frac{2}{1+\xi_0}}(1-\xi_0) + 2\sqrt{\xi_0} - 1 - \sqrt{\xi_0}$$

$$\Rightarrow\ \sqrt{\frac{2}{1+\xi_0}}(1-\xi_0) + \left(2-\sqrt{2}\right)\sqrt{\xi_0} - \sqrt{2} = 0. \quad (6.37)$$

Решение уравнения (6.37):

$$\boxed{\xi_0^{(2)} = 0{,}083761 \Rightarrow r_1^{(2)} = 11{,}93877 r_0} \tag{6.38}$$

Найдем значение $\xi_0^{(3)}$ параметра ξ_0, для которого любой трехимпульсный биэллиптический переход является предпочтительным, т. е.

$\arg\max\limits_{\xi} \Delta v = \xi_0^{(3)}$ (рис. 6.9).

Из (6.35) найдем

$$\frac{d}{d\xi}\frac{\Delta v}{v_0} = -\sqrt{\frac{2}{1+\xi}} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{1+\xi}}\frac{1-\xi}{1+\xi} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\xi_0+\xi}} = 0$$

$$\Rightarrow \ (3+\xi_0)\xi^2 + 6(1+\xi_0)\xi - (1-9\xi_0) = 0\,,$$

$$\Rightarrow \ \xi = \frac{-3(1+\xi_0) + 2\sqrt{3-2\xi_0}}{3+\xi_0} = \xi_0\,,$$

$$\Rightarrow \ \xi_0^4 + 12\xi_0^3 + 42\xi_0^2 + 44\xi_0 - 3 = 0\,,$$

$$\Rightarrow \ \boxed{(\xi_0+3)\left(\xi_0^3 + 9\xi_0^2 + 15\xi_0 - 1\right) = 0} \tag{6.39}$$

Сравнивая (6.39) и (6.33), с учетом (6.34) получим, что единственным решением уравнения (6.39) между 0 и 1 является

$$\xi_0^{(3)} = \xi_0^{(1)} = 0{,}064178 \Rightarrow r_1^{(3)} = 15{,}58172 r_0\ . \tag{6.40}$$

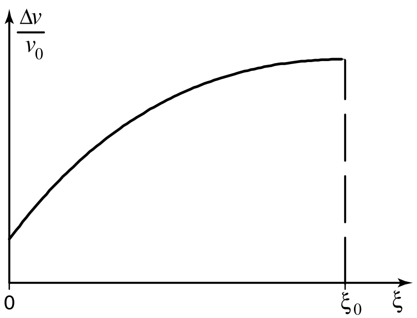


Рис. 6.9

Выводы. Сравнение различных типов перехода дает оптимальные в смысле min Δv переходы:

$r_0 < r_1 < r_1^{(2)}$ — хомановский переход оптимален;

$r_1 = r_1^{(2)}$ — хомановский и бипараболический переходы равно оптимальны; любой биэллиптический переход хуже;

$r_1 > r_1^{(2)}$ — бипараболический переход оптимален;

$r_1^{(2)} < r_1 < r_1^{(3)}$ — биэллиптический переход с $r_\alpha > r_0/\xi_m$ лучше хомановского перехода (ξ_m — решение уравнения (6.36), см. также рис. 6.8);

$r_1 \geqslant r_1^{(3)}$ — любой биэллиптический переход лучше хомановского.

Замечание. Полученные результаты также применимы, если конечная орбита находится внутри начальной. В этом случае

$$r_1^{(2)} = 0{,}083761 r_0\,,\quad r_1^{(3)} = 0{,}064178 r_0$$

и приведенные выше выводы должны быть соответственно изменены.

2. Поворот плоскости круговой орбиты (рис. 6.10).

Обозначим:

r_0 — радиус начальной и конечной круговых орбит;

r_α — радиус апоцентра орбиты перехода;

ε — угол между начальной и конечной круговыми орбитами;

$\xi = \dfrac{r_0}{r_\alpha}$, $0 \leqslant \xi \leqslant 1$,

$\xi = 1$ — одноимпульсный переход ($r_\alpha = r_0$);

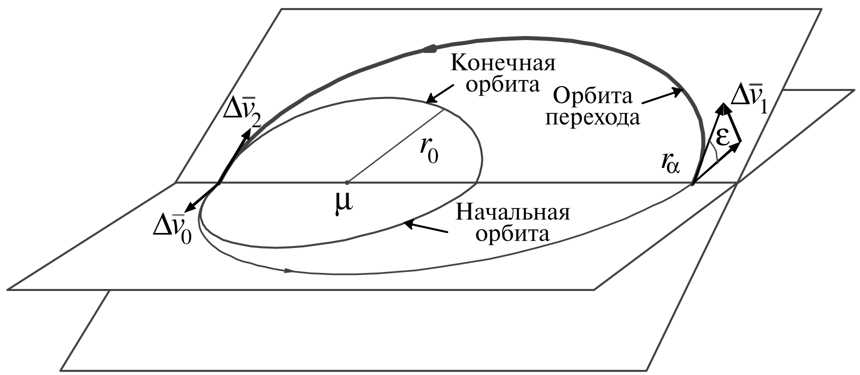


Рис. 6.10

$0<\xi<1$ — трехимпульсный биэллиптический переход ($r_0<r_\alpha<\infty$);

$\xi=0$ — трехимпульсный бипараболический переход ($r_\alpha=\infty$);

$v_0=\sqrt{\dfrac{\mu}{r_0}}$ — скорость на начальной и конечной орбитах;

$v_\pi=\sqrt{\dfrac{2\mu}{r_0+r_\alpha}\dfrac{r_\alpha}{r_0}}=v_0\sqrt{\dfrac{2}{1+\xi}}$ — скорость в перицентре орбиты перехода;

$v_\alpha=\sqrt{\dfrac{2\mu}{r_0+r_\alpha}\dfrac{r_0}{r_\alpha}}=v_0\xi\sqrt{\dfrac{2}{1+\xi}}$ — скорость в апоцентре орбиты перехода;

$$\Delta v_0=\left|\Delta\vec{v}_0\right|=v_\pi-v_0=v_0\left(\sqrt{\frac{2}{1+\xi}}-1\right);$$

$$\Delta v_1=\left|\Delta\vec{v}_1\right|=2v_\alpha\sin\frac{\varepsilon}{2}=2v_0\sqrt{\frac{2}{1+\xi}}\sin\frac{\varepsilon}{2};$$

$$\Delta v_2=\left|\Delta\vec{v}_2\right|=\Delta v_0;$$

$$\boxed{\Delta v=\Delta v_0+\Delta v_1+\Delta v_2=2v_0\left[\sqrt{\frac{2}{1+\xi}}\left(1+\xi\sin\frac{\varepsilon}{2}\right)-1\right]} \qquad (6.41)$$

Рисунок 6.11 показывает зависимость $\Delta v/v_0$ от ξ для $\varepsilon=45°$.

Найдем оптимальное значение

$$\xi_{\text{opt}}=\arg\min_{\xi}\Delta v$$

(см. рис. 6.11):

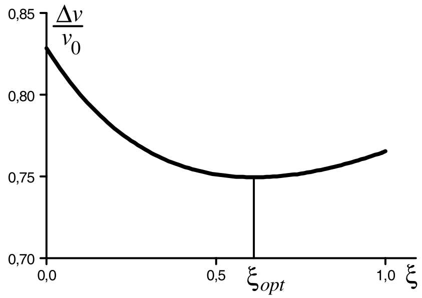


Рис. 6.11

$$\frac{d}{d\xi}\frac{\Delta v}{v_0}=-\sqrt{\frac{2}{1+\xi}}\frac{1+\xi\sin\frac{\varepsilon}{2}}{1+\xi}+2\sqrt{\frac{2}{1+\xi}}\sin\frac{\varepsilon}{2}=0;$$

1) $\xi=1\Rightarrow\varepsilon=\varepsilon^{(1)}=38{,}94°$;

2) $\xi=0\Rightarrow\varepsilon=\varepsilon^{(2)}=60°$;

3) $0<\xi<1,\ \ \varepsilon^{(1)}<\varepsilon<\varepsilon^{(2)}$

$$\Rightarrow\ \boxed{\xi_{opt}=\frac{1}{\sin\frac{\varepsilon}{2}}-2\Rightarrow r_{\alpha opt}=\frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}}{1-2\sin\frac{\varepsilon}{2}}r_0} \qquad (6.42)$$

<u>Выводы</u>:

$\varepsilon\leqslant\varepsilon^{(1)}$ — одноимпульсный переход оптимален;

$\varepsilon^{(1)}<\varepsilon<\varepsilon^{(2)}$ — трехимпульсный биэллиптический переход с r_α из (6.42) оптимален;

$\varepsilon\geqslant\varepsilon^{(2)}$ — бипараболический переход оптимален.

7. ЗАДАЧА ЛАМБЕРТА

7.1. Постановка задачи

Обозначим:

t_0, t_1 — моменты времени отлета и прилета соответственно;

$\vec{r}_0$, $\vec{r}_1$ — радиус-векторы точек отлета и прилета;

$\vec{v}_0$ — скорость КА в начале траектории перелета (т. е. траектории КА между $\vec{r}_0$ и $\vec{r}_1$);

$\tau = t_1 - t_0$ — время полета;

φ — угловая дальность.

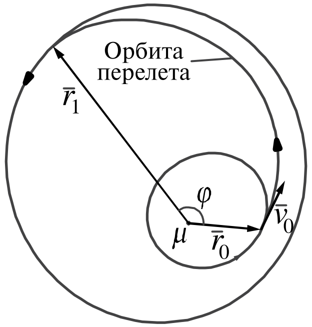


Рис. 7.1

Задача заключается в нахождении траектории перелета для заданных $\vec{r}_0$, $\vec{r}_1$, τ (задача Ламберта)

Схема перелета показана на рис. 7.1.

7.2. Необходимые формулы

Обозначим (см. главу 4):

s — универсальная переменная,

$$\dot{s} = \frac{1}{r}, \quad s(t_0) = 0, \tag{7.1}$$

$$x = -hs^2, \tag{7.2}$$

где h — постоянная энергии;

$$c_n = c_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-x)^m}{(2m+n)!} \quad (n = 0, 1, \ldots) \text{ — функции Штумпфа.}$$

Отсюда

$$c_n(0) = \frac{1}{n!}. \tag{7.3}$$

Ниже также будут использованы следующие соотношения, полученные в главе 4:

$$\frac{dc_n}{dx} = \frac{nc_{n+2} - c_{n+1}}{2}, \tag{7.4}$$

$$c_1^2 - c_0 c_2 = c_2, \tag{7.5}$$

$$c_2^2 - c_1 c_3 = c_3 - 2c_4, \quad c_3^2 - c_2 c_4 = \frac{c_4}{2} - 2c_5 + 2c_6. \tag{7.6}$$

Пусть $s = s(t_1)$; тогда

$$\tau = r_0 s c_1 + \vec{r}_0 \cdot \vec{v}_0 \, s^2 c_2 + \mu s^3 c_3 \tag{7.7}$$

— универсальное уравнение Кеплера (4.18);

$$r_1 = \frac{d\tau}{ds} = r_0 c_0 + \vec{r}_0 \cdot \vec{v}_0 \, s c_1 + \mu s^2 c_2; \tag{7.8}$$

$$\vec{r}_1 = f \vec{r}_0 + g \vec{v}_0, \tag{7.9}$$

где

$$f = 1 - \frac{\mu s^2 c_2}{r_0}, \quad g = \tau - \mu s^3 c_3. \tag{7.10}$$

7.3. Уравнение для задачи Ламберта

Векторы $\vec{r}_0$, $\vec{v}_0$ полностью определяют орбиту перелета и $\vec{r}_0$ задан

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{для решения задачи Ламберта требуется найти } \vec{v}_0}$

Соотношение (7.9) дает

$$\boxed{\vec{v}_0 = \frac{1}{g}\left(\vec{r}_1 - f \vec{r}\right)} \tag{7.11}$$

$\Rightarrow$ в силу (7.11), (7.10)

$\boxed{\text{для решения задачи Ламберта достаточно найти } x, s}$

Пусть $\varphi \neq 2\pi$; можно показать, что в этом случае $c_2 \neq 0$

$\Rightarrow$ из (7.7), (7.10) найдем

$$\vec{r}_0 \cdot \vec{v}_0 = \frac{\tau - \mu s^3 c_3}{s^2 c_2} - \frac{r_0 s c_1}{s^2 c_2} = \frac{g}{s^2 c_2} - \frac{r_0 c_1}{s c_2}. \tag{7.12}$$

Подставим (7.12) в (7.8):

$$r_1 = r_0 c_0 + \left(\frac{g}{s^2 c_2} - \frac{r_0 c_1}{s c_2}\right) s c_1 + \mu s^2 c_2 = r_0\left(c_0 - \frac{c_1^2}{c_2}\right) + \frac{g c_1}{s c_2} + \mu s^2 c_2 . \quad (7.13)$$

С учетом (7.5) из (7.13) получим

$$\frac{g c_1}{s c_2} = r_0 + r_1 - \mu s^2 c_2 . \quad (7.14)$$

Умножим (7.9) на $\vec{r}_0$ с учетом (7.10), (7.12), (7.14):

$$\vec{r}_0 \cdot \vec{r}_1 = \left(1 - \frac{\mu s^2 c_2}{r_0}\right) r_0^2 + g \vec{r}_0 \cdot \vec{v}_0 = r_0^2 - \mu s^2 c_2 r_0 + \frac{g^2}{s^2 c_2} - \frac{g c_1}{s c_2} =$$
$$= r_0^2 - \mu s^2 c_2 r_0 + \frac{g^2}{s^2 c_2} - r_0^2 - r_0 r_1 + \mu s^2 c_2 r_0 . \quad (7.15)$$

Используя равенство

$$r_0 r_1 + \vec{r}_0 \cdot \vec{r}_1 = r_0 r_1 \left(1 + \cos\varphi\right) = 2 r_0 r_1 \cos^2\frac{\varphi}{2} ,$$

из (7.15) получим

$$g^2 = 2 r_0 r_1 \cos^2\frac{\varphi}{2} s^2 c_2 . \quad (7.16)$$

Обозначим $\vec{c} = \vec{r}_0 \times \vec{v}_0$, $c = \left|\vec{c}\right|$ и умножим (7.9) на $\vec{r}_0$:

$$\vec{r}_0 \times \vec{r}_1 = g \vec{c} . \quad (7.17)$$

С другой стороны,

$$\vec{r}_0 \times \vec{r}_1 = r_0 r_1 \sin\varphi \frac{\vec{c}}{c} . \quad (7.18)$$

Так как $\operatorname{sgn}\sin\varphi = \operatorname{sgn}\cos\frac{\varphi}{2}$, то, согласно (7.17), (7.18), $\operatorname{sgn} g = \operatorname{sgn}\cos\frac{\varphi}{2} \Rightarrow$ из (7.16) получим

$$g = \sqrt{2 r_0 r_1} \cos\frac{\varphi}{2} s \sqrt{c_2} . \quad (7.19)$$

Определим

$$\boxed{\rho = \frac{\sqrt{2 r_0 r_1}}{r_0 + r_1} \cos\frac{\varphi}{2}} \quad (7.20)$$

$$\boxed{u = \sqrt{1 - \rho \frac{c_1}{\sqrt{c_2}}}} \quad (7.21)$$

и подставим g из (7.19) в (7.14):

$$\rho \frac{c_1}{\sqrt{c_2}} = 1 - \frac{\mu s^2 c_2}{r_0 + r_1}$$

$$\Rightarrow \boxed{s = \sqrt{\frac{r_0 + r_1}{\mu c_2}} \cdot u} \quad (7.22)$$

Теперь подставим g из (7.10) и s из (7.22) в (7.19) с учетом (7.20):

$$\tau - \mu \left(\frac{r_0 + r_1}{\mu c_2}\right)^{3/2} u^3 c_3 = \left(r_0 + r_1\right) \rho \sqrt{\frac{r_0 + r_1}{\mu c_2}} u \sqrt{c_2} . \quad (7.23)$$

Разделив (7.23) на $\left(r_0 + r_1\right)^{3/2}$ и вводя безразмерное время

$$\boxed{\sigma = \frac{\sqrt{\mu}}{\left(r_0 + r_1\right)^{3/2}} \tau} \quad (7.24)$$

преобразуем (7.23) в уравнение для x

$$\boxed{F\left(x, \rho\right) = \frac{c_3}{c_2^{3/2}} u^3 + \rho u = \sigma} \quad (7.25)$$

После нахождения x из уравнения (7.25) можно найти s из (7.22) и затем вычислить f, g по (7.10) и $\vec{v}_0$ по (7.11)

На рис. 7.2 показана зависимость $F\left(x, \rho\right)$ от $y = \sqrt{\left|x\right|} \operatorname{sgn}(x)$ для некоторых значений ρ.

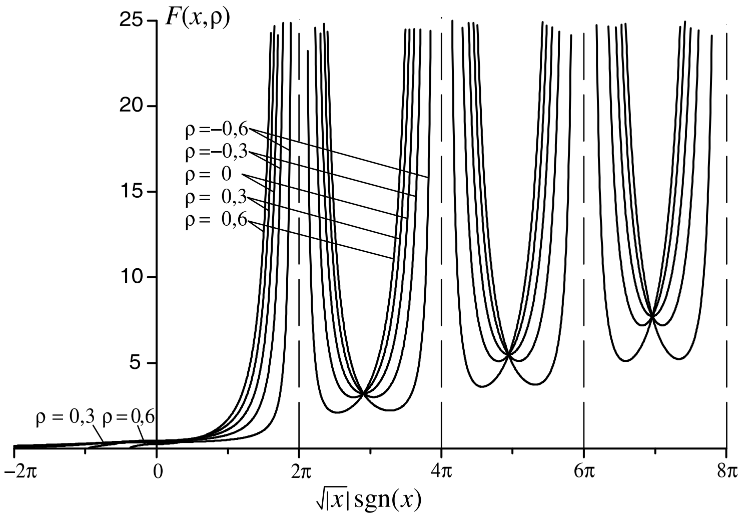


Рис. 7.2

7.4. Анализ уравнения задачи Ламберта

Область определения функции $F(x, \rho)$

Как видно из (7.20), (7.24),

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant \rho \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\,,\ \sigma > 0. \tag{7.26}$$

В силу (7.21) должно быть

$$\rho \frac{c_1}{\sqrt{c_2}} \leqslant 1\,. \tag{7.27}$$

Из табл. 4.1 следует, что

$$\frac{c_1(x)}{\sqrt{c_2(x)}} = \sqrt{2} \cdot c_0\left(\frac{x}{4}\right) = \begin{cases} \sqrt{2}\cos\dfrac{\sqrt{x}}{2}, & \text{если } x \geqslant 0, \\ \sqrt{2}\cosh\dfrac{\sqrt{-x}}{2}, & \text{если } x < 0 \end{cases} \tag{7.28}$$

⇒ в силу (7.26), (7.28) неравенство (7.27) может нарушаться только при

$\rho > 0,\ x < 0$

⇒ соотношения (7.26), (7.28) дают

$$x \geqslant -4\ln^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}\rho} + \sqrt{\frac{1}{2\rho^2} - 1}\right). \tag{7.29}$$

Для $x > 0$

$$c_2(x) = \frac{1 - \cos\sqrt{x}}{x} \tag{7.30}$$

⇒ согласно (7.25), (7.30)

$$x \neq 2\pi k \quad (k = 1, 2, \ldots)\,. \tag{7.31}$$

Типы орбит перелета

Согласно соотношению $x = -hs^2$:

$x < 0$ — гиперболическая орбита;

$x = 0$ — параболическая орбита; (7.32)

$x > 0$ — эллиптическая орбита.

Из (7.25), используя (7.6), получим производную функции $F(x, \rho)$:

$$F_x = \frac{dF(x,\rho)}{dx} = \frac{c_3^2 - c_5 + 4c_6}{4c_2^{3/2}}u^3 + \left(3\frac{c_3}{c_2^{3/2}}u^2 + \rho\right)\frac{\rho\sqrt{c_2}}{8u}\,. \tag{7.33}$$

Можно показать, что

$$F_x > 0 \text{ для } x < (2\pi)^2 \tag{7.34}$$

(см. рис. 7.2). Из (7.3), (7.25) для параболической орбиты найдем

$$F(0,\rho) = \frac{1}{3}\left(\sqrt{2} + \rho\right)\sqrt{1 - \sqrt{2}\rho} = \sigma_{par}\,, \tag{7.35}$$

где σ_{par} — безразмерное время для параболической орбиты

⇒ из (7.25, 7.34) получим

$$\begin{aligned} &\sigma < \sigma_{par} && \text{– гиперболическая орбита,} \\ &\sigma = \sigma_{par} && \text{– параболическая орбита,} \\ &\sigma > \sigma_{par} && \text{– эллиптическая орбита.} \end{aligned} \tag{7.36}$$

Эллиптическая орбита перелета

Рассмотрим x в пределах

$$(2\pi k)^2 < x < \left[2\pi(k+1)\right]^2 \quad (k = 0, 1, \ldots) \tag{7.37}$$

и определим переменные

$$z = \frac{\sqrt{x}}{2} - \pi k \,, \tag{7.38}$$

$$\xi = \xi(z) = \frac{\pi k + z - \sin z \cos z}{\sin^3 z} \,, \tag{7.39}$$

$$\eta = \eta(z) = \sqrt{2}\rho - 2\cos z + \sqrt{2}\rho \cos^2 z \,. \tag{7.40}$$

Пользуясь табл. 4.1 (см. главу 4), преобразуем (7.21), (7.25), (7.33) для эллиптических орбит следующим образом:

$$u = \sqrt{1 - \sqrt{2}\rho \cos z} \,, \tag{7.41}$$

$$F(x, \rho) = \Phi(z, k, \rho) = \left(\frac{\xi u^2}{\sqrt{2}} + \rho\right) u = \sigma \,, \tag{7.42}$$

$$4\sqrt{x} F_x(x, \rho) = \Phi_z(z, k, \rho) = \frac{u^2\left(4u^2 + 3\xi\eta\right) + 2\rho^2 \sin^2 z}{2\sqrt{2} u \sin z} \,. \tag{7.43}$$

Число решений

Рисунок 7.3 иллюстрирует решение уравнения (7.25):

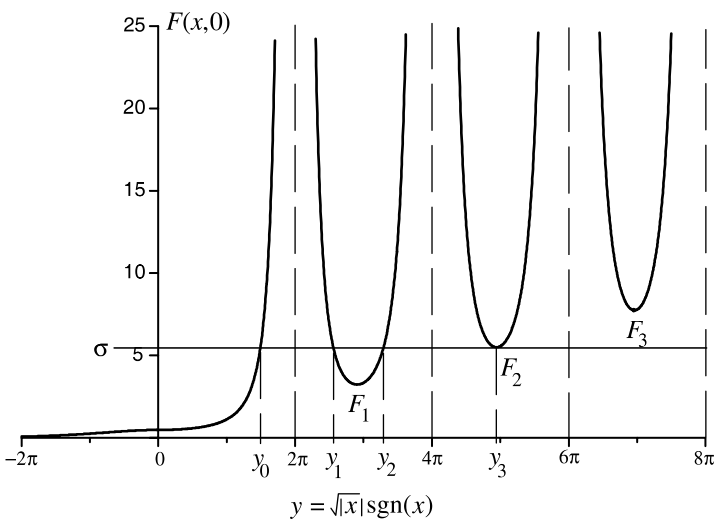


Рис. 7.3

Если $x < (2\pi)^2$, то существует единственное решение (y_0 на рис. 7.3) с $\varphi < 2\pi$

Рассмотрим $x > (2\pi)^2$; если

$$(2\pi k)^2 < x < \left[2\pi(k+1)\right]^2 \quad (k = 1, 2, \ldots) \,, \tag{7.44}$$

то орбита перелета имеет k полных оборотов, т. е.

$$2\pi k < \varphi < 2\pi(k+1).$$

Пусть $F_k = F(x_k, \rho) = \min\limits_x F(x, \rho)$ для x, удовлетворяющего (7.44) (см. рис. 7.3),

$$x_k = \arg\min_x F(x, \rho).$$

Тогда

$\sigma > F_k$: два решения $x_k^{(1)}$, $x_k^{(2)}$ (y_1 и y_2 для $k = 1$ на рис. 7.3)
$\sigma = F_k$: одно решение x_k (y_3 для $k = 2$ на рис. 7.3)
$\sigma < F_k$: нет решений ($k = 3$ на рис. 7.3)

Рассмотрим два решения $x_k^{(1)}$, $x_k^{(2)}$ для $k \geqslant 1$:

$$(2\pi k)^2 < x_k^{(1)} < x_k < x_k^{(2)} < \left[2\pi(k+1)\right]^2 \quad (k = 1, 2, \ldots), \tag{7.45}$$

где x_k — решение уравнения

$$F_x(x, \rho) = 0 \,. \tag{7.46}$$

Используя (7.38)–(7.40), (7.43), сведем (7.46) к виду:

$$u^2\left(4u^2 + 3\xi\eta\right) + 2\rho^2 \sin^2 z_k = 0 \,. \tag{7.47}$$

После нахождения z_k из (7.47) значение x_k определяется как

$$x_k = 4\left(z_k + \pi k\right)^2 . \tag{7.48}$$

7.5. Решение уравнения задачи Ламберта

Для решения уравнения (7.25) используем метод Ньютона–Рафсона:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{F\left(x_{n-1},\rho\right)-\sigma}{F_x\left(x_{n-1},\rho\right)} \quad (n=0,1,\ldots)\,, \tag{7.49}$$

где $F_x(x, \rho)$ дается в (7.33).

Начальное приближение для процедуры (7.49)

Начальное приближение x_0, для которого

$$F\left(x_0,\rho\right)>\sigma\,,$$

обеспечивает сходимость (7.49) (рис. 7.4). Поэтому начальное приближение может быть принято следующим образом:

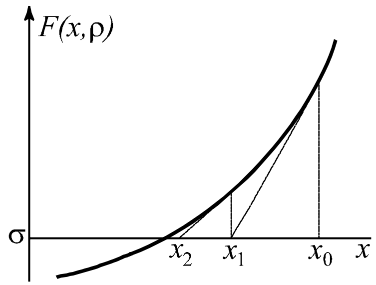


Рис. 7.4

1. Гиперболические и параболические орбиты перелета

Может быть принято

$x_0 = 0.$

Замечание. Если $\rho > 0$, то в процедуре (7.49) должно проверяться условие (7.29).

2. Эллиптические орбиты перелета

Рассмотрим (7.41)–(7.43) и найдем начальное приближение для (7.38), т. е.

$$z_0 = \frac{\sqrt{x_0}}{2} - \pi k \quad (0 < z_0 < \pi)\,. \tag{7.50}$$

Соотношение (7.41) дает

$$u > u_m \equiv \sqrt{1-\sqrt{2}\left|\rho\right|} > 0\,. \tag{7.51}$$

а) Отсутствие полных оборотов $(k=0)$

Будем искать начальное приближение в виде

$$z_0 = \pi - \varepsilon_0\,. \tag{7.52}$$

Из (7.39), (7.52) для $k = 0$ получим

$$\xi\left(z_0\right) = \frac{\pi-\varepsilon_0+\frac{1}{2}\sin 2\varepsilon_0}{\sin^3\varepsilon_0} > \frac{\pi-\varepsilon_0+\varepsilon_0-\frac{8}{12}\varepsilon_0^3}{\varepsilon_0^3} = \frac{\pi-\frac{2}{3}\varepsilon_0^3}{\varepsilon_0^3} \tag{7.53}$$

$\Rightarrow$ соотношения (7.42), (7.51), (7.53) дают

$$\Phi\left(z_0,0,\rho\right) > \left(\frac{\pi-\frac{2}{3}\varepsilon_0^3}{\varepsilon_0^3}u_m^2+\rho\right)u_m = \sigma$$

$$\Rightarrow \boxed{\varepsilon_0 = \left(\frac{\pi}{\frac{2}{3}u_m^3+\sigma-\rho u_m}\right)^{1/3} u_m} \tag{7.54}$$

б) k полных оборотов $(k > 0)$

Будем искать начальное приближение в виде

$$z_0^{(1)} = \varepsilon_1\,,\quad z_0^{(2)} = \pi - \varepsilon_2$$

для решений $z^{(1)}$, $z^{(2)}$ соответственно. Тогда из (7.39) получим

$$\xi\left(z_0^{(1)}\right) = \frac{\pi k+\varepsilon_1-\frac{1}{2}\sin 2\varepsilon_1}{\sin^3\varepsilon_1} > \frac{\pi k}{\varepsilon_1^3}$$

$$\Rightarrow \Phi\left(z_0^{(1)},k,\rho\right) > \left(\frac{\pi k}{\sqrt{2\varepsilon_1^3}}u_m^2+\rho\right)u_m = \sigma$$

$$\Rightarrow \boxed{\varepsilon_1 = \left[\frac{\pi k}{\sqrt{2\left(\sigma-\rho u_m\right)}}\right]^{1/3} u_m} \tag{7.55}$$

Аналогично (7.54) получим

$$\boxed{\varepsilon_2 = \left[\frac{\pi\left(k+1\right)}{\frac{2}{3}u_m^3+\sigma-\rho u_m}\right]^{1/3} u_m} \tag{7.56}$$

Выводы. Начальное приближение может быть принято следующим образом:

$\sigma \leqslant \sigma_{par}$: $x_0 = 0$ (если $\rho > 0$, то должно проверяться условие (7.29));

$\sigma > \sigma_{par}$, $k = 0$: $x_0 = 4(\pi - \varepsilon_0)^2$;

$$\sigma > \sigma_{par},\ k > 0:\ \begin{cases} x_0 = 4\left(\pi k + \varepsilon_1\right)^2 & \text{(1-е решение);} \\ x_0 = 4\left[\pi\left(k+1\right) - \varepsilon_2\right]^2 & \text{(2-е решение)} \end{cases}$$

(в случае $k > 0$ должно быть $\sigma \geqslant F_k$);

здесь σ_{par}, ε_0, ε_1, ε_2 даются соотношениями (7.35), (7.54)–(7.56) с использованием (7.51).

7.6. Случай коллинеарных векторов $\vec{r}_0$, $\vec{r}_1$

Если $\vec{r}_1 \uparrow\downarrow \vec{r}_2$, то плоскость орбиты перелета является неопределенной, однако могут быть найдены радиальная v_r и трансверсальная v_n компоненты вектора $\vec{v}_0$.

Из (7.12) с учетом равенств

$$v_r = \frac{\vec{r}_0 \cdot \vec{v}_0}{r_0},\quad g = 0$$

получим

$$\boxed{v_r = -\frac{r_0 c_1}{s c_2}} \tag{7.57}$$

Соотношения (7.57) и

$$v_0^2 = v_r^2 + v_n^2,\quad h = v_0^2 - \frac{2\mu}{r_0}$$

дают

$$\boxed{v_n = \sqrt{h - v_r^2 + \frac{2\mu}{r_0}}} \tag{7.58}$$

где с учетом (7.2), (7.22) величина h может быть найдена из соотношения:

$$h = -\frac{\mu c_2 x}{\left(r_0 + r_1\right) u^2},$$

x, как указывалось выше, является решением уравнения (7.25).

8. МЕЖПЛАНЕТНЫЕ ПЕРЕЛЕТЫ

8.1. Постановка задачи

Межпланетный перелет представляет собой перелет КА между двумя или несколькими небесными телами; также может рассматриваться перелет в заданную точку пространства. Задача заключается в нахождении траектории перелета КА, а также величин и направлений импульсов, необходимых для осуществления перелета. Задача оптимизации перелета состоит в нахождении такой траектории, на которой суммарная величина всех импульсов минимальна.

8.2. Метод склеенных конических сечений

Разобьем межпланетную траекторию космического аппарата (КА) на три части (рис. 8.1):

I — полет в сфере действия планеты отправления;

II — гелиоцентрический перелет;

III — полет в сфере действия планеты назначения.

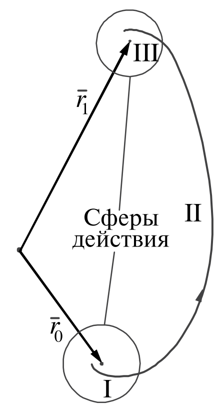


Рис. 8.1

Полет в сфере действия (рис. 8.2)

Пренебрежем всеми возмущениями в сфере действия

$\Rightarrow$ траектория является гиперболической.

Обозначим (см. рис. 8.2):

R_π — радиус перицентра (т. е. точка старта у планеты отправления или наибольшее сближение с планетой назначения);

R_S — радиус сферы действия;

$\vec{v}_S$ — скорость КА на границе сферы действия,

$$\boxed{R_\pi \ll R_S \ \Rightarrow\ \vec{v}_S \approx \vec{v}_\infty} \tag{8.1}$$

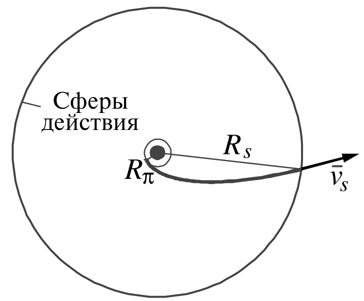


Рис. 8.2

Гелиоцентрический перелет

Обозначим через r расстояние планеты от Солнца.

$$\boxed{R_S \ll r \Rightarrow \text{примем } R_S = 0}$$

Введем обозначения:

τ_0, τ_1 — времена полета в сферах действия планеты отправления и назначения соответственно,

τ — время гелиоцентрического перелета,

$$\boxed{\tau_0, \tau_1 \ll \tau}$$

$\Rightarrow$ рассматривая гелиоцентрическую часть перелета, полагаем

$$\boxed{\tau_0 = \tau_1 = 0}$$

Описанный способ «склеивания» участков траектории перелета называется методом склеивания конических сечений.

8.3. Импульс старта и скорость облета в межпланетных полетах

Предположим, что КА запускается с низкой круговой орбиты вокруг планеты отправления (НОПО). Обозначим:

μ, μ_0, μ_1 — гравитационные параметры Солнца, планеты отправления и планеты назначения соответственно;

R_0, R_1 — радиусы НОПО старта и расстояние наибольшего сближения с планетой назначения соответственно;

t_0, t_1 — моменты времени старта и прибытия;

$\vec{r}_0$, $\vec{r}_1$ — гелиоцентрические радиус-векторы планет отправления и назначения в моменты t_0 и t_1 соответственно;

$\vec{v}_0$, $\vec{v}_1$ — скорости КА на гелиоцентрической траектории в моменты t_0 и t_1 соответственно;

$\vec{u}_0$, $\vec{u}_1$ — орбитальные скорости планет отправления и назначения в моменты t_0 и t_1 соответственно.

Величины $\vec{r}_0$, $\vec{r}_1$, $\tau = t_1 - t_0$ заданы

$\Rightarrow$ $\vec{v}_0$ — решение задачи Ламберта,

$\vec{v}_1$ определяется из соотношения

$$\vec{v}_1 = \dot{f}\vec{r}_0 + \dot{g}\vec{v}_0$$

где

$$\dot{f} = -\frac{\mu s c_1}{r_0 r_1}, \quad \dot{g} = 1 - \frac{\mu s^2 c_2}{r_1}$$

(см. (4.23), (4.26)).

Определим

$\boxed{\vec{v}_{\infty 0} = \vec{v}_0 - \vec{u}_0}$ — скорость КА относительно планеты отправления на границе сферы действия этой планеты приблизительно равна исходящей асимптотической скорости;

$\boxed{\vec{v}_{\infty 1} = \vec{v}_1 - \vec{u}_1}$ — скорость КА относительно планеты назначения на границе сферы действия этой планеты приблизительно равна входящей асимптотической скорости.

Как было показано в п. 6.4,

$$\boxed{\Delta v = \sqrt{\frac{2\mu_0}{R_0} + v_{\infty 0}^2} - \sqrt{\frac{\mu_0}{R_0}}} \qquad (8.2)$$

— скорость старта с НОПО;

$$\boxed{V_1 = \sqrt{\frac{2\mu_1}{R_1} + v_{\infty 1}^2}} \qquad (8.3)$$

— скорость КА в точке наибольшего сближения с планетой назначения. Положения планет отправления и назначения известны:

$$\vec{r}_0 = \vec{r}_0(t_0), \ \vec{r}_1 = \vec{r}_1(t_1)$$

$\Rightarrow$ решение задачи Ламберта зависит только от t_0, t_1

$$\Rightarrow \boxed{\Delta v = \Delta v(t_0, t_1), \ V_1 = V_1(t_0, t_1)} \qquad (8.4)$$

Параметр C_3

В качестве характеристики энергии старта у планеты отправления или подлета к планете назначения используется параметр

$$\boxed{C_3 = v_\infty^2}$$

— удвоенная энергия орбиты; $v_{\infty 0}^2$ представляет собой C_3 старта, $v_{\infty 1}^2$ — C_3 прибытия.

8.4. Об оптимальном перелете

Предположим, что орбиты планет отправления и назначения — круговые и компланарные ⇒ оптимальным является значение угловой дальности $\varphi = \pi$ (хомановский перелет, см. главу 6 и рис. 8.3). Время полета

$$t_1 - t_0 = \pi \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}},$$

где $a = \dfrac{r_0 + r_1}{2}$ — большая полуось орбиты перелета. Введем:

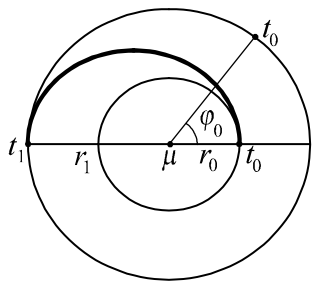


Рис. 8.3

$$\xi = \frac{r_0}{r_1};$$

$n_j = \dfrac{\sqrt{\mu}}{r_j^{3/2}}$ — средние движения планет отправления ($j = 0$) и назначения ($j = 1$);

$$P_j = \frac{2\pi}{n_j} \tag{8.5}$$

— орбитальные периоды планет отправления ($j = 0$) и назначения ($j = 1$);

φ_0 — гелиоцентрический угол между планетами в момент t_0 (см. рис. 8.3).

$$\boxed{\varphi_0 = \pi - n_1 (t_1 - t_0) = \pi \left[1 - \left(\frac{1 + \xi}{2} \right)^{3/2} \right]} \tag{8.6}$$

Соотношение (8.6) определяет начальное взаимное положение планет, необходимое для оптимального перелета.

Угловая скорость планеты назначения относительно планеты отправления равна

$$n = |n_1 - n_0|.$$

Время, необходимое для повторения такой же конфигурации (синодический период):

$$P = \frac{2\pi}{|n_1 - n_0|} \tag{8.7}$$

⇒ из (8.5), (8.7) найдем

$$\boxed{P = \frac{P_0 P_1}{|P_1 - P_0|}} \tag{8.8}$$

Соотношение (8.8) дает время между двумя оптимальными датами запуска в рассматриваемом случае.

Если планетой отправления является Земля, то

$$\boxed{P = \frac{P_1}{|P_1 - 1|}} \tag{8.9}$$

— периодичность дат старта, данная в годах.

Таблица 8.1. Периоды оптимальных запусков от Земли к планетам

Планета назначения	P, лет
Меркурий	0,32
Венера	1,60
Марс	2,14
Юпитер	1,09

> Соотношения (8.8), (8.9) и табл. 8.1 дают <u>среднюю</u> периодичность оптимальных дат запуска

Реальные орбиты планет являются эллиптическими и взаимно наклоненными
⇒ значение $\varphi = \pi$ может привести к очень большому $\Delta\tau$ (рис. 8.4); пусть

φ_1 — оптимальная угловая дальность для первого полувитка, $0 < \varphi_1 < \pi$;

φ_2 — оптимальная угловая дальность для второго полувитка, $\pi < \varphi_2 < 2\pi$.

Для каждой даты старта t_0 может быть найдена оптимальная (т. е. минимизирующая Δv старта) дата t_1. Определим

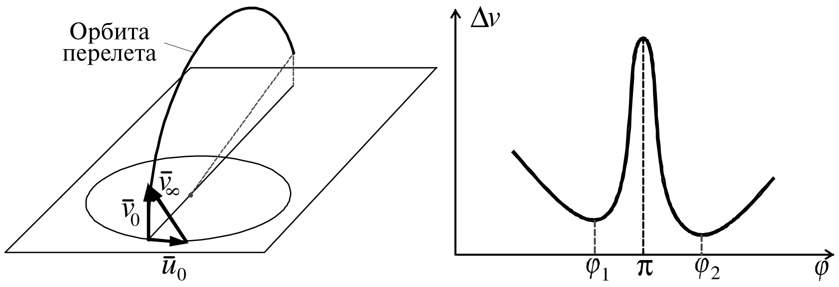


Рис. 8.4

$$\Delta v_m = \Delta v_m\left(t_0\right) = \min_{t_1} \Delta v\left(t_0, t_1\right),$$

$$\Delta v_M = \min_{t_0, t_1} \Delta v\left(t_0, t_1\right) = \min_{t_0} \Delta v_m\left(t_0\right).$$

Рисунок 8.5 иллюстрирует функции $\Delta v(t_0, t_1)$ (линии уровня, рис. 8.5а) и $\Delta v_m(t_0)$ (рис. 8.5*б*).

Линии уровня на рис. 8.5*а* удовлетворяют неравенствам

$$\Delta v_1 < \Delta v_2 < \Delta v_3 < \Delta v_4 .$$

Если наибольшее допустимое значение Δv старта задано, то оно определяет окно дат старта. Если окно дат старта задано, то оно определяет наибольшее значение Δv старта (см. рис. 8.5*б*).

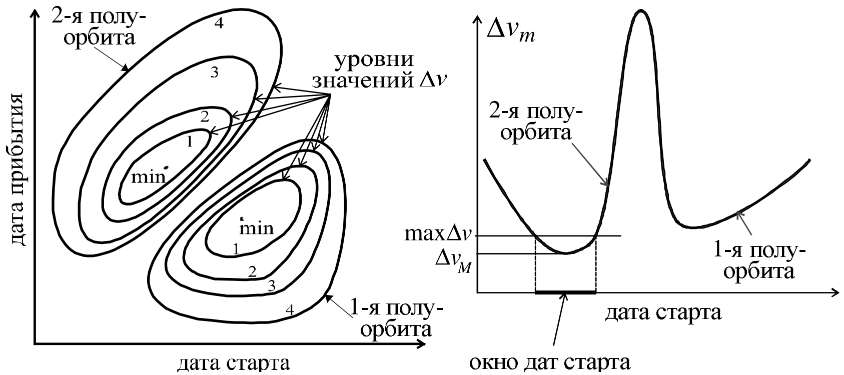


Рис. 8.5

8.5. Гравитационные маневры

Рассмотрим пролет КА через сферу действия планеты. Обозначим (рис. 8.6):

$\vec{v}_\infty$, $\vec{v}\,'_\infty$ — входящая и исходящая асимптотические скорости КА;

$$\vec{v} = \vec{u} + \vec{v}_\infty , \quad \vec{v}\,' = \vec{u} + \vec{v}\,'_\infty \qquad (8.10)$$

— гелиоцентрические скорости КА перед входом в сферу действия и после выхода из нее (время полета в сфере действия мало по отношению к орбитальному периоду планеты, поэтому в (8.10) скорость планеты $\vec{u}$ предполагается одинаковой при входе в сферу действия и при выходе из нее);

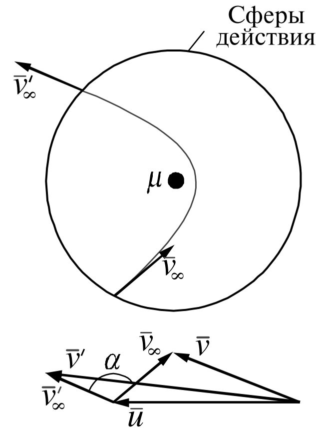


Рис. 8.6

$\vec{v}_1 \neq \vec{v}\,'_1 \Rightarrow$ облет планеты изменяет скорость КА.

В силу (8.10)

$$\boxed{\Delta\vec{v} = \vec{v}\,' - \vec{v} = \vec{v}\,'_\infty - \vec{v}_\infty}$$

— «импульс», в результате гравитационного маневра.

8.6. Изменение орбитальной энергии при гравитационном маневре

Рассмотрим плоский пассивный гравитационный маневр, т. е. $\left|\vec{v}_\infty\right| = \left|\vec{v}\,'_\infty\right| = v_\infty$. Обозначим (рис. 8.7):

μ — гравитационный параметр планеты;

$\vec{r}$, $\vec{u}$ — гелиоцентрические положение и орбитальная скорость планеты во время облета;

$\vec{R}_\pi$, $\vec{v}_\pi$ — положение и скорость в перицентре траектории облета;

α — угол поворота;

δ — угол между $\vec{r}$ и $\vec{R}_\pi$.

Предположим, что орбита планеты круговая; тогда δ — также угол между $\vec{u}$

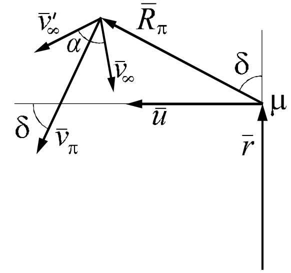


Рис. 8.7

и $\vec{v}_\pi$ (см. рис. 8.7). Гелиоцентрические скорости КА до и после облета могут быть найдены из (8.10):

$$\left.\begin{aligned} v^2 &= u^2 + v_\infty^2 + 2uv_\infty \cos\left(\delta + \frac{\alpha}{2}\right), \\ v'^2 &= u^2 + v_\infty'^2 + 2uv_\infty' \cos\left(\delta - \frac{\alpha}{2}\right). \end{aligned}\right\} \tag{8.11}$$

Орбитальная энергия (см. (2.6)):

$$E = \frac{h}{2} = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta E = \frac{v'^2}{2} - \frac{v^2}{2} = uv_\infty\left[\cos\left(\delta - \frac{\alpha}{2}\right) - \cos\left(\delta + \frac{\alpha}{2}\right)\right] = 2uv_\infty \sin\delta \sin\frac{\alpha}{2}. \tag{8.12}$$

Если $\vec{v}_\infty'$, $\vec{v}_\infty$ на рис. 8.7 — входящая и исходящая асимптотические скорости, то v', v в (8.12) — гелиоцентрические скорости КА до и после облета соответственно и

$$\Delta E = -2uv_\infty \sin\delta \sin\frac{\alpha}{2} \tag{8.13}$$

$\Rightarrow$ в силу (8.12), (8.13), (3.19) изменение орбитальной энергии:

$$\boxed{\Delta E = \pm 2uv_\infty \sin\delta \sin\frac{\alpha}{2} = \pm\frac{2uv_\infty \sin\delta}{1 + \dfrac{R_\pi v_\infty^2}{\mu}}} \tag{8.14}$$

8.7. Полет в сфере действия планеты

Рассмотрим перелет между тремя планетами с гравитационными параметрами μ_0, μ_1, μ_2 (рис. 8.8): от планеты отправления ($\vec{r}_0$ на момент t_0) с гравитационным маневром у второй планеты ($\vec{r}_1$ на момент t_1) к планете назначения ($\vec{r}_2$ на момент t_2).

Два участка траектории КА (от $\vec{r}_0$ к $\vec{r}_1$ за время $t_1 - t_0$ и от $\vec{r}_1$ к $\vec{r}_2$ за время $t_2 - t_1$) могут быть найдены как два решения задачи Ламберта. Эти решения дают входящую и исходящую скорости КА $\vec{v}_\infty$ и $\vec{v}_\infty'$ у второй планеты.

Задача заключается в нахождении траектории КА в сфере действия второй планеты, соединяющей два участка гелиоцентрической траектории (т. е. в нахождении траектории с входящей и исходящей асимптотическими скоростями $\vec{v}_\infty$ и $\vec{v}_\infty'$).

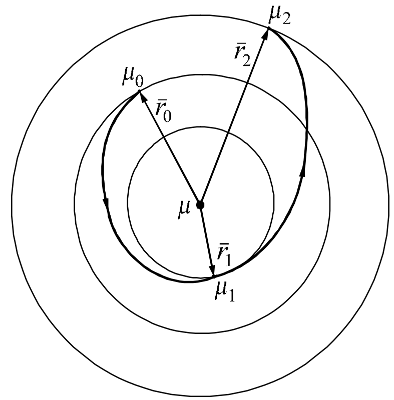


Рис. 8.8

Таким образом, $\vec{v}_\infty$ и $\vec{v}_\infty'$ заданы; обозначим $v_\infty = |\vec{v}_\infty|$, $v_\infty' = |\vec{v}_\infty'|$; угол α между $\vec{v}_\infty$ и $\vec{v}_\infty'$ — угол поворота:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{v}_\infty \cdot \vec{v}_\infty'}{v_\infty v_\infty'}. \tag{8.15}$$

Так как радиус сферы действия много меньше гелиоцентрических расстояний, предположим, что КА может войти в сферу действия и выйти из нее в любых точках ее поверхности без изменения гелиоцентрической траектории, т. е. оба вектора асимптотической скорости могут передвигаться вдоль поверхности параллельно самим себе (рис. 8.9)

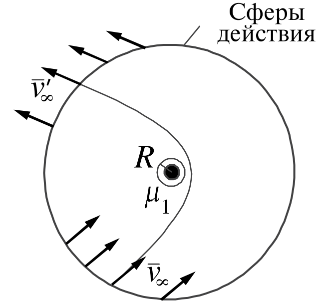


Рис. 8.9

<u>Пассивный облет планеты</u>

Пусть $v_\infty = v_\infty'$; в этом случае траектория КА является гиперболической в плоскости, проходящей через $\vec{v}_\infty$ и $\vec{v}_\infty'$ и центр масс планеты.

Угол поворота (см. (3.19)):

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{1 + \dfrac{R_\pi v_\infty^2}{\mu_1}}. \tag{8.16}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{R_\pi = \frac{\mu_1}{v_\infty^2}\left(\frac{1}{\sin\dfrac{\alpha}{2}} - 1\right)} \tag{8.17}$$

— радиус перицентра траектории.

Обозначим через R минимальное расстояние, на которое КА может приблизиться к планете (R = радиус планеты + высота атмосферы + безопасное расстояние), т. е.

$$R_\pi \geqslant R\,.$$

Пассивный облет возможен только тогда, когда $v_\infty = v'_\infty$ и $\sin\dfrac{\alpha}{2} \leqslant \dfrac{1}{1+\dfrac{Rv_\infty^2}{\mu_1}}$

Активный облет планеты

Пусть $v_\infty \neq v'_\infty$; примем $v_\infty < v'_\infty$. В этом случае необходим активный маневр в сфере действия. В простейшем случае оптимальным является одноимпульсный маневр.

Определим углы:

$$\left.\begin{aligned} &\beta = \frac{\pi - \alpha}{4},\\ &\lambda = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{v'_\infty - v_\infty}{v'_\infty + v_\infty}\operatorname{tg}\beta\right),\\ &\psi = \beta - \lambda. \end{aligned}\right\} \tag{8.18}$$

Оптимальное расстояние R_i приложения импульса и величина Δv импульса находятся по формулам (даются без вывода)

$$\begin{aligned} &R_i = \frac{2\mu\sin^2\psi}{v_\infty^2\cos^2\lambda\left(2\cos^2\beta - \cos^2\lambda\right)},\\ &\Delta v = \left(v_\infty + v'_\infty\right)\sin\lambda \end{aligned} \tag{8.19}$$

(рис. 8.10; здесь $\vec{v}_-$ и $\vec{v}_+$ — скорости КА до и после импульса).

Дельта-V как функция времени

В силу (8.15), (8.18), (8.19) дельта-V может быть представлена в виде

$$\Delta v = f\left(\vec{v}_\infty, \vec{v}'_\infty\right). \tag{8.20}$$

Пусть моменты времени t_0, t_1, t_2 отправления, гравитационного маневра и прибытия заданы и

$$\vec{r}_0 = \vec{r}_0\left(t_0\right),\quad \vec{r}_1 = \vec{r}_1\left(t_1\right),\quad \vec{r}_2 = \vec{r}_2\left(t_2\right)$$

(см. рис. 8.8). Векторы $\vec{v}_\infty$ и $\vec{v}'_\infty$ определяются из решений задачи Ламберта для перелетов между $\vec{r}_0$, $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ соответственно

$$\Rightarrow \quad \vec{v}_\infty = \vec{v}_\infty\left(t_0, t_1\right),\quad \vec{v}'_\infty = \vec{v}'_\infty\left(t_1, t_2\right)$$

$\Rightarrow$ в силу (8.20)

$$\boxed{\Delta v = \Delta v\left(t_0, t_1, t_2\right)} \tag{8.21}$$

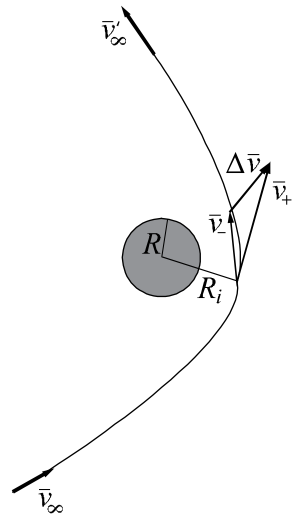


Рис. 8.10

8.8. Постановка задачи оптимизации перелета между несколькими планетами

Рассмотрим полет к n планетам; обозначим:

t_0, $\vec{r}_0$ — время старта и положение планеты отправления в t_0;

t_j, $\vec{r}_j$ — время j-го облета и положение j-й планеты в t_j ($j = 1, \ldots, n-1$);

t_n, $\vec{r}_n$ — время прибытия к последней планете и положение планеты в t_n.

После нахождения траектории КА путем решения задачи Ламберта n раз величина суммарного импульса может быть найдена из соотношения

$$\Delta v = \sum_{j=0}^{n} \Delta v_j\,, \tag{8.22}$$

где

Δv_0 — дельта-V старта;

Δv_j — дельта-V в сфере действия j-й планеты, $j = 1, \ldots, m-1$ ($\Delta v_j = 0$, если облет пассивный);

Δv_n — дельта-V торможения около последней планеты ($\Delta v_n = 0$, если торможение не требуется).

В силу (8.4), (8.21)

$$\Delta v_0 = \Delta v_0\left(t_0, t_1\right),\ \Delta v_n = \Delta v_n\left(t_{n-1}, t_n\right),$$

$$\Delta v_j = \Delta v_j\left(t_{j-1}, t_j, t_{j+1}\right),\ j = 1, \ldots, n-1$$

$\Rightarrow$ в (8.22)

$$\Delta v = \Delta v\left(\vec{t}\,\right), \tag{8.23}$$

где

$$\vec{t} = \left\{t_0, t_1, \ldots, t_n\right\}. \tag{8.24}$$

Задача оптимизации: найти

$$\Delta v_m = \min_{\vec{t}} \Delta v\ . \tag{8.25}$$

Замечание. На практике активные маневры в дальнем космосе также возможны (здесь не рассматриваются).

8.9. Маневры VEGA* и ΔVEGA

Гравитационный маневр у Венеры и Земли (VEGA — Venus and Earth Gravity Assists)

Рассмотрим перелет Земля – Венера – Земля – другое тело (рис. 8.11). Обозначим:

t_0, t_1, t_2 — моменты времени старта, облета Венеры и Земли;

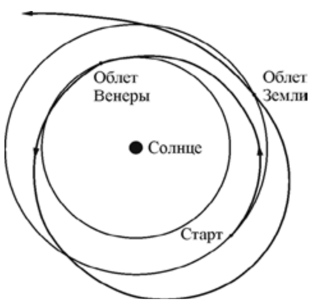


Рис. 8.11

$\vec{u}_0$, $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ — орбитальные скорости Земли, Венеры и Земли в моменты t_0, t_1, t_2 соответственно;

$\vec{v}_0$ — гелиоцентрическая скорость КА после запуска;

$\vec{v}_j$, $\vec{v}'_j$ — гелиоцентрические скорости КА соответственно до и после облетов Венеры ($j = 1$) и Земли ($j = 2$);

$\vec{v}_{\infty 0}$ — асимптотическая скорость КА после запуска;

* Не смешивать с Международным космическим проектом VEGA — «Венера–Галлей».

$\vec{v}_{\infty j}$, $\vec{v}'_{\infty j}$ — входящая и исходящая асимптотические скорости КА во время облетов Венеры ($j = 1$) и Земли ($j = 2$).

Гравитационный маневр VEGA включает следующие этапы (рис. 8.12):

(а) Запуск:

$$\vec{v}_{\infty 0} \uparrow\downarrow \vec{u}_0 \ \Rightarrow\ v_0 = u_0 - v_{\infty 0}\,.$$

(б) Облет Венеры (пассивный $\Rightarrow\ v'_{\infty 1} = v_{\infty 1}$):

$\vec{v}_{\infty 1}$ наклонена к $\vec{u}_1$,

$$\vec{v}'_{\infty 1} \uparrow\uparrow \vec{u}_1 \ \Rightarrow\ v'_1 = u_1 + v_{\infty 1} > v_1\,.$$

(в) Облет Земли (пассивный $\Rightarrow\ v'_{\infty 2} = v_{\infty 2}$):

$\vec{v}_{\infty 2}$ наклонена к $\vec{u}_2$,

$$\vec{v}'_{\infty 2} \uparrow\uparrow \vec{u}_2 \ \Rightarrow v'_2 = u_2 + v_{\infty 2} > v_2\,.$$

Продолжительность маневра VEGA 13–17 месяцев. Дополнительная дельта-V до 2,5 км/с

Дельта-V и гравитационный маневр у Земли (маневр ΔVEGA — ΔV and Earth Gravity Assist)

Идея такая же, как и для маневра VEGA: возврат к Земле с большей асимптотической скоростью (рис. 8.13). Этапы маневра:

(а) Запуск на гелиоцентрическую орбиту с перигелием у Земли и периодом *n* лет ($n = 2, 3, \ldots$):

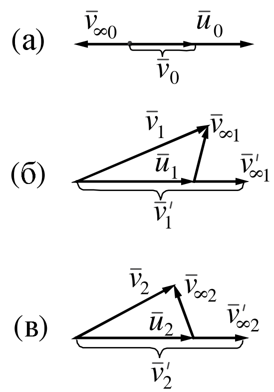


Рис. 8.12

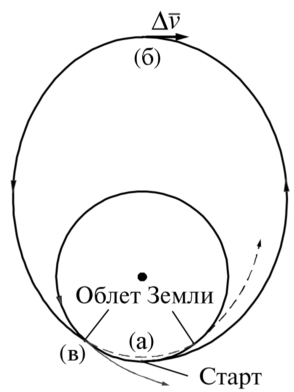


Рис. 8.13

$\vec{v}_{\infty 0} \uparrow\uparrow \vec{u}_0$.

(б) Тормозной импульс вблизи афелия орбиты:

$\Delta\vec{v} \uparrow\downarrow \vec{v}_\alpha$.

(в) Облет Земли:

$\vec{v}_{\infty 2}$ наклонена к $\vec{u}_2$ (см. рис. 8.12в),

$\vec{v}'_{\infty 2} \uparrow\uparrow \vec{u}_2 \Rightarrow v'_2 = u_2 + v_{\infty 2} > v_2$.

Маневр длительностью 2, 3, ... лет называется:

маневр ΔVEGA 2^-, 3^-, ..., если облет Земли происходит до перигелия (сплошная траектория на рис. 8.13);

маневр ΔVEGA 2^+, 3^+, ..., если облет Земли происходит после перигелия (пунктирная траектория на рис. 8.13).

Дополнительная дельта-V до 1,1 км/с

Недостатки маневров VEGA и ΔVEGA

- Маневр VEGA требует особого взаимного положения Земли и Венеры, которое повторяется каждые 1,6 года; продолжительность маневра более года.
- Маневр ΔVEGA намного дольше маневра VEGA и дает меньшую дополнительную скорость.

9. МАНЕВРИРОВАНИЕ В СФЕРЕ ДЕЙСТВИЯ ПЛАНЕТЫ

9.1. Постановка задачи и основные обозначения

В этой главе рассматриваются вход КА в сферу действия планеты назначения и маневрирование около планеты с целью выполнения задачи полета. Такой задачей может быть исследование планеты и ее спутников.

Обозначим:

μ — гравитационный параметр планеты;

R — наименьшее возможное расстояние сближения с планетой;

a — большая полуось;

e — эксцентриситет орбиты;

r_π, r_α — радиусы перицентра и апоцентра;

i — наклонение орбиты, $0 \leqslant i \leqslant \pi$;

α — угол поворота вектора асимптотической скорости, $0 < \alpha < \pi$.

9.2. Используемые в главе соотношения

В данной главе будут использованы следующие соотношения, полученные в предыдущих главах:

$$a = \frac{r_\pi + r_\alpha}{2}$$ — большая полуось,

$$r_\pi = \frac{p}{1+e}, \quad r_\alpha = \frac{p}{1-e}$$ — радиусы перицентра и апоцентра

$$\Rightarrow \quad p = \frac{2 r_\pi r_\alpha}{r_\pi + r_\alpha} \tag{9.1}$$

— фокальный параметр,

$$c = r v_n = \sqrt{\mu p} \tag{9.2}$$

— величина интеграла площадей,

$$v^2 = \frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a} = \frac{2\mu}{r}\left(1 - \frac{r}{r_\pi + r_\alpha}\right) \tag{9.3}$$

— скорость КА,

$$v_\alpha = \sqrt{\frac{2\mu}{r_\pi + r_\alpha}\frac{r_\pi}{r_\alpha}}\ , \quad v_\pi = \frac{r_\alpha}{r_\pi} v_\alpha \tag{9.4}$$

— скорости в апоцентре и перицентре,

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{1 + \dfrac{r_\pi v_\infty^2}{\mu}} \tag{9.5}$$

— угол поворота.

9.3. Входящая орбита КА

Пусть радиус r_π входящей гиперболической орбиты КА задан (может быть выбрано любое значение $r_\pi \geqslant R$, см. п. 8.6). Зададим плоскость орбиты ортами

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{v}_\infty}{v_\infty},\ \vec{e}_2 \perp \vec{e}_1 \tag{9.6}$$

(рис. 9.1). Плоскость планетоцентрической орбиты КА можно произвольно поворачивать вокруг $\vec{v}_\infty$ (см. п. 8.6) $\Rightarrow$ $\vec{e}_2$ может выбираться произвольно. Рассмотрим некий фиксированный орт $\vec{e}_{20} \perp \vec{e}_1$, лежащий в базовой плоскости системы координат

$\Rightarrow$ $\vec{e}_{20} = \left\{e_{20x}, e_{20y}, 0\right\}$, и пусть

$$\vec{e}_{30} = \vec{e}_1 \times \vec{e}_{20} = \left\{e_{30x}, e_{30y}, e_{30z}\right\} \tag{9.7}$$

$$\Rightarrow\ \vec{e}_2 = \vec{e}_{20}\cos\psi + \vec{e}_{30}\sin\psi\ , \tag{9.8}$$

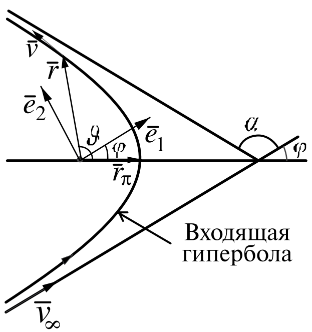


Рис. 9.1

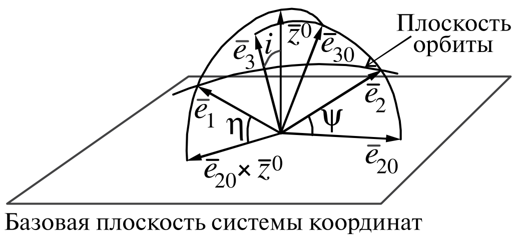


Рис. 9.2

где угол ψ может выбираться произвольно (рис. 9.2). Вектор $\vec{e}_{20}$ находится из уравнений

$$e_{20x}^2 + e_{20y}^2 = 1,$$
$$e_{1x}e_{20x} + e_{1y}e_{20y} = 0.$$

Для разрешения неопределенности примем $e_{30z} > 0$ в (9.7).

Определим угол $\varphi = \dfrac{\pi - \alpha}{2}$ $\left(0 < \varphi < \dfrac{\pi}{2}\right.$, см. рис. 9.1) $\Rightarrow$ в силу (9.5)

$$\cos\varphi = \frac{1}{1 + \dfrac{r_\pi v_\infty^2}{\mu}}\ ,$$

$$\vec{r}_\pi = r_\pi\left(\vec{e}_1\cos\varphi - \vec{e}_2\sin\varphi\right), \tag{9.9}$$

$$\vec{r} = r\left[\vec{e}_1\cos\left(\vartheta - \varphi\right) + \vec{e}_2\sin\left(\vartheta - \varphi\right)\right]. \tag{9.10}$$

<u>Элементы орбиты</u>

$$\boxed{a = \frac{\mu}{v_\infty^2},\ e = 1 + \frac{r_\pi v_\infty^2}{\mu}}$$

(см. п. 3.4). Рассмотрим орт

$$\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \left\{e_{3x}, e_{3x}, e_{3x}\right\}. \tag{9.11}$$

Соотношения (9.7), (9.8), (9.11) дают

$$\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \times \vec{e}_{20}\cos\psi + \vec{e}_1 \times \vec{e}_{30}\sin\psi = \vec{e}_1 \times \vec{e}_{20}\cos\psi - \vec{e}_{20}\sin\psi\ . \tag{9.12}$$

Вектор $\vec{e}_3$ ортогонален плоскости орбиты

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} &\cos i = e_{3z}, \\ &\operatorname{tg}\Omega = -\frac{e_{3x}}{e_{3y}}, \\ &\cos\omega = \frac{\vec{r}_\pi \cdot \vec{k}}{r_\pi},\ \vec{k} = \begin{bmatrix}\cos\Omega \\ \sin\Omega \\ 0\end{bmatrix} \end{aligned}} \tag{9.13}$$

(см. п. 3.6). Пусть $\vec{z}^0 = \{0, 0, 1\}$ – единичный вектор, ортогональный базовой плоскости. Тогда

$$\cos i = \vec{z}^0 \cdot \vec{e}_3 = \vec{z}^0 \cdot \vec{e}_1 \times \vec{e}_{20} \cos\psi = \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_{20} \times \vec{z}^0 \cos\psi .$$

Обозначим через η угол между $\vec{v}_\infty$ и базовой плоскостью системы координат. Единичный вектор $\vec{e}_{20} \times \vec{z}^0$ направлен вдоль проекции вектора $\vec{e}_1$ на базовую плоскость

$\Rightarrow$ в силу (9.6) $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_{20} \times \vec{z}^0 = \cos\eta$

$$\Rightarrow \boxed{\cos i = \cos\eta\cos\psi} \tag{9.14}$$

$$\Rightarrow \boxed{\eta \leqslant i \leqslant \pi - \eta} \tag{9.15}$$

9.4. Одноимпульсный маневр захвата

Рассматривается маневр захвата КА в перицентре входящей гиперболической орбиты. Минимальное значение тормозного импульса Δv_0 достигается на минимальном расстоянии R (рис. 9.3).

Если задан апоцентр r_α планетоцентрической орбиты КА, то

$$\boxed{\Delta v_0 = \sqrt{\frac{2\mu}{R} + v_\infty^2} - \sqrt{\frac{2\mu}{R} - \frac{\mu}{a}}} \tag{9.16}$$

где $a = \dfrac{R + r_\alpha}{2}$.

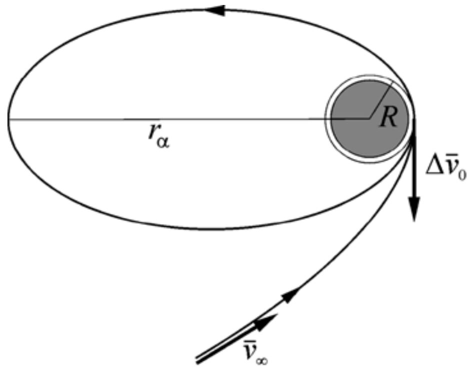


Рис. 9.3

Если задан период орбиты P, то в (9.16)

$$a = \sqrt[3]{\frac{P^2\mu}{4\pi^2}} .$$

9.5. Сброс зонда на планету

Рассматривается случай, когда от КА отделяется зонд для вхождения в атмосферу планеты. С этой целью скорость зонда должна быть уменьшена на величину Δv_p, чтобы уменьшить радиус перицентра его орбиты ⇒ оптимальным (в смысле min Δv_p) является маневр отделения зонда в апоцентре орбиты КА (см. п. 6.4).

Обозначим через R_a радиус атмосферы планеты ($R_a \leqslant R$) и через θ угол входа зонда в атмосферу (рис. 9.4),

$$\cos\theta = \frac{v_n}{v} , \tag{9.17}$$

где скорости v, v_n вычисляются на расстоянии R_a (рис. 9.5).

Соотношения (9.1)–(9.3) дают

$$v^2 = \frac{2\mu}{R_a}\left(1 - \frac{R_a}{r_\pi + r_\alpha}\right), \tag{9.18}$$

$$v_n^2 = \frac{\mu p}{R_a^2} = \frac{2\mu}{R_a}\frac{r_\pi r_\alpha}{r_\pi + r_\alpha} \tag{9.19}$$

⇒ из (9.17)–(9.19) найдем радиус перицентра орбиты зонда

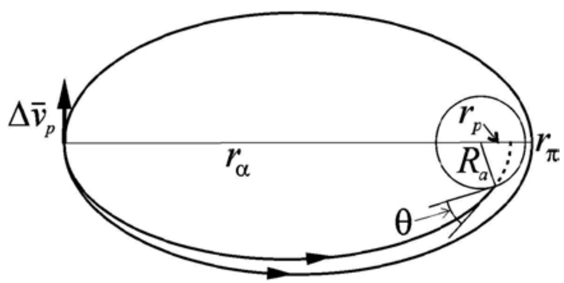


Рис. 9.4

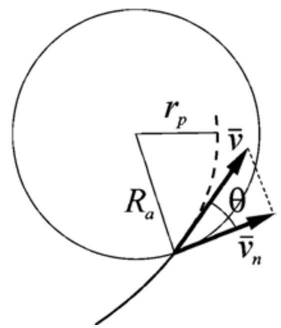


Рис. 9.5

$$\boxed{r_p = \frac{\left(r_\alpha - R_a\right) R_a \cos^2\theta}{r_\alpha - R_a \cos^2\theta}} \tag{9.20}$$

Обозначим через v_α, $v_{\alpha p}$ скорости КА и зонда в апоцентре после отделения зонда $\Rightarrow \Delta v_p = v_\alpha - v_{\alpha p}$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta v_p = \sqrt{\frac{2\mu}{r_\pi + r_\alpha}\frac{r_\pi}{r_\alpha}} - \sqrt{\frac{2\mu}{r_p + r_\alpha}\frac{r_p}{r_\alpha}}} \tag{9.21}$$

Если $\Delta r_\pi = r_\pi - r_p \ll R_a$, то

$$\boxed{\Delta v_p \approx \frac{v_\pi}{4a}\Delta r_\pi} \tag{9.22}$$

9.6. Выведение КА на заданную круговую орбиту

Рассмотрим выведение КА на круговую орбиту вокруг планеты, заданную радиусом r_0 и единичным вектором $\vec{c}^{\,0}$ кинетического момента орбиты ($\vec{c}^{\,0}$ ортогонален плоскости орбиты). Для этого используется следующий трехимпульсный маневр (рис. 9.6):

— импульс $\Delta\vec{v}_0$ на расстоянии $r_\pi = \left|\vec{r}_\pi\right|$: маневр захвата (см. п. 9.4);

— импульс $\Delta\vec{v}_1$ на расстоянии r_α: подъем перицентра до r_0 и, если необходимо, поворот плоскости орбиты;

— импульс $\Delta\vec{v}_2$ на расстоянии r_0: выведение КА на заданную круговую орбиту.

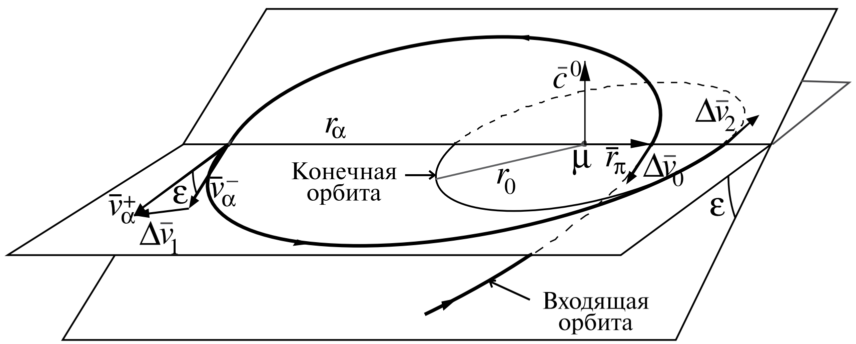


Рис. 9.6

Обозначим

$$\gamma_1 = \vec{e}_1 \cdot \vec{c}^{\,0},\ \gamma_2 = \vec{e}_{20} \cdot \vec{c}^{\,0},\ \gamma_3 = \vec{e}_{30} \cdot \vec{c}^{\,0} \tag{9.23}$$

— направляющие косинусы вектора $\vec{c}^{\,0}$ в системе, заданной ортами $\vec{e}_1$, $\vec{e}_{20}$, $\vec{e}_{30}$

$$\Rightarrow\ \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1\,. \tag{9.24}$$

<u>Параметры входящей орбиты</u>

Для совершения рассматриваемого маневра перицентр входящей гиперболической орбиты должен лежать в плоскости конечной круговой орбиты (см. рис. 9.6) $\Rightarrow \vec{r}_\pi \cdot \vec{c}^{\,0} = 0$

$\Rightarrow$ в силу (9.9), (9.8), (9.23)

$$\gamma_1 \cos\varphi - \gamma_2 \sin\varphi\cos\psi - \gamma_3 \sin\varphi\sin\psi = 0 \tag{9.25}$$

$\Rightarrow$ угол ψ может быть найден из (9.25) с учетом (9.24):

$$\operatorname{tg}\frac{\psi}{2} = \frac{\gamma_3 \sin\varphi \pm \sqrt{\sin^2\varphi - \gamma_1^2}}{\gamma_1\cos\varphi + \gamma_2\sin\varphi}\,, \tag{9.26}$$

$$\cos\psi = \frac{\gamma_1\gamma_2\sin\varphi \pm \gamma_3\sqrt{\sin^2\varphi - \gamma_1^2}}{\left(1-\gamma_1^2\right)\sin\varphi} \tag{9.27}$$

$\Rightarrow$ рассматриваемый трехимпульсный маневр возможен только при $\sin\varphi \geqslant \left|\gamma_1\right|$.

Пусть ε — угол между плоскостями начальной гиперболической и конечной круговой орбит (см. рис. 9.6) $\Rightarrow$ в силу (9.7), (9.12), (9.23)

$$\cos\varepsilon = \vec{e}_3 \cdot \vec{c}^{\,0} = -\gamma_2\sin\psi + \gamma_3\cos\psi\,. \tag{9.28}$$

Заметим, что уравнение (9.25) имеет два решения для ψ. Выбирается то из них, которое обеспечивает $\min\varepsilon$.

Углы ориентации входящей гиперболы даны в (9.13) с использованием (9.6)–(9.9), (9.12).

<u>Частный случай</u>

Пусть наклонение конечной круговой орбиты равно нулю, т. е.

$$\varepsilon = i\,,\quad \vec{c}^{\,0} = \pm\vec{z}^{\,0} = \{0, 0, \pm 1\}$$

$\Rightarrow$ в силу (9.23) $\gamma_1 = \sin\eta$, $\gamma_2 = 0$, $\gamma_3 = \cos\eta$

$$\Rightarrow \quad \cos\psi = \pm\frac{\sqrt{\sin^2\varphi - \sin^2\eta}}{\sin\varphi\cos\eta} \tag{9.29}$$

$\Rightarrow$ рассматриваемый трехимпульсный маневр возможен только если $\varphi \geqslant \eta$.

Соотношения (9.14), (9.29) дают:

$$\cos\varepsilon = \cos i = \pm\sqrt{1 - \frac{\sin^2\eta}{\sin^2\varphi}} \tag{9.30}$$

$$\Rightarrow \quad \sin\varepsilon = \sin i = \left|\frac{\sin\eta}{\sin\varphi}\right|, \ 0 \leqslant \varepsilon\ ,\ i \leqslant \frac{\pi}{2}. \tag{9.31}$$

<u>Величины импульсов</u>

Обозначим $\Delta v_i = \left|\Delta\vec{v}_i\right|$ $(i = 0, 1, 2)$. Импульс Δv_0 дается в (9.16). Пусть v_α^-, v_α^+ — скорости КА в апоцентре до и после импульса Δv_1 соответственно

$$\Rightarrow \quad v_\alpha^- = \sqrt{\frac{2\mu}{R + r_\alpha}\frac{r_\pi}{r_\alpha}}\ ,\quad v_\alpha^+ = \sqrt{\frac{2\mu}{r_0 + r_\alpha}\frac{r_0}{r_\alpha}}$$

(см. главу 6),

$$\boxed{\Delta v_1 = \sqrt{v_\alpha^{-2} + v_\alpha^{+2} - 2v_\alpha^- v_\alpha^+\cos\varepsilon}} \tag{9.32}$$

(см. рис. 9.6), где $\cos\varepsilon$ дается в (9.28) или (9.30).

Скорости на конечной круговой орбите до и после импульса Δv_2:

$$v_0^- = \sqrt{\frac{2\mu}{r_0 + r_\alpha}\frac{r_\alpha}{r_0}}\ ,\quad v_0^+ = \sqrt{\frac{\mu}{r_0}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Delta v_2 = \sqrt{\frac{2\mu}{r_0 + r_\alpha}\frac{r_\alpha}{r_0}} - \sqrt{\frac{\mu}{r_0}}} \tag{9.33}$$

Суммарный импульс равен

$$\Delta v = \Delta v_0 + \Delta v_1 + \Delta v_2 \tag{9.34}$$

10. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И КОРРЕКЦИЯ ОРБИТЫ

10.1. Ошибки выведения

Обозначим:

$\vec{x}_0$, $\vec{x}$ — векторы состояния космического аппарата (КА) в начальный момент времени t_0 и заданный момент времени t,

$$\vec{x} = \vec{x}\left(\vec{x}_0, t\right). \tag{10.1}$$

Пусть $\vec{x}_{0nom}$ — значение $\vec{x}_0$ для <u>номинальной</u> орбиты (рис. 10.1), достигающей цель полета. Истинные параметры запуска слегка отличаются от требуемых (номинальных) из-за <u>ошибок выведения</u>. Значение вектора состояния на истинной орбите:

$$\vec{x}_{0true} = \vec{x}_{0nom} + \Delta\vec{x}_0\ , \tag{10.2}$$

где $\Delta\vec{x}_0$ — вектор ошибок выведения.

Пусть $\Delta\vec{x}$ — ошибки вектора состояния $\vec{x}$ в момент времени t,

$$\Delta\vec{x} \approx \Phi\Delta\vec{x}_0\ , \tag{10.3}$$

$$\Phi = \Phi\left(t, t_0\right) = \frac{\partial\vec{x}}{\partial\vec{x}_0} \tag{10.4}$$

— <u>матрица изохронных производных</u>.

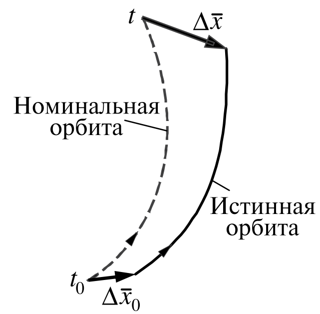


Рис. 10.1

10.2. Траекторные измерения

Траекторные измерения — измерения параметров орбиты с наземной станции.

Обозначим через $\vec{r}$ и $\vec{r}_s$ радиус-векторы КА и наземной станции,

$$\vec{\rho} = \vec{r} - \vec{r}_s = \left\{\rho_x, \rho_y, \rho_z\right\}$$

— положение КА относительно наземной станции (рис. 10.2).

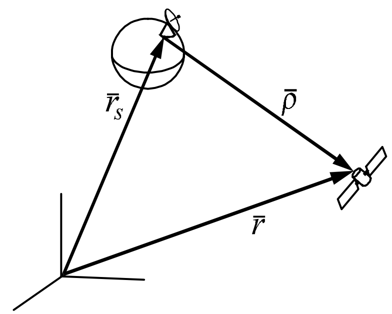


Рис. 10.2

Типы траекторных измерений:

$$\left.\begin{aligned} &\rho=|\vec\rho|=|\vec r-\vec r_s| && \text{– измерения дальности,}\\ &\dot\rho=\frac{\vec\rho\cdot\dot{\vec\rho}}{\rho}=\frac{(\vec r-\vec r_s)\cdot(\dot{\vec r}-\dot{\vec r}_s)}{|\vec r-\vec r_s|} && \text{– измерения радиальной скорости,}\\ &\vec\rho^{\,0}=\frac{\vec\rho}{\rho}=\frac{\vec r-\vec r_s}{|\vec r-\vec r_s|} && \text{– угловые измерения.}\end{aligned}\right\} \tag{10.5}$$

Единичный вектор $\vec\rho^{\,0}$ задает два угла (рис. 10.3):

$$\left.\begin{aligned} &\sin\delta=\rho_z^0,\\ &\cos\alpha=\frac{\rho_x^0}{\cos\delta},\quad \sin\alpha=\frac{\rho_y^0}{\cos\delta}.\end{aligned}\right\} \tag{10.6}$$

Этими углами являются:

• Для радиотехнических измерений:

азимут *a* (отсчитывается в местной горизонтальной плоскости от направления на север против часовой стрелки) и угол возвышения *e* (угол с местным горизонтом).

• Для оптических астрометрических наблюдений:

прямое восхождение α (этот угол отсчитывается в экваториальной плоскости Земли) и склонение δ (угол с плоскостью экватора Земли) (см. рис. 10.3).

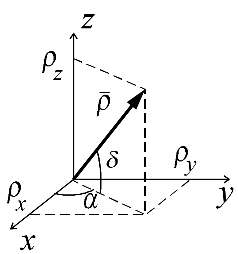


Рис. 10.3

10.3. Определение орбиты. Метод наименьших квадратов

Траекторные измерения содержат ошибки измерений. Обозначим:

$\tilde\psi, \psi_{\text{true}}$ — измеренные и истинные значения измеряемых параметров;

$\varepsilon=\tilde\psi-\psi_{\text{true}}$ — ошибка измерений (случайная величина).

Математическое ожидание:

$E(\varepsilon)=m$ — среднее значение;

$E\left[(\varepsilon-m)^2\right]=\sigma^2$, σ — среднеквадратическое отклонение.

Предположим, что $m=0$ и σ известно.

Постановка задачи:

Имеются *n* измерений (т. е. измеренных значений параметров)

$$\tilde{\vec\psi}=\left\{\tilde\psi_1,\ldots,\tilde\psi_n\right\}, \tag{10.7}$$

полученных в моменты времени $t_1,\ldots,t_n$ соответственно.
Задача заключается в определении орбиты по этим измерениям (рис. 10.4)

⇒ требуется найти $\vec x_0=\vec x(t_0)$ (искомые параметры).
Пусть

$$\psi_j=\psi(\vec x_j),\quad (j=1,\ldots,n) \tag{10.8}$$

— значения параметров, вычисленные для

$$\vec x_j=\vec x(\vec x_0,t_j),\quad (j=1,\ldots,n) \tag{10.9}$$

с использованием (10.5), (10.6),

σ_j ($j=1$, ..., n) — среднеквадратические отклонения ошибок измерений (10.7);

$$\boxed{L=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\tilde\psi_j-\psi_j}{\sigma_j}\right)^2} \tag{10.10}$$

— функция метода наименьших квадратов (МНК),

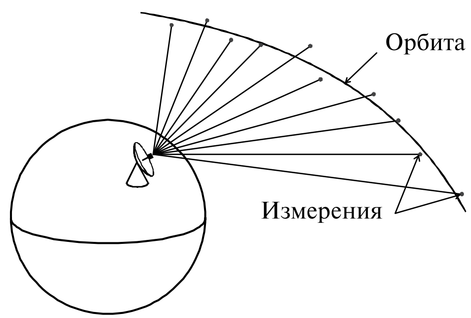


Рис. 10.4

$\dfrac{1}{\sigma_j^2}$ — вес j-го измерения.

Векторно-матричная форма функции (10.10):

$$\boxed{L = \left(\tilde{\vec{\psi}} - \vec{\psi}\right)^T W \left(\tilde{\vec{\psi}} - \vec{\psi}\right)} \qquad (10.11)$$

где $\tilde{\vec{\psi}} = \left\{\tilde{\psi}_1, ..., \tilde{\psi}_n\right\}$, $\vec{\psi} = \left\{\psi_1, ..., \psi_n\right\}$ — вектор измерений и вектор вычисленных параметров,

$$W = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sigma_1^2} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \dfrac{1}{\sigma_n^2} \end{bmatrix} \qquad (10.12)$$

— диагональная весовая матрица.

Частный случай: $\sigma_1 = \sigma_2 = ... = \sigma_n = 1$ (невзвешенные измерения)

$\Rightarrow$ $W = I$ — единичная матрица

$\Rightarrow$ $L = \sum\limits_{j=1}^{n}\left(\tilde{\psi}_j - \psi_j\right)^2 = \left(\tilde{\vec{\psi}} - \vec{\psi}\right)\cdot\left(\tilde{\vec{\psi}} - \vec{\psi}\right)$.

МНК дает значение $\vec{x}_0$, минимизирующее функцию L.

Необходимое условие минимума:

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{x}_0} = -2\left(\tilde{\vec{\psi}} - \vec{\psi}\right)^T W \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial \vec{x}_0} = \vec{0}^T. \qquad (10.13)$$

Определим матрицу

$$\Psi = \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial \vec{x}_0}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{y} \equiv \Psi^T W \left(\tilde{\vec{\psi}} - \vec{\psi}\right) = \vec{0}. \qquad (10.14)$$

Найдем j-ю строку матрицы Ψ:

$$\frac{\partial \psi_j}{\partial \vec{x}_0} = \frac{\partial \psi_j}{\partial \vec{x}_j}\frac{\partial \vec{x}_j}{\partial \vec{x}_0} = \frac{\partial \psi_j}{\partial \vec{x}_j}\Phi\left(t_j, t_0\right),$$

где $\dfrac{\partial \psi_j}{\partial \vec{x}_j}$ может быть найдено с помощью (10.5), (10.6);

$\Phi\left(t_j, t_0\right)$ — матрица изохронных производных (см. (10.4)).

Уравнение (10.14) может быть записано в виде

$$\vec{y}\left(\vec{x}_0\right) = \vec{0}. \qquad (10.15)$$

Для решения уравнения (10.15) применим метод Ньютона–Рафсона. Приближенно примем

$$\frac{\partial \vec{y}}{\partial \vec{x}_0} \approx -\Psi^T W \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial \vec{x}_0} = -\Psi^T W \Psi$$

(пренебрегаем производной Ψ по $\vec{x}_0$ в (10.14))

$\Rightarrow$ на i-й итерации метода

$$\boxed{\vec{x}_{0,i+1} = \vec{x}_{0i} + \left(\Psi_i^T W \Psi_i\right)^{-1} \Psi_i^T W \left(\tilde{\vec{\psi}} - \vec{\psi}_i\right) \ (i = 0, 1, ...)} \qquad (10.16)$$

где Ψ_i, $\vec{\psi}_i$ — значения Ψ, $\vec{\psi}$, вычисленные на $\vec{x}_{0i}$.

Обычно номинальное значение $\vec{x}_{0nom}$ принимается в качестве начального приближения процедуры (10.16).

Пусть $\vec{x}_0$ — решение уравнения (10.15), $\vec{x} = \vec{x}\left(\vec{x}_0\right)$ и $\vec{\psi} = \vec{\psi}\left(\vec{x}\right)$. Тогда

$\tilde{\vec{\psi}} - \vec{\psi}$ — вектор невязок, или O–C (observed — calculated).

10.4. Коррекция орбиты

После того как орбита определена методом наименьших квадратов, необходимо скорректировать ошибки выведения, чтобы достичь цели полета. Коррекция орбиты производится путем изменения скорости КА.

Пусть $\vec{r}$, $\vec{r}'$ — положения цели и КА в номинальное время прибытия t_a,

$\Delta\vec{r} = \vec{r}' - \vec{r}$

— промах. Представим матрицу изохронных производных в виде

$$\Phi\left(t_a, t_0\right) = \begin{bmatrix} R_{r0} & R_{v0} \\ V_{r0} & V_{v0} \end{bmatrix},$$

где

$$R_{r0} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vec{r}_0}, \quad R_{v0} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vec{v}_0}, \quad V_{r0} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{r}_0}, \quad V_{v0} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{v}_0}$$

— 3×3-матрицы. Тогда

$$\Delta \vec{r} \approx \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vec{x}_0} \Delta \vec{x}_0 = R_{r0} \Delta \vec{r}_0 + R_{v0} \Delta \vec{v}_0,$$

где $\Delta \vec{x}_0 = \begin{bmatrix} \Delta \vec{r}_0 \\ \Delta \vec{v}_0 \end{bmatrix}$ — вектор ошибок выведения.

Корректирующий импульс $\Delta \vec{v}$ прилагается в момент времени t_c (рис. 10.5):

$$-\Delta \vec{r} \approx R_{vc} \Delta \vec{v},$$

где $R_{vc} = \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial \vec{v}(t_c)}$ — 3×3-матрица

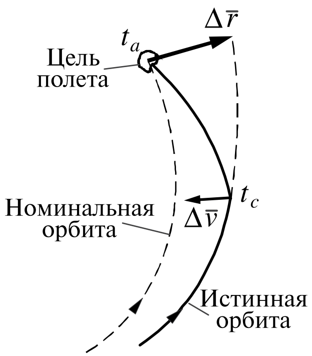


Рис. 10.5

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Delta \vec{v} \approx -R_{vc}^{-1} \Delta \vec{r}} \qquad (10.17)$$

Выбор времени t_c коррекции орбиты:

– орбита должна быть определена достаточно точно $\Rightarrow t_c > t_d$, где $t_d - t_0$ — интервал времени, необходимый для определения орбиты;

– величину Δv следует минимизировать $\Rightarrow t_c = \arg \min\limits_{t_d < t_c < t_a} \Delta v$.

10.5. Автономная навигация

Автономные измерения — измерения положения небесного тела, являющегося целью полета, с борта КА (например, по изображениям тела с помощью бортовой камеры); это может обеспечить значительно более точное определение движения КА относительно тела, чем наземные траекторные измерения. Изображения тела на фоне звезд дают точные угловые измерения. После того, как относительное движение определено, производится корректирующий маневр наведения.

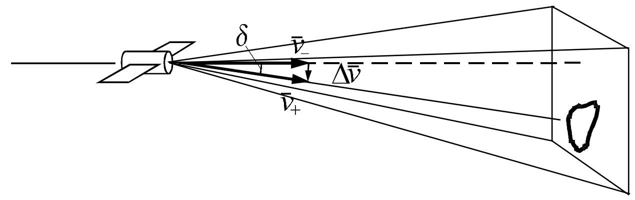


Рис. 10.6

Предположим, что движение КА относительно цели является равномерным и прямолинейным. Пусть δ — измеренное угловое отклонение тела

$\Rightarrow \quad \Delta v = 2v \sin \dfrac{\delta}{2} \approx v\delta$ (рис. 10.6).

Возможны два способа обработки данных автономной навигации:

– наземная обработка измерений и управление движением КА с Земли;

– обработка на борту КА и автоматическое управление (если время является критически коротким).

11. МАТРИЦА ИЗОХРОННЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

11.1. Используемые в главе формулы

В данной главе используются следующие соотношения:

$$\left.\begin{array}{l} \dot{s}=\dfrac{1}{r},\ s(t_0)=0, \\ s=\dfrac{\vec{r}\cdot\vec{v}-\vec{r}_0\cdot\vec{v}_0-h(t-t_0)}{\mu} \end{array}\right\} \text{– универсальная переменная,}$$
$$x=-hs^2,$$
$$c_n=c_n(x)\ (n=0,1,\ldots) \text{ – функции Штумпфа,}$$
$$h=v^2-\frac{2\mu}{r}=-\frac{\mu}{a} \text{ – интеграл энергии,}$$
$$\vec{c}=\vec{r}\times\vec{v} \text{ – интеграл площадей,} \tag{11.1}$$
$$\vec{l}=-\frac{\mu}{r}\vec{r}+\vec{v}\times\vec{c} \text{ – интеграл Лапласа,}$$
$$c=|\vec{c}|=\sqrt{r^2v^2-(\vec{r}\cdot\vec{v})^2},\ l=|\vec{l}|,$$
$$p=\frac{c^2}{\mu} \text{ – фокальный параметр,}$$
$$r=r_0c_0+\vec{r}_0\cdot\vec{v}_0sc_1+\mu s^2c_2$$

11.2. Уравнение в вариациях и сопряженное уравнение в вариациях

Рассмотрим вектор $\vec{x}=\vec{x}(t)=\{x_1,\ldots,x_n\}$, удовлетворяющий уравнению

$$\dot{\vec{x}}=\vec{f}(\vec{x}), \tag{11.2}$$

и вектор $\vec{y}=\vec{y}(\vec{x})=\{y_1,\ldots,y_n\}$. Обозначим

$$X=\frac{\partial\vec{x}}{\partial\vec{y}},\quad Y=\frac{\partial\vec{y}}{\partial\vec{x}} \tag{11.3}$$

и предположим, что матрица X невырожденна, т. е.

$$X^{-1}=Y. \tag{11.4}$$

Соотношения (11.2), (11.3) дают:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\vec{x}}{\partial\vec{y}}=\frac{\partial\vec{f}(\vec{x})}{\partial\vec{x}}\frac{\partial\vec{x}}{\partial\vec{y}}$$

$$\Rightarrow\ \boxed{\dot{X}=FX} \tag{11.5}$$

где

$$F=\frac{\partial\vec{f}(\vec{x})}{\partial\vec{x}}. \tag{11.6}$$

Уравнение (11.5) — <u>уравнение в вариациях</u>. Из очевидного равенства

$$\frac{\partial\vec{y}}{\partial\vec{x}}\frac{\partial\vec{x}}{\partial\vec{y}}=YX=I,$$

где I — единичная $n\times n$-матрица, следует:

$$\frac{d}{dt}(YX)=\dot{Y}X+Y\dot{X}=\dot{Y}X+YFX=0$$

$\Rightarrow$ так как X невырожденна, то

$$\boxed{\dot{Y}=-YF} \tag{11.7}$$

— <u>сопряженное уравнение в вариациях</u>.

Пусть $X_i=\dfrac{\partial\vec{x}}{\partial y_i}$ — столбцы матрицы X, $Y_i=\dfrac{\partial y_i}{\partial\vec{x}}$ — строки матрицы Y ($i=1,\ldots,n$). Очевидно, что все X_i удовлетворяют уравнению (11.5) и все Y_i удовлетворяют уравнению (11.7) $\Rightarrow$ для любого вектора $\vec{x}=\vec{x}(t)=\{x_1,\ldots,x_n\}$, удовлетворяющего (11.2), и укороченного вектора $\vec{y}'=\vec{y}'(\vec{x})=\{y_1,\ldots,y_m\}$ ($m<n$) матрица $\dfrac{\partial\vec{x}}{\partial\vec{y}'}$ удовлетворяет уравнению в вариациях (11.5) и матрица $\dfrac{\partial\vec{y}'}{\partial\vec{x}}$ удовлетворяет сопряженному уравнению в вариациях (11.7).

11.3. Определение матрицы изохронных производных

Рассмотрим движение в 3-мерном пространстве; пусть

$$\vec{x}_0 = \vec{x}(t_0) = \begin{bmatrix} \vec{r}_0 \\ \vec{v}_0 \end{bmatrix}, \quad \vec{x} = \vec{x}(t) = \begin{bmatrix} \vec{r} \\ \vec{v} \end{bmatrix}$$

— 6-мерные векторы состояния в начальный и текущий моменты времени, $\vec{x}$ удовлетворяет уравнению (11.2),

$$\boxed{\Phi = \Phi(t, t_0) = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{x}_0}} \tag{11.8}$$

— <u>матрица изохронных производных</u>,

$$\Phi_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial x_{0j}} \quad (i, j = 1, \ldots, 6).$$

Матрица Φ удовлетворяет уравнению в вариациях (11.5):

$$\boxed{\dot{\Phi} = F\Phi,\ \Phi(t_0, t_0) = I} \tag{11.9}$$

где I — единичная 6×6-матрица.

Для задачи двух тел в уравнении (11.2)

$$\vec{f}(\vec{x}) = \begin{bmatrix} \vec{v} \\ -\dfrac{\mu}{r^3}\vec{r} \end{bmatrix}$$

(см. главу 2) $\Rightarrow$ соотношение (11.6) дает

$$\boxed{F = \begin{bmatrix} 0 & I_3 \\ G & 0 \end{bmatrix}} \tag{11.10}$$

где I_3 — единичная 3×3-матрица,

$$\boxed{G = \frac{\mu}{r^3}\left(3\frac{\vec{r}\,\vec{r}^T}{r^2} - I_3\right)} \tag{11.11}$$

— симметричная 3×3-матрица.

<u>Замечание</u>. В этой главе матрица изохронных производных будет вычислена <u>только для задачи двух тел</u>.

11.4. Обратная матрица изохронных производных

Рассмотрим матрицу

$$\Phi^{-1} = \Phi(t_0, t) = \frac{\partial \vec{x}_0}{\partial \vec{x}}. \tag{11.12}$$

В силу (11.4), (11.5), (11.7) матрица Φ^{-1} удовлетворяет сопряженному уравнению в вариациях:

$$\frac{d}{dt}\Phi^{-1} = -\Phi^{-1}F, \quad \Phi^{-1}(t_0, t_0) = I. \tag{11.13}$$

Определим матрицу 6-го порядка

$$J = \begin{bmatrix} 0 & I_3 \\ -I_3 & 0 \end{bmatrix}. \tag{11.14}$$

Легко получить, что

$$J^{-1} = J^T = -J \ \Rightarrow\ JJ = -I. \tag{11.15}$$

<u>Теорема 11.1</u>. Матрица изохронных производных является симплектической, т. е.

$$\boxed{\Phi^T J \Phi = J \ \Rightarrow\ \Phi^{-1} = -J\Phi^T J} \tag{11.16}$$

<u>Доказательство</u>

Соотношения (11.10), (11.14) и $G^T = G$ дают

$$F^T J = \begin{bmatrix} -G & 0 \\ 0 & I_3 \end{bmatrix} = -JF. \tag{11.17}$$

В силу (11.9), (11.17)

$$\frac{d}{dt}J\Phi^T J = J\dot{\Phi}^T J = J\Phi^T F^T J = -J\Phi^T JF, \tag{11.18}$$

т. е. матрица $-J\Phi^{-1}J$ удовлетворяет (11.13).

Начальные условия в (11.9) и соотношения (11.15) дают

$$J\Phi^T(t_0, t_0)\,J = JJ = -I. \tag{11.19}$$

Соотношения (11.18), (11.19) доказывают теорему.

Представляя матрицу Φ в виде

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} \end{bmatrix}, \qquad (11.20)$$

можем записать (11.16) следующим образом:

$$\boxed{\Phi^{-1} = \begin{bmatrix} \Phi_{22}^T & -\Phi_{12}^T \\ -\Phi_{21}^T & \Phi_{11}^T \end{bmatrix}} \qquad (11.21)$$

11.5. Подход к вычислению матрицы изохронных производных

Пусть $\vec{q} = \vec{q}\left(\vec{x}\right)$ — 6-мерный вектор независимых первых интегралов

$\Rightarrow \quad \vec{q}\left(\vec{x}\right) = \vec{q}\left(\vec{x}_0\right)$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \vec{q}}{\partial \vec{x}} \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{x}_0} = \frac{\partial \vec{q}}{\partial \vec{x}_0}. \qquad (11.22)$$

Введем матрицу

$$A = A\left(t\right) = \frac{\partial \vec{q}}{\partial \vec{x}}, \quad A_0 = A\left(t_0\right) = \frac{\partial \vec{q}}{\partial \vec{x}_0} \qquad (11.23)$$

$\Rightarrow$ соотношения (11.8), (11.22), (11.23) дают

$$\boxed{\Phi = A^{-1} A_0} \qquad (11.24)$$

В силу (11.23) матрица A удовлетворяет сопряженному уравнению в вариациях (11.7):

$$\boxed{\dot{A} = -AF} \qquad (11.25)$$

Представим матрицу A в виде

$$A = \left[P \quad Q\right], \qquad (11.26)$$

где P, Q — 6×3-матрицы $\Rightarrow$ согласно (11.26), (11.10) уравнение (11.25) приводится к виду

$$\boxed{\dot{P} = -QG, \ \dot{Q} = -P} \qquad (11.27)$$

Соотношения (11.15), (11.16), (11.24) дают

$$A_0^{-1} A = -JA_0^T A^{T^{-1}} J \ \Rightarrow \ A_0^{-1} AJ = JA_0^T A^{T^{-1}} \ \Rightarrow \ AJA^T = A_0 J A_0^T$$

$$\Rightarrow \quad A^{-1} = JA^T K^{-1} \qquad (11.28)$$

где

$$K = A_0 J A_0^T \qquad (11.29)$$

— постоянная матрица.

11.6. Вычисление пяти строк матрицы *A*

Рассмотрим семь скалярных первых интегралов $\vec{c}$, $\vec{l}$, h, определяющих пять независимых первых интегралов (см. главу 2).

Введем постоянные векторы $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$ такие, что величины

$$q_1 = \vec{p}_1 \cdot \vec{c}, \quad q_2 = \vec{p}_2 \cdot \vec{c}, \quad q_3 = \vec{p}_1 \cdot \vec{l}, \quad q_4 = \vec{p}_2 \cdot \vec{l}, \quad q_5 = h \qquad (11.30)$$

являются независимыми. Представим матрицу A в виде

$$A = \begin{bmatrix} \vec{a}_1^T & \vec{b}_1^T \\ \cdots & \cdots \\ \vec{a}_6^T & \vec{b}_6^T \end{bmatrix}, \qquad (11.31)$$

где

$$\vec{a}_j^T = \frac{\partial q_j}{\partial \vec{r}}, \quad \vec{b}_j^T = \frac{\partial q_j}{\partial \vec{v}} \quad (j = 1, \ldots, 5) \qquad (11.32)$$

— строки матриц P, Q соответственно (см. (11.26)). Как следует из (11.27),

$$\dot{\vec{a}}_j = -G\vec{b}_j, \ \dot{\vec{b}}_j = -\vec{a}_j \ (j = 1, \ldots, 6).$$

Соотношения (11.30), (11.32) дают:

$$\left.\begin{aligned} &\vec{a}_i = \vec{v} \times \vec{p}_i, \ \vec{b}_i = \vec{p}_i \times \vec{r}, \\ &\vec{a}_{i+2} = \frac{\mu}{r^3} \vec{r} \times \left(\vec{p}_i \times \vec{r}\right) + \vec{v} \times \left(\vec{v} \times \vec{p}_i\right), \\ &\vec{b}_{i+2} = \vec{p}_i \times \vec{c} - \vec{r} \times \left(\vec{v} \times \vec{p}_i\right), \end{aligned}\right\} i = 1, 2 \qquad (11.33)$$

$$\vec{a}_5 = \frac{\mu}{r^3} \vec{r}, \ \vec{b}_5 = \vec{v}.$$

11.7. Нахождение шестой строки матрицы *A*

Теорема 11.2. Рассмотрим $2n$-мерную систему Гамильтона:

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}\left(\vec{x},t\right),\ \vec{x} = \begin{bmatrix}\vec{x}'\\ \vec{x}''\end{bmatrix},\ \vec{f} = \vec{f}\left(\vec{x},t\right) = \begin{bmatrix}\dfrac{\partial H}{\partial \vec{x}''}\\ -\dfrac{\partial H}{\partial \vec{x}'}\end{bmatrix},$$

$$\vec{x}' = \left\{x_1',\dots,x_n'\right\},\ \vec{x}'' = \left\{x_1'',\dots,x_n''\right\}.$$

Предположим, что известны независимые первые интегралы $q_1, \dots, q_{2n-1}$ и

$$A_i = \mathrm{grad}_{\vec{x}} q_i = \frac{\partial q_i}{\partial \vec{x}} \quad (i = 1,\dots,2n-1).$$

Рассмотрим матрицу A, состоящую из строк $A_1, \dots, A_{2n-1}$, и

$$A_{2n} = \left(\vec{\gamma} - \vec{f}\int_{t_0}^{t} \lambda\, dt\right)^T J\ , \tag{11.34}$$

где

$$J = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix},$$

$2n$-вектор $\vec{\gamma} = \vec{\gamma}\left(t\right)$ и функция $\lambda = \lambda(t)$ удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} &A_i\vec{\gamma} = d_i\ \ (i = 1,\dots,2n-1),\\ &\dot{\vec{\gamma}} - F\vec{\gamma} = \lambda\vec{f}, \end{aligned} \tag{11.35}$$

d_i — произвольные постоянные, $F = \dfrac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}}$.

В этом случае матрица A удовлетворяет сопряженному уравнению в вариациях

$$\dot{A} = -AF$$

и A является невырожденной тогда и только тогда, когда

$$\sum_{i=1}^{2n-1} d_i\lambda_i \neq 0\ , \tag{11.36}$$

где параметры λ_i определяются из

$$\sum_{i=1}^{2n-1} \lambda_i A_i = \mathrm{grad}_{\vec{x}} H = \frac{\partial H}{\partial \vec{x}}$$

(теорема дается без доказательства).

Согласно (11.31) строка A_6 записывается в виде

$$A_6 = \left[\vec{a}_6^T \quad \vec{b}_6^T\right].$$

С помощью (11.34), (11.35) можно получить, что

$$\vec{a}_6 = d_1\vec{a}_6' + d_2\vec{a}_6'',\quad \vec{b}_6 = d_1\vec{b}_6' + d_2\vec{b}''\ , \tag{11.37}$$

где d_1, d_2 — произвольные постоянные, удовлетворяющие неравенству

$$d_1 h + d_2 l^2 \neq 0 \tag{11.38}$$

((11.38) следует из (11.36)). Из теоремы 11.2 можно получить

$$\vec{a}_6' = -3\frac{\mu}{r^3}\tau\vec{r} + \vec{v},\ \vec{b}_6' = 2\vec{r} - 3\tau\vec{v}\ , \tag{11.39}$$

$$\vec{a}_6'' = \left(\mu\dot{r} - 2\frac{\mu}{r^3}S\right)\vec{r} + \dot{S}\vec{v},\quad \vec{b}_6'' = \dot{S}\vec{r} - 2S\vec{v}\ , \tag{11.40}$$

где

$$\tau = t - t_0\ ,\ S = c^2\tau - \mu\int_{t_0}^{t} r\,dt\ ,\ \dot{S} = c^2 - \mu r\ . \tag{11.41}$$

Выводы

В силу (11.38) постоянные d_1, d_2 могут быть заданы следующим образом:

Для заданной малой величины $\varepsilon > 0$:

1. Если $\left|h\right| \geqslant \varepsilon\dfrac{\mu}{r_0}$ (т. е. все орбиты, кроме параболических и околопараболических), то $d_1 = 1$, $d_2 = 0$ (т. е. 6-я строка матрицы A дается соотношениями (11.39)).

2. Если $\left|h\right| < \varepsilon\dfrac{\mu}{r_0}$ (т. е. параболические и околопараболические орбиты), то $d_1 = 0$, $d_2 = 1$ (т. е. 6-я строка матрицы A дается соотношениями (11.40)).

11.8. Вычисление интеграла $\int_{t_0}^{t} r\,dt$

Орбиты, отличные от параболических и околопараболических $\left(\left|h\right| \geqslant \varepsilon \dfrac{\mu}{r_0}\right)$.

Из (11.1) получим

$$r' = \frac{dr}{ds} = \frac{\dot r}{\dot s} = \vec r \cdot \vec v\ ,\ \ r'' = \frac{d^2 r}{ds^2} = \frac{v^2 - \dfrac{\mu}{r}}{\dot s} = hr + \mu\ . \tag{11.42}$$

Для вычисления интеграла в (11.41) используем формулу для фокального параметра (см. (11.1)) и (11.42):

$$p = \frac{r^2 v^2 - \left(\vec r \cdot \vec v\right)^2}{\mu} = 2r + \frac{hr^2}{\mu} - \frac{r'^2}{\mu}$$

$$\Rightarrow\ \ r^2 = \frac{\mu p}{h} - 2\frac{\mu r}{h} + \frac{r'^2}{h}\ . \tag{11.43}$$

Используя (11.43) и соотношение $dt = r\,ds$, получим

$$\int_0^t r\,dt = \int_0^s r^2 ds = \frac{\mu}{h} ps - 2\frac{\mu}{h}\int_0^s r\,ds + \frac{1}{h}\int_0^s r'^2 ds\ , \tag{11.44}$$

где

$$\int_0^s r'^2 ds = \int_{r_0}^r r' dr = rr' - r_0 r_0' - \int_0^s rr'' ds = rr' - r_0 r_0' - h\int_0^s r^2 ds - \mu\int_0^s r\,ds,$$

$$\int_0^s r\,ds = \int_{t_0}^t dt = \tau$$

$\Rightarrow$ соотношение (11.44) с учетом формулы для s (см. (11.1)) дает

$$\boxed{\int_{t_0}^t r\,dt = \frac{(r+p)r' - (r_0 + p)r_0' - (3\mu + ph)\tau}{2h}} \tag{11.45}$$

Параболические орбиты ($h = 0$)

На параболических орбитах $x = 0$ в (11.1)

$\Rightarrow$ первые три функции Штумпфа равны $c_0 = c_1 = 1,\ c_2 = \dfrac{1}{2}$

$$\Rightarrow\ \ r = r_0 + r_0' s + \frac{\mu s^2}{2}$$

$$\Rightarrow\ \ r^2 = r_0^2 + 2r_0 r_0' s + \left(r_0'^2 + \mu r_0\right)s^2 + \mu r_0' s^3 + \frac{\mu^2}{4}s^4$$

$$\Rightarrow\ \ \boxed{\int_{t_0}^t r\,dt = \int_0^s r^2 ds = r_0^2 s + r_0 r_0' s^2 + \frac{r_0'^2 + \mu r_0}{3}s^3 + \frac{\mu r_0'}{4}s^4 + \frac{\mu^2}{20}s^5} \tag{11.46}$$

где $s = \dfrac{r' - r_0'}{\mu}$.

Околопараболические орбиты $\left(\left|h\right| < \varepsilon \dfrac{\mu}{r_0}\right)$

Рассмотрим функцию

$$R(s) = \int_0^s r^2 ds = \int_{t_0}^t r\,dt\ . \tag{11.47}$$

Интеграл (11.47) может быть вычислен путем разложения значения $R(0)$ относительно $R(s)$ в ряд Тейлора с использованием соотношений

$$\frac{d^{2n-1} r}{ds^{2n-1}} = h^{n-1} r'\ ,\ \ \frac{d^{2n} r}{ds^{2n}} = h^{n-1} r''\ . \tag{11.48}$$

Окончательно можно получить

$$\boxed{\begin{aligned}\int_{t_0}^t r\,dt = r^2 s - rr's^2 + \frac{r'^2 + rr''}{3}s^3 - 2\mu s^4\left[r''sc_5(x) - r'c_4(x)\right] - \\ -8s^4\left[\left(hr'^2 + r''^2\right)sc_5(4x) - r'r''c_4(4x)\right]\end{aligned}} \tag{11.49}$$

11.9. Выбор векторов $\vec p_1$, $\vec p_2$ и обращение матрицы A

С помощью (11.31), (11.33), (11.37), (11.39), (11.40) вычислим матрицу (11.29):

$$K=\begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 & -k_2 & 0 & d_1m_1 \\ -k_1 & 0 & k_2 & 0 & 0 & d_1m_2 \\ 0 & -k_2 & 0 & -hk_1 & 0 & d_2n_1 \\ k_2 & 0 & hk_1 & 0 & 0 & d_2n_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -d_1h-d_2l^2 \\ -d_1m_1 & -d_1m_2 & -d_2n_1 & -d_2n_2 & d_1h+d_2l^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad (11.50)$$

где

$$k_1=\vec{c}\cdot\vec{p}_1\times\vec{p}_2,\ k_2=\vec{l}\cdot\vec{p}_1\times\vec{p}_2, \qquad (11.51)$$
$$m_i=\vec{c}\cdot\vec{p}_i,\ n_i=c^2\vec{l}\cdot\vec{p}_i\ \ (i=1,2).$$

В силу (11.28) матрица A невырожденна тогда и только тогда, когда невырожденна матрица K

$\Rightarrow$ задача заключается в выборе векторов $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$, обеспечивающих невырожденность матрицы (11.50).

Эллиптические и гиперболические орбиты $\left(l\neq 0,\ h\geqslant\varepsilon\dfrac{\mu}{r_0}\right)$

В этом случае $d_1=1$, $d_2=0$ (см. п. 11.7). Примем

$$\boxed{\vec{p}_1=\frac{\vec{l}}{l},\ \vec{p}_2=\frac{\vec{l}\times\vec{c}}{lc}} \qquad (11.52)$$

$\Rightarrow$ $k_1=-c$, $k_2=m_1=m_2=0$ (n_1, n_2 не используются)

$$\Rightarrow\ K^{-1}=\frac{1}{hc}\begin{bmatrix} 0 & h & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -h & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -c & 0 \end{bmatrix}$$

и (11.28), (11.31) дают

$$\boxed{A^{-1}=\frac{1}{hc}\begin{bmatrix} -h\vec{b}_2 & h\vec{b}_1 & \vec{b}_4 & -\vec{b}_3 & -c\vec{b}_6 & c\vec{b}_5 \\ h\vec{a}_2 & -h\vec{a}_1 & -\vec{a}_4 & \vec{a}_3 & c\vec{a}_6 & -c\vec{a}_5 \end{bmatrix}} \qquad (11.53)$$

Круговые, эллиптические и гиперболические орбиты $\left(h\geq\varepsilon\dfrac{\mu}{r_0}\right)$

В этом случае $d_1=1$, $d_2=0$ (см. п. 11.7). Примем

$$\boxed{\vec{p}_1=\frac{\vec{r}_0}{c},\ \vec{p}_2=\frac{\vec{v}_0}{c}} \qquad (11.54)$$

$\Rightarrow$ $k_1=1$, $k_2=m_1=m_2=0$ (n_1, n_2 не используются)

$$\Rightarrow\ K^{-1}=\frac{1}{h}\begin{bmatrix} 0 & -h & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

и (11.28), (11.31) дают

$$\boxed{A^{-1}=\frac{1}{h}\begin{bmatrix} h\vec{b}_2 & -h\vec{b}_1 & -\vec{b}_4 & \vec{b}_3 & -\vec{b}_6 & \vec{b}_5 \\ -h\vec{a}_2 & h\vec{a}_1 & \vec{a}_4 & -\vec{a}_3 & \vec{a}_6 & -\vec{a}_5 \end{bmatrix}} \qquad (11.55)$$

Параболические и околопараболические орбиты $\left(\left|h\right|<\varepsilon\dfrac{\mu}{r_0}\right)$

В этом случае $d_1=0$, $d_2=1$ (см. п. 11.7). Примем

$$\boxed{\vec{p}_1=\frac{\vec{c}}{c},\ \vec{p}_2=\frac{\vec{l}\times\vec{c}}{l^2c}} \qquad (11.56)$$

$\Rightarrow$ $k_1=0$, $k_2=1$, $n_1=n_2=0$ (m_1, m_2 не используются)

$$\Rightarrow\ K^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

и (11.28), (11.31) дают

$$\boxed{A^{-1}=\begin{bmatrix} -\vec{b}_4 & \vec{b}_3 & -\vec{b}_2 & \vec{b}_1 & -\vec{b}_6 & \vec{b}_5 \\ \vec{a}_4 & -\vec{a}_3 & \vec{a}_2 & -\vec{a}_1 & \vec{a}_6 & -\vec{a}_5 \end{bmatrix}} \qquad (11.57)$$

12. ОПТИМИЗАЦИЯ ОРБИТАЛЬНЫХ МАНЕВРОВ

12.1. Постановка общей задачи оптимизации

Уравнение движения:

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}\left(\vec{x}, \vec{u}\right), \tag{12.1}$$

где

$$\vec{x} = \left\{x^0, x^1, \ldots, x^n\right\} \in X \text{ — вектор состояния,} \tag{12.2}$$

$$\vec{u} = \left\{u^1, \ldots, u^m\right\} \in U \text{ — управление,} \tag{12.3}$$

$$\vec{f} = \vec{f}\left(\vec{x}, \vec{u}\right) = \left\{f^0, f^1, \ldots, f^n\right\}. \tag{12.4}$$

Предположим, что

$\vec{f}$, $\dfrac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}}$ — непрерывные функции в $X \times U$,

$\vec{u} = \vec{u}(t)$ — кусочно-непрерывная функция.

Пусть t_0, t_1 — начальный и конечный моменты времени и вектор

$$\vec{x}\left(t_0\right) = \vec{x}_0 = \left\{x_0^0, x_0^1, \ldots, x_0^n\right\} \tag{12.5}$$

задан. Обозначим

$$\vec{x}\left(t_1\right) = \vec{x}_1 = \left\{x_1^0, x_1^1, \ldots, x_1^n\right\} \tag{12.6}$$

($\vec{x}_1$ не обязательно задан).

Будут рассмотрены следующие случаи:

1) t_1 не задано (т. е. значение t_1 также оптимизируется);

2) t_1 задано.

Предположим, что минимизируется функционал (целевая функция, критерий оптимальности)

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f^0\left(\vec{x}, \vec{u}\right) dt. \tag{12.7}$$

Из (12.1), (12.2), (12.4)−(12.6) получим

$$J = x_1^0 - x_0^0. \tag{12.8}$$

Задача оптимизации:

Найти управление $\vec{u} = \vec{u}(t)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant t_1)$, обеспечивающее переход из $\vec{x}_0$ в $\vec{x}_1$ и минимизирующее функционал (12.7)

12.2. Принцип максимума Понтрягина

Рассмотрим векторную переменную

$$\vec{p} = \left\{p_0, p_1, \ldots, p_n\right\}, \tag{12.9}$$

удовлетворяющую сопряженному уравнению в вариациях

$$\dot{\vec{p}}^T = -\vec{p}^T \frac{\partial \vec{f}\left(\vec{x}, \vec{u}\right)}{\partial \vec{x}}; \tag{12.10}$$

$\vec{p}$ — вектор сопряженных переменных.

Если управление $\vec{u} = \vec{u}\left(t\right)$ выбрано, то существует решение $\vec{x} = \vec{x}(t)$ уравнения (12.1) и матрица $\partial \vec{f} / \partial \vec{x}$ в (12.10) является известной функцией времени $\Rightarrow$ существует решение уравнения (12.10):

$$\vec{p} = \vec{p}\left(t\right).$$

Определим гамильтониан

$$\boxed{H = H\left(\vec{x}, \vec{p}, \vec{u}\right) = \vec{p}^T \vec{f} = \sum_{i=0}^{n} p_i f^i} \tag{12.11}$$

$\Rightarrow$ в силу (12.1), (12.10)

$$\boxed{\dot{\vec{x}} = \left(\frac{\partial H}{\partial \vec{p}}\right)^T, \ \dot{\vec{p}} = -\left(\frac{\partial H}{\partial \vec{x}}\right)^T} \tag{12.12}$$

Теорема 12.1 (принцип максимума Понтрягина). Пусть $\vec{u}_{opt} = \vec{u}_{opt}(t)$ — оптимальное управление, переводящее $\vec{x}_0$ в $\vec{x}_1$ за время $t_1 - t_0$. Тогда:

1°. $H_{opt} = H\left[\vec{x}\left(t\right), \vec{p}\left(t\right), \vec{u}_{opt}\left(t\right)\right] = \max\limits_{\vec{u} \in U} H\left(\vec{x}, \vec{p}, \vec{u}\right)$;

2°. $H_{opt} = \text{const}$ для $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$;

3°. Если t_1 не задано, то $H_{opt} = 0$ для $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ и $f_0(t_1) = 0$;

4°. $p_0(t_1) < 0$.

Доказательство

1°. (только для заданного t_1 и свободного $\vec{x}_1$). Рассмотрим бесконечно малый интервал времени $\tau-\varepsilon \leqslant t \leqslant \tau$ ($t_0<\tau<t_1$, $\varepsilon>0$ бесконечно мало) и вариацию $\delta\vec{u}(t)$ оптимального управления на этом интервале:

$$\vec{u}(t)=\begin{cases}\vec{u}_{opt}(t), \text{ если } t_0 \leqslant t<\tau-\varepsilon \text{ или } \tau<t \leqslant t_1 \\ \vec{u}_{opt}(t)+\delta\vec{u}(t), \text{ если } \tau-\varepsilon \leqslant t \leqslant \tau\end{cases} \tag{12.13}$$

($\delta\vec{u}(t)$ может иметь конечное значение). Обозначим вариацию вектора $\vec{x}(t)$, вызванную вариацией $\delta\vec{u}(t)$, через

$$\delta\vec{x}(t)=\vec{x}(t)-\vec{x}_{opt}(t)$$

($\delta\vec{x}(t)$ для $t<\tau-\varepsilon$).

$$\delta\vec{x}(\tau)=\left[\dot{\vec{x}}(\tau)-\dot{\vec{x}}_{opt}(\tau)\right]\varepsilon+o(\varepsilon). \tag{12.14}$$

В силу (12.1)

$$\delta\vec{x}(\tau)=\left[\vec{f}\left(\vec{x}(\tau),\vec{u}(\tau)\right)-\vec{f}\left(\vec{x}_{opt}(\tau),\vec{u}_{opt}(\tau)\right)\right]\varepsilon+o(\varepsilon). \tag{12.15}$$

Обозначим

$$\vec{f}_{\text{opt}}=\vec{f}\left(\vec{x}_{opt}(\tau),\ \vec{u}_{opt}(\tau)\right)$$

и рассмотрим некоторый момент времени $t>\tau$:

$$\dot{\vec{x}}(t)=\dot{\vec{x}}_{opt}(t)+\delta\dot{\vec{x}}(t)=\vec{f}_{opt}+\left.\frac{\partial\vec{f}}{\partial\vec{x}}\right|_{opt}\delta\vec{x}(t)$$

$$\Rightarrow\quad \delta\dot{\vec{x}}(t)=\left.\frac{\partial\vec{f}}{\partial\vec{x}}\right|_{opt}\delta\vec{x}(t) \tag{12.16}$$

(уравнение в вариациях) $\Rightarrow$ в силу (12.10, 12.16)

$$\frac{d}{dt}\vec{p}^{\,T}\delta\vec{x}=-\vec{p}^{\,T}\frac{\partial\vec{f}}{\partial\vec{x}}\delta\vec{x}+\vec{p}^{\,T}\frac{\partial\vec{f}}{\partial\vec{x}}\delta\vec{x}=\vec{0}$$

$$\Rightarrow\quad \vec{p}^{\,T}\delta\vec{x}=\text{const}\Rightarrow\vec{p}^{\,T}(t_1)\,\delta\vec{x}(t_1)=\vec{p}^{\,T}(\tau)\,\delta\vec{x}(\tau). \tag{12.17}$$

Зададим

$$p_0(t_1)=-1,\quad p_1(t_1)=\ldots=p_n(t_1)=0 \tag{12.18}$$

$\Rightarrow$ с учетом (12.8) получим

$$\vec{p}^{\,T}(t_1)\,\delta\vec{x}(t_1)=-\delta x^0(t_1)=-\delta J\ ; \tag{12.19}$$

$$\delta J=J-J_{\text{opt}}\geqslant 0\ \Rightarrow\ \vec{p}^{\,T}(t_1)\,\delta\vec{x}(t_1)\leqslant 0\ \Rightarrow \text{в силу (12.17)}$$

$$\vec{p}^{\,T}(\tau)\,\delta\vec{x}(\tau)\leqslant 0\,. \tag{12.20}$$

Соотношения (12.15), (12.20) дают (так как $\varepsilon>0$)

$$\vec{p}^{\,T}(\tau)\vec{f}\left(x(\tau),\ \vec{u}(\tau)\right)\leqslant\vec{p}^{\,T}(\tau)\vec{f}\left(x_{opt}(\tau),\ \vec{u}_{opt}(\tau)\right)$$

$\Rightarrow$ в силу (12.11)

$$H\left(\vec{x}(\tau),\vec{p}(\tau),\ \vec{u}(\tau)\right)\leqslant H\left(\vec{x}_{opt}(\tau),\ \vec{p}(\tau),\ \vec{u}_{opt}(\tau)\right).$$

Так как τ — произвольное время, то для любого t

$$H_{opt}=H\left(\vec{x}_{opt}(t),\ \vec{p}(t),\vec{u}_{opt}(t)\right)=\max_{\vec{u}\in U}H\left(\vec{x},\vec{p},\vec{u}\right)$$

$$\Rightarrow\quad \boxed{\left.\frac{\partial H}{\partial\vec{u}}\right|_{\vec{u}=\vec{u}_{opt}}=\vec{0}} \tag{12.21}$$

2°. Уравнения (12.12), (12.21) дают

$$\dot{H}_{opt}=\frac{\partial H_{opt}}{\partial\vec{x}}\dot{\vec{x}}+\frac{\partial H_{opt}}{\partial\vec{p}}\dot{\vec{p}}+\frac{\partial H_{opt}}{\partial\vec{u}}\dot{\vec{u}}=$$

$$=\frac{\partial H_{opt}}{\partial\vec{x}}\left(\frac{\partial H_{opt}}{\partial\vec{p}}\right)^T-\frac{\partial H_{opt}}{\partial\vec{p}}\left(\frac{\partial H_{opt}}{\partial\vec{x}}\right)^T=0$$

$$\Rightarrow\quad \boxed{H_{opt}=\text{const}} \tag{12.22}$$

3°. Пусть время t_1 не задано; предположим, что значение

$$t_1=t_{opt} \tag{12.23}$$

обеспечивает $\min J$

$$\Rightarrow\quad \left.\frac{dJ}{dt}\right|_{t=t_{opt}}=f_0\left(t_{opt}\right)=0 \tag{12.24}$$

$\Rightarrow$ в силу (12.23), (12.24)

$$\boxed{f_0(t_1)=0}$$

Теперь задача сведена к задаче с заданным $t_1 \Rightarrow$ применимы полученные выше результаты $\Rightarrow$ в силу (12.18)

$$H_{opt}\left(t_{opt}\right) = -f_0\left(t_{opt}\right) = 0$$

$\Rightarrow$ в силу (12.22)

$$\boxed{H_{opt}\left(t\right) = 0}$$

4°. $p_0(t_1) < 0$ в силу (12.18).

Замечание. Умножение $\vec{p}(t)$ (и следовательно H) на произвольную постоянную $c > 0$ не меняет выводы теоремы 12.1 $\Rightarrow$ ниже можно принять

$$\boxed{p_0\left(t_1\right) = -1} \tag{12.25}$$

Частные случаи

1. $\vec{f}\left(\vec{x}, \vec{u}\right)$ не зависит от x^0

$\Rightarrow$ в силу (12.11), (12.12) $\dot{p}_0\left(t\right) = 0 \Rightarrow p_0\left(t\right) \equiv -1 \quad (t_0 \leqslant t \leqslant t_1)$

$$\Rightarrow \boxed{H = -f^0 + \sum_{i=1}^{n} p_i f^i} \tag{12.26}$$

2. Задача наименьшего времени:

$$J = t_1 - t_0 \Rightarrow f^0\left(\vec{x}, \vec{u}\right) \equiv 1$$

$$\Rightarrow \boxed{H = -1 + \sum_{i=1}^{n} p_i f^i} \tag{12.27}$$

12.3. Неавтономная система

Пусть уравнение для $\vec{x}$ имеет вид

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}\left(\vec{x}, \vec{u}, t\right)$$

(неавтономная система). Введем новую переменную

$$\dot{x}^{n+1} = 1, \quad x^{n+1}\left(t_0\right) = t_0 \Rightarrow x^{n+1} = t$$

и рассмотрим расширенные векторы $\vec{x}$, $\vec{f}$:

$$\tilde{\tilde{x}} = \left\{x^0, \ldots, x^n, x^{n+1}\right\}, \quad \tilde{\tilde{f}} = \left\{f^0, \ldots, f^n, 1\right\}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{\tilde{\tilde{x}}} = \tilde{\tilde{f}}\left(\tilde{\tilde{x}}, \vec{u}\right)$$

— автономная система $\Rightarrow$ задача сведена к решенной выше.

12.4. Условия трансверсальности

Рассмотрим укороченные векторы

$$\hat{\hat{x}} = \left\{x^1, \ldots, x^n\right\}, \quad \hat{\hat{p}} = \left\{p_1, \ldots, p_n\right\}$$

и обобщенные граничные условия

$$\hat{\hat{x}}_0 = \hat{\hat{x}}\left(t_0\right) \in X_0, \quad \hat{\hat{x}}_1 = \hat{\hat{x}}\left(t_1\right) \in X_1; \tag{12.28}$$

здесь X_0, X_1 — многообразия, задаваемые уравнениями

$$X_0 : \vec{g}_0\left(\hat{\hat{x}}_0\right) = \vec{0}, \quad X_1 : \vec{g}_1\left(\hat{\hat{x}}_1\right) = \vec{0}, \tag{12.29}$$

где

$$\vec{g}_0 = \vec{g}_0\left(\hat{\hat{x}}_0\right) = \left\{g_0^1, \ldots, g_0^{m_0}\right\}, \quad \vec{g}_1 = \vec{g}_1\left(\hat{\hat{x}}_1\right) = \left\{g_1^1, \ldots, g_1^{m_1}\right\}.$$

(В силу (12.8) значение x_0^0 должно быть задано и x_1^0 определяется из $\min J$.)

Теорема 12.2 (условия трансверсальности). Если $\vec{u}(t)$ — оптимальное управление, переводящее объект из $\hat{\hat{x}}_0$ в $\hat{\hat{x}}_1$ при заданных ограничениях (12.28), то $\hat{\hat{p}}\left(t_0\right)$, $\hat{\hat{p}}\left(t_1\right)$ ортогональны соответственно X_0, X_1.

Другими словами,

$$\begin{aligned}
\hat{\hat{p}}\left(t_0\right) &= \sum_{i=1}^{m_0} c_0^i \left(\left.\frac{\partial g_0^i}{\partial \hat{\hat{x}}}\right|_{t_0}\right)^T = \left(\left.\frac{\partial \vec{g}_0}{\partial \hat{\hat{x}}}\right|_{t_0}\right)^T \vec{c}_0, \\
\hat{\hat{p}}\left(t_1\right) &= \sum_{i=1}^{m_1} c_1^i \left(\left.\frac{\partial g_1^i}{\partial \hat{\hat{x}}}\right|_{t_1}\right)^T = \left(\left.\frac{\partial \vec{g}_1}{\partial \hat{\hat{x}}}\right|_{t_1}\right)^T \vec{c}_1,
\end{aligned} \tag{12.30}$$

где

$$\vec{c}_0 = \left\{c_0^1, \ldots, c_0^{m_0}\right\},\ \vec{c}_1 = \left\{c_1^1, \ldots, c_1^{m_1}\right\}$$

— произвольные постоянные векторы

$$\Rightarrow\quad p_i\left(t_0\right) = \left(\left.\frac{\partial \vec{g}_0}{\partial x_i}\right|_{t_0}\right)^T \vec{c}_0,\ p_i\left(t_1\right) = \left(\left.\frac{\partial \vec{g}_1}{\partial x_i}\right|_{t_1}\right)^T \vec{c}_1 \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{12.31}$$

<u>Доказательство</u>

В силу (12.17), (12.20)

$$\vec{p}^T \delta\vec{x} \leqslant 0$$

для любого $t \in \left[t_0, t_1\right]$; также

$$\left.\frac{\partial J}{\partial \vec{x}}\right|_{J = J_{opt}} = \vec{0}$$

$\Rightarrow$ $\vec{p}^T d\vec{x} = 0$ для бесконечно малой вариации $d\vec{x} = \vec{x}' - \vec{x}$

$$\Rightarrow\quad \vec{p}^T\left(t_0\right) d\vec{x}\left(t_0\right) = \vec{p}^T\left(t_1\right) d\vec{x}\left(t_1\right) = 0, \tag{12.32}$$

$dx_0^0 = 0$ (так как значение x_0^0 задано), $dx_1^0 = dJ = 0$

$\Rightarrow$ (12.32) выполняется также для укороченных векторов $\hat{\vec{p}}, \hat{\vec{x}}$, т. е.

$$\hat{\vec{p}}^T\left(t_0\right) d\hat{\vec{x}}\left(t_0\right) = \hat{\vec{p}}^T\left(t_1\right) d\hat{\vec{x}}\left(t_1\right) = 0. \tag{12.33}$$

Векторы $\left(\frac{\partial g_j^1}{\partial \hat{\vec{x}}}\right)^T, \ldots, \left(\frac{\partial g_j^n}{\partial \hat{\vec{x}}}\right)^T$ ортогональны X_j в $\hat{\vec{x}}$ ($j = 0, 1$);

$d\hat{\vec{x}} \in T_j$, где T_j — касательная плоскость к X_j в $\hat{\vec{x}}$ ($j = 0, 1$);

$$\left(\vec{g}_j\left(\hat{\vec{x}}'\right) - \vec{g}_j\left(\hat{\vec{x}}\right) = \frac{\partial \vec{g}_j}{\partial \hat{\vec{x}}} d\hat{\vec{x}} = 0\right).$$

Равенства (12.33) выполняются для любого $d\hat{\vec{x}} \in T_j$ ($j = 0, 1$)

$$\Rightarrow\quad \hat{\vec{p}}\left(t_j\right) = \sum_{i=1}^{m_0} c_j^i \left(\frac{\partial g_j^i}{\partial \hat{\vec{x}}}\right)^T = \left(\frac{\partial \vec{g}_j}{\partial \hat{\vec{x}}}\right)^T \vec{c}_j \quad (j = 0, 1).$$

<u>Частные случаи</u>

Определим индекс $j = 0$ или 1.

1. $m_j = 1$, т. е. j-е граничное условие является скалярным:

$$g_j\left(\hat{\vec{x}}_0\right) = 0$$

(многообразие X_j является гиперповерхностью)

$$\Rightarrow\quad \hat{\vec{p}}\left(t_j\right) = c_j \left(\left.\frac{\partial g_j}{\partial \hat{\vec{x}}}\right|_{t_j}\right)^T.$$

2. $m_j = n$ и

$$\vec{g}_j\left(\hat{\vec{x}}_j\right) = A\hat{\vec{x}}_j - \vec{b} = \vec{0},$$

где A — невырожденная n-матрица, $\vec{b}$ — некоторый n-вектор

$\Rightarrow$ $\hat{\vec{x}}\left(t_j\right) = A^{-1}\vec{b} = \hat{\vec{x}}_j$,

т. е. многообразие X_j — точка (см. (12.5), (12.6))

$\Rightarrow$ $\vec{p}\left(t_j\right) = A^T \vec{c}$ — произвольный вектор.

3. $m_j = m$, $1 \leqslant m < n$ и m координат заданы:

$$g_j^i = x^i\left(t_j\right) - x_j^i = 0 \quad (i = 1, \ldots, m)$$

$$\Rightarrow\quad \left.\frac{\partial \vec{g}_j}{\partial \hat{\vec{x}}}\right|_{t_j} = \begin{bmatrix} 1 & & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & & \\ 0 & & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ в силу (12.31) $p_i\left(t_j\right) = c_i$ $(i = 1, \ldots, m)$, $p_i\left(t_j\right) = 0$ $(i = m + 1, \ldots, n)$

$\Rightarrow$ $p_1\left(t_j\right), \ldots, p_m\left(t_j\right)$ могут принимать любые значения и

$$\boxed{p_{m+1}\left(t_j\right) = \ldots = p_n\left(t_j\right) = 0} \tag{12.34}$$

4. Ограничения на j-м конце отсутствуют (т. е. $m_j = 0$).

$$\boxed{\text{Если } \hat{x}_j \text{ не задан, то } \hat{\vec{p}}\left(t_j\right) = \vec{0}}$$

$\Rightarrow$ если $\hat{\dot{x}}_1$ не задан, то (12.18) — необходимое условие оптимальности.

12.5. Принцип максимума для реактивного движения

Обозначим:
$m=m(t)$ — текущая масса КА ($t_0 \leqslant t \leqslant t_1$);
$m_0=m(t_0)$, $m_1=m(t_1)$;
$m_p=m_p(t)=m_0-m$ — масса топлива, израсходованная до t;

$$\dot{m}=\frac{dm}{dt}\leqslant 0\,;$$

$$\dot{m}_p=\frac{dm_p}{dt}=-\dot{m}\geqslant 0$$ — расход топлива в единицу времени;

$u=\text{const}$; — скорость истечения;

$\vec{\alpha}=\vec{\alpha}(t)$, — вектор реактивного ускорения;

$$\alpha=\left|\vec{\alpha}\right|=\frac{\dot{m}_p u}{m}=\frac{\dot{m}_p u}{m_0-m_p} \tag{12.35}$$

(см. (6.9)); $\vec{\alpha}$ — управление, т. е. $\vec{u}\equiv\vec{\alpha}$.

Пусть

$$0\leqslant \dot{m}_p \leqslant \gamma \tag{12.36}$$

$$\Rightarrow \quad 0\leqslant \alpha \leqslant \frac{\gamma u}{m_0-m_p}\,. \tag{12.37}$$

Уравнения движения:

$$\boxed{\begin{aligned}\dot{\vec{r}}&=\vec{v}\\ \dot{\vec{v}}&=\vec{f}_v+\vec{\alpha}\end{aligned}} \tag{12.38}$$

где $\vec{f}_v=\vec{f}_v\left(\vec{r}\right)$ — ускорение, вызванное внешними силами (случай $\vec{f}_v=\vec{f}_v\left(\vec{r},\vec{v}\right)$ не рассматривается).

Для задачи двух тел

$$\vec{f}_v=-\frac{\mu}{r^3}\vec{r}\,.$$

Зададим минимизируемый функционал следующим образом:

$$J=m_p\left(t_1\right)=\int_{t_0}^{t_1}\dot{m}_p\,dt \tag{12.39}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{x}\left(t\right)=\left\{x^0,x^1,\ldots,x^6\right\}=\left\{m_p,\vec{r},\vec{v}\right\}; \tag{12.40}$$

$$x^0\left(t_0\right)=m_p\left(t_0\right)=0\,,\; x^0\left(t_1\right)=m_p\left(t_1\right)=J\,.$$

Гамильтониан:

$$H=p_0\dot{m}_p+\vec{p}_r^{\,T}\vec{v}+\vec{p}_v^{\,T}\vec{f}_v+\vec{p}_v^{\,T}\vec{\alpha}\,, \tag{12.41}$$

$$\vec{p}=\left\{p_0,\vec{p}_r,\vec{p}_v\right\}.$$

<u>Оптимальное направление тяги</u>

В силу (12.41) $\max\limits_{\vec{\alpha}} H$ достигается при $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{p}_v$

$\Rightarrow$ в силу (12.35)

$$\vec{\alpha}=\frac{\dot{m}_p u}{m}\frac{\vec{p}_v}{p_v}\,, \tag{12.42}$$

где $p_v=\left|\vec{p}_v\right|$. Вектор $\vec{p}_v$ — <u>базис-вектор Лоудена</u>.

Оптимальная тяга всегда направлена вдоль базис-вектора

$$\Rightarrow \quad \vec{p}_v^{\,T}\vec{\alpha}=p_v\alpha$$

$$\Rightarrow \quad H=p_0\dot{m}_p+\vec{p}_r^{\,T}\vec{v}+\vec{p}_v^{\,T}\vec{f}_v+p_v\alpha\,. \tag{12.43}$$

Соотношения (12.12), (12.41) дают

$$\begin{aligned}\dot{\vec{p}}_r&=-\left(\frac{\partial H}{\partial \vec{r}}\right)^T=-\left(\frac{\partial \vec{f}_v}{\partial \vec{r}}\right)^T\vec{p}_v,\\ \dot{\vec{p}}_v&=-\left(\frac{\partial H}{\partial \vec{v}}\right)^T=-\vec{p}_r\end{aligned} \tag{12.44}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\ddot{\vec{p}}_v=\left(\frac{\partial \vec{f}_v}{\partial \vec{r}}\right)^T\vec{p}_v} \tag{12.45}$$

$\vec{r}=\vec{r}(t)$ — непрерывная функция

$\Rightarrow$ $\vec{f}_v(\vec{r})$, $\dfrac{\partial \vec{f}_v(\vec{r})}{\partial \vec{r}}$ — непрерывные функции времени

$\Rightarrow$ в силу (12.45) $\boxed{\vec{p}_v, \dot{\vec{p}}_v, \ddot{\vec{p}}_v \text{ – непрерывные функции времени}}$

Для задачи двух тел

$$\frac{\partial \vec{f}_v}{\partial \vec{r}} = \left(\frac{\partial \vec{f}_v}{\partial \vec{r}}\right)^T = \frac{\mu}{r^3}\left(3\frac{\vec{r}\,\vec{r}^T}{r^2} - I_3\right) = G \tag{12.46}$$

(см. (11.11))

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\vec{p}}_v = G\vec{p}_v} \tag{12.47}$$

Оптимальная величина тяги

Соотношения (12.35), (12.43) дают

$$H = \varkappa \dot{m}_p + \vec{p}_r^T \vec{v} + \vec{p}_v^T \vec{f}_v, \tag{12.48}$$

где

$$\varkappa = \varkappa(t) = p_0 + \frac{p_v u}{m}. \tag{12.49}$$

В силу (12.36), (12.48) $\max\limits_{\dot{m}_p} H$ достигается при

$$\boxed{\begin{array}{llll} \varkappa > 0 & \Rightarrow & \dot{m}_p = \gamma & \text{(максимальная тяга),} \\ \varkappa < 0 & \Rightarrow & \dot{m}_p = 0 & \text{(нулевая тяга),} \\ \varkappa = 0 & \Rightarrow & 0 \leqslant \dot{m}_p \leqslant \gamma & \text{(промежуточная тяга)} \end{array}} \tag{12.50}$$

(рис. 12.1).

Из (12.12), (12.48) с учетом равенств

$$m = m_0 - m_p, \quad \dot{m} = -\dot{m}_p$$

получим

$$\dot{p}_0 = -\frac{\partial H}{\partial m_p} = \frac{p_v u \dot{m}_p}{(m_0 - m_p)^2} = -p_v u \frac{\dot{m}}{m^2} = -p_v u \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{m}\right) = \frac{\dot{p}_v u}{m} - \frac{d}{dt}\left(\frac{p_v u}{m}\right). \tag{12.51}$$

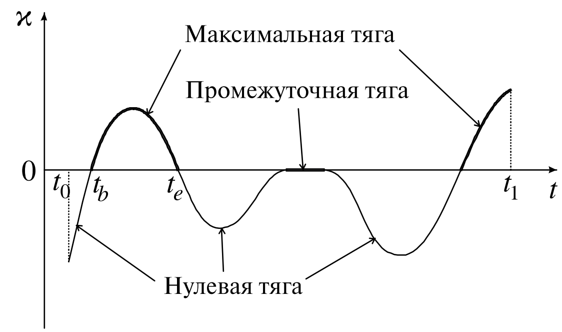


Рис. 12.1

$\Rightarrow$ (12.49) дает

$$\boxed{\dot{\varkappa} = \frac{\dot{p}_v u}{m}} \tag{12.52}$$

$\varkappa = \varkappa(t)$ — функция переключения.

Согласно теореме 12.1, $H_{opt} = C$, где C — постоянная

$\Rightarrow$ из (12.44), (12.48) получим

$$\boxed{\varkappa \dot{m}_p + \vec{p}_v^T \vec{f}_v - \dot{\vec{p}}_v^T \vec{v} = C} \tag{12.53}$$

— первый интеграл задачи.

Если t_1 не задано, то в силу теоремы 12.1 $C = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\varkappa \dot{m}_p + \vec{p}_v^T \vec{f}_v - \dot{\vec{p}}_v^T \vec{v} = 0} \tag{12.54}$$

— первый интеграл для свободного t_1.

12.6. Максимальная и нулевая тяга

Максимальная тяга: $\dot{m}_p = -\dot{m} = \gamma$; пусть $\gamma = \text{const}$.

Обозначим моменты времени начала и конца действия тяги через t_b, t_e (см. рис. 12.1),

$$\Delta t = t_e - t_b$$

— интервал времени действия максимальной тяги

$$\Rightarrow \quad m_e = m_b - \gamma \Delta t, \tag{12.55}$$

где $m_b = m(t_b)$, $m_e = m(t_e)$. Согласно (6.6), (12.55) изменение скорости КА находится по формуле Циолковского

$$\boxed{\Delta v = u \ln \frac{m_b}{m_b - \gamma \Delta t}} \tag{12.56}$$

Нулевая тяга: $\dot{m}_p = \dot{m} = 0 \;\Rightarrow\; m = \mathrm{const}$

$\Rightarrow$ из (12.52) и неравенства $\varkappa < 0$ (см. (12.50)) получим

$$\boxed{\varkappa = \frac{p_v u}{m} - c,\; c = \mathrm{const} > 0} \tag{12.57}$$

Рассмотрим задачу двух тел; в силу (12.10) вектор

$$\hat{\vec{p}} = \left\{ \vec{p}_r, \vec{p}_v \right\}$$

удовлетворяет сопряженному уравнению в вариациях для кеплеровского движения:

$$\dot{\hat{\vec{p}}}^T = -\hat{\vec{p}}^T F,$$

где $F = \begin{bmatrix} 0 & I_3 \\ G & 0 \end{bmatrix}$ (см. (11.6), (11.9), (12.46)). Матрица $A = A(t)$, определенная в п. 11.5 и вычисленная в пп. 11.6−11.8, является фундаментальным решением сопряженного уравнения в вариациях для кеплеровского движения

$\Rightarrow$ $\hat{\vec{p}} = A^T \vec{\beta}$,

где $\vec{\beta}$ — постоянный 6-мерный вектор

$$\Rightarrow \boxed{\vec{p}_r = P^T \vec{\beta},\; \vec{p}_v = Q^T \vec{\beta}} \tag{12.58}$$

где P, Q — 6×3-матрицы, $A = \begin{bmatrix} P & Q \end{bmatrix}$ (см. п. 11.5).

12.7. Импульсная тяга

Пусть $\gamma \to \infty \Rightarrow$ в силу (12.56) $\Delta t \to 0$ для заданного Δv — импульсная тяга (рис. 12.2).

Точка t_i приложения импульсной тяги (см. рис. 12.2) называется точкой соединения;

$\boxed{\varkappa = 0}$ для импульсной тяги. $\quad$ (12.59)

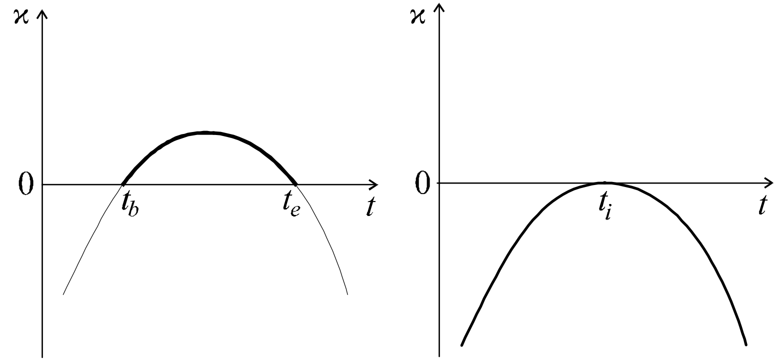


Рис. 12.2

Точка соединения соответствует $\max\limits_t \varkappa$

$$\Rightarrow \boxed{\varkappa = \dot{\varkappa} = 0, \text{ если } t_0 < t_i < t_1} \tag{12.60}$$

$\Rightarrow$ в силу (12.52)

$$\boxed{\dot{p}_v = 0 \;\Rightarrow\; \vec{p}_v \cdot \dot{\vec{p}}_v = 0, \text{ если } t_0 < t_i < t_1} \tag{12.61}$$

Если $t_i = t_0$ или $t_i = t_1$, то может быть

$$\dot{\varkappa} \neq 0$$

(рис. 12.3) и (12.61) не выполняется.

Предположим, что траектория включает только нулевую и импульсную тягу (рис. 12.4) и в первой точке соединения

$$p_v = p_m. \tag{12.62}$$

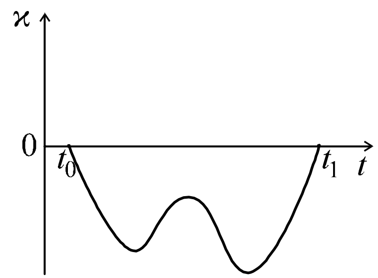


Рис. 12.3

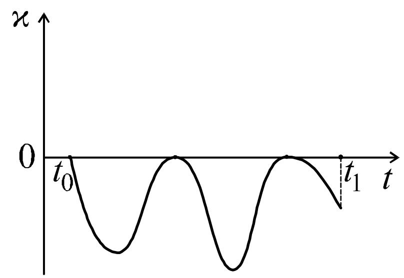


Рис. 12.4

Тогда в силу (12.57), (12.59)

$$\boxed{\varkappa = \frac{u}{m}\left(p_v - p_m\right)} \tag{12.63}$$

для нулевой тяги ⇒ (12.62) выполняется во всех точках соединения:

$$p_m = \max_{t_0 \leqslant t \leqslant t_1} p_v$$

⇒ $\varkappa = \varkappa(t)$ задается соотношением (12.63) для всего интервала $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$.

13. ЭЛЕКТРОРЕАКТИВНАЯ ТЯГА

13.1. Обозначения и используемые в главе соотношения

Обозначим:

t_0, t_1 — начальное и конечное время;

$m = m(t)$ — текущая масса КА ($t_0 \leqslant t \leqslant t_1$);

$m_0 = m(t_0)$, $m_1 = m(t_1)$;

$m_p = m_p(t) = m_0 - m$ — масса рабочего тела, израсходованного к моменту t;

$$\dot{m} = \frac{dm}{dt} \leqslant 0\,;$$

$$\dot{m}_p = \frac{dm_p}{dt} = -\dot{m} \geqslant 0$$ — расход рабочего тела в единицу времени;

u — скорость истечения;

$F_T = \dot{m}_p u$ — реактивная тяга;

$\vec{\alpha} = \vec{\alpha}(t)$ — вектор реактивного ускорения;

$$\alpha = \left|\vec{\alpha}\right| = \frac{F_T}{m} = \frac{\dot{m}_p u}{m} = \frac{\dot{m}_p u}{m_0 - m_p}\,;$$

W — электрическая мощность;

η — коэффициент полезного действия;

$W_e = \eta W$ — эффективная мощность.

Уравнения движения:

$$\dot{\vec{r}} = \vec{v}\,,\ \ \dot{\vec{v}} = \vec{f}_v + \vec{\alpha}\,, \tag{13.1}$$

где $\vec{f}_v = \vec{f}_v\left(\vec{r}\right)$ — ускорение, вызванное внешними силами.

Минимизируемый функционал (целевая функция):

$$J = x^0\left(t_1\right) = \int_{t_0}^{t_1} f^0\left(\vec{r}, \vec{v}, \vec{\alpha}\right) dt \to \min\,. \tag{13.2}$$

Гамильтониан задачи:

$$H = p_0 f^0 + \vec{p}_r^{\,T}\vec{v} + \vec{p}_v^{\,T}\vec{f}_v + \vec{p}_v^{\,T}\vec{\alpha}\,. \tag{13.3}$$

Если $\vec{f} = \left\{f^0, \vec{v}, \vec{f}_v + \vec{\alpha}\right\}$ не зависит от $x_0 = x_0(t)$, то

$$H = -f^0 + \vec{p}_r^{\,T}\vec{v} + \vec{p}_v^{\,T}\vec{f}_v + \vec{p}_v^{\,T}\vec{\alpha}\,. \tag{13.4}$$

13.2. Общие сведения об электрореактивной тяге

Электрореактивная тяга (ЭРТ), малая тяга: рабочее тело ионизируется и ускоряется в электростатическом или электромагнитном поле.

Типичные значения параметров жидкостных и электрореактивных двигателей космических аппаратов приведены в табл. 13.1.

Таблица 13.1. Типичные параметры космических реактивных систем

Параметры	Жидкостно-реактивный двигатель (ЖРД)	Электрореактивный двигатель (ЭРД)
Скорость истечения, км/с	~ 3	15...70
Реактивное ускорение / g_e ($g_e = 9{,}8066$ м/с^2)	~ 0,1	$10^{-5}...10^{-4}$

ЖРД: импульсная тяга (работает в течение нескольких минут).

ЭРД: непрерывная тяга (может функционировать в течение многих месяцев).

Эффективная мощность:

$$W_e = \eta W = \frac{\dot m_p u^2}{2}. \tag{13.5}$$

Обычно W_e, u заданы

$$\Rightarrow \quad \dot m_p = -\dot m = \frac{2W_e}{u^2}, \tag{13.6}$$

$$F_T = \dot m_p u = \frac{2W_e}{u}, \tag{13.7}$$

$$\alpha = \frac{F_T}{m} = \frac{2W_e}{mu}. \tag{13.8}$$

Типичный пример:

$$\left.\begin{array}{l} W = 2000 \text{ Вт} \\ \eta = 0{,}5 \\ m_0 = 250 \text{ кг} \\ u = 20 \text{ км/с} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} W_e = 1000 \text{ Вт} \\ \dot m = 5 \text{ мг/с} \\ F_T = 0{,}1 \text{ Н} \\ \alpha = 4\cdot 10^{-4} \text{ м/с}^2 \approx 4\cdot 10^{-5} g_e \end{array}\right.$$

13.3. Типы малой тяги

Управляемость тяги

1. *Идеально регулируемая тяга ограниченной мощности* (*ИРТОМ*).

Задано только ограничение на тягу:

$$0 \leqslant W_e \leqslant W_{em}.$$

Скорость истечения может изменяться произвольно:

$$0 \leqslant u < \infty$$

$\Rightarrow$ в силу (13.8) ускорение может варьироваться произвольно:

$$0 \leqslant \alpha < \infty.$$

Из (13.5)−(13.8) получим

$$W_e = \frac{\dot m_p u^2}{2} = \left(\frac{\dot m_p u}{m}\right)^2 \frac{m^2}{2\dot m_p} = \alpha^2 \frac{m^2}{2\dot m_p}$$

$$\Rightarrow \quad \dot m_p = \frac{m^2\alpha^2}{2W_e} \geqslant \frac{m^2\alpha^2}{2W_{em}} \tag{13.9}$$

$\Rightarrow$ **максимальная тяга обеспечивает минимальный расход рабочего тела**

2. *Тяга с постоянной скоростью истечения и ограниченным расходом рабочего тела* (*ПСИОР*).

Задано ограничение W_{em} на эффективную мощность и $u = \text{const}$

$\Rightarrow$ в силу (13.8) ускорение может варьироваться в пределах:

$$0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{2W_{em}}{mu},$$

$$0 \leqslant \dot m_p = |\dot m| \leqslant \gamma \equiv \frac{2W_{em}}{u^2}. \tag{13.10}$$

Источник энергии

1. *Солнечная энергия.*

Используются солнечные батареи (солнечная электрореактивная тяга — СЭРТ):

$$W_e \approx W_{e0}\left(\frac{r_0}{r}\right)^2, \qquad (13.11)$$

где r — расстояние КА от Солнца, r_0 — начальное значение r, W_{e0} — $W_e(r_0)$.

2. *Постоянная мощность.*

Электрическую мощность приближенно можно считать постоянной в следующих случаях:

– СЭРТ в сфере действия планеты;

– ядерный источник энергии (ядерная электрореактивная тяга — ЯЭРТ):

$$W_e \approx \text{const}. \qquad (13.12)$$

13.4. Оптимизация малой тяги

ИРТОМ ($0 \leqslant u < \infty$)

В силу (13.9) и равенства $\dot{m} = -\dot{m}_p$

$$\frac{\alpha^2}{2W_e} = -\frac{\dot{m}}{m^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{m}\right) \Rightarrow \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\frac{\alpha^2}{W_e}dt = \frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_0} \qquad (13.13)$$

$\Rightarrow$ в качестве целевой функции можно принять

$$\boxed{J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\frac{\alpha^2}{W_e}dt \to \min} \qquad (13.14)$$

Согласно (13.4), (13.14) гамильтониан принимает вид

$$H = -\frac{\alpha^2}{2W_e} + \vec{p}_r^{\,T}\vec{v} + \vec{p}_v^{\,T}\vec{f}_v + \vec{p}_v^{\,T}\vec{\alpha};$$

$$\frac{\partial H}{\partial\vec{\alpha}} = -\frac{\vec{\alpha}^T}{W_e} + \vec{p}_v^{\,T} = \vec{0}^T$$

$\Rightarrow$ оптимальная тяга:

$$\boxed{\vec{\alpha} = W_e\vec{p}_v} \qquad (13.15)$$

1. *Постоянная мощность*: можно принять

$$\boxed{J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\alpha^2\,dt \to \min} \qquad (13.16)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\alpha} = \vec{p}_v} \qquad (13.17)$$

2. *Солнечная энергия*: можно принять

$$\boxed{J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}(r\,\alpha)^2\,dt \to \min} \qquad (13.18)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\alpha} = \frac{\vec{p}_v}{r^2}} \qquad (13.19)$$

ПСИОР ($u = \text{const}$)

Воспользуемся результатами пп. 12.5, 12.6:

$$\boxed{J = \int_{t_0}^{t_1}\dot{m}_p\,dt \to \min} \qquad (13.20)$$

Гамильтониан:

$$H = \varkappa\,\dot{m}_p + \vec{p}_r^{\,T}\vec{v} + \vec{p}_v^{\,T}\vec{f}_v + \vec{p}_v^{\,T}\vec{\alpha}, \qquad (13.21)$$

где $\varkappa = \varkappa(t)$ — функция переключения:

$$\boxed{\begin{aligned} &\varkappa > 0 \;\Rightarrow\; \dot{m}_p = \gamma \text{ (максимальная тяга)},\\ &\varkappa < 0 \;\Rightarrow\; \dot{m}_p = 0 \text{ (нулевая тяга)},\\ &\varkappa = 0 \;\Rightarrow\; 0 \leqslant \dot{m}_p \leqslant \gamma \text{ (промежуточная тяга)}\end{aligned}} \qquad (13.22)$$

где величина γ задана в (13.10). Оптимальная тяга:

$$\boxed{\vec{\alpha} = \frac{\dot{m}_p u}{m}\frac{\vec{p}_v}{p_v}} \qquad (13.23)$$

где $\vec{p}_v$ — базис-вектор Лоудена, $p_v = |\vec{p}_v|$.

Постоянная мощность. Из (13.10), (13.12) получим

$$\gamma = \text{const}. \qquad (13.24)$$

Солнечная энергия. Из (13.10), (13.11) найдем

$$\gamma = \frac{2W_{e0}}{u^2}\left(\frac{r_0}{r}\right)^2. \qquad (13.25)$$

Все другие результаты пп. 12.5, 12.6 также могут быть применены в этом случае.

13.5. Локально-оптимальная тяга

Рассмотрим параметр орбиты

$$q = q(\vec{r}, \vec{v}), \tag{13.26}$$

который требуется изменить малой тягой, и обозначим

$$\vec{p}^T = \frac{\partial q}{\partial \vec{v}}. \tag{13.27}$$

Изменение скорости КА малой тягой за бесконечно малое время dt:

$$d\vec{v} = \vec{\alpha}\, dt. \tag{13.28}$$

Следовательно, изменение q за время dt находится из соотношения

$$dq = \vec{p}^T \vec{\alpha}\, dt \tag{13.29}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{увеличение } q \text{ максимально при } \vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{p}, \\ \text{уменьшение } q \text{ максимально при } \vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{p} \end{cases}$$

(локально-оптимальная тяга, см. также п. 6.4).

Локально-оптимальная тяга $\vec{\alpha}$ направлена вдоль вектора (13.27) в том же направлении, что и $\vec{p}$, для увеличения параметра q, и в противоположном направлении для уменьшения q

Производная $\dfrac{\partial q}{\partial \vec{x}}$ удовлетворяет сопряженному уравнению в вариациях (см. п. 11.2)

$$\Rightarrow \boxed{\pm \varepsilon \vec{p} = \vec{p}_v} \tag{13.30}$$

где $\varepsilon = \text{const} > 0$,

«+» для увеличения параметра q,

«–» для уменьшения параметра q,

$\vec{p}_v$ — базис-вектор Лоудена, обеспечивающий локальный максимум гамильтониана (см. главу 12).

Рассмотрим движение в сфере действия планеты или ядерную энергию ⇒ мощность постоянна.

ИРТОМ. Согласно (13.17), (13.30)

$$\vec{\alpha} = \pm \varepsilon \vec{p},\ \varepsilon > 0. \tag{13.31}$$

ПСИОР. Согласно (13.23), (13.30)

$$\vec{\alpha} = \pm \frac{\dot{m}_p u}{m} \frac{\vec{p}}{p}. \tag{13.32}$$

В (13.31), (13.32) «+» и «–» соответствуют увеличению и уменьшению q, $\dot{m}_p$ в (13.32) определяется из (13.22).

13.6. Локально-оптимальная тяга для элементов орбиты

Обозначим:

$\vec{r} = \{x, y, z\}$ — радиус-вектор;

$\vec{v} = \{v_x, v_y, v_z\}$ — вектор скорости;

$h = v^2 - \dfrac{2\mu}{r}$ — интеграл энергии;

$\vec{c} = \vec{r} \times \vec{v} = \{c_x, c_y, c_z\}$ — интеграл площадей;

$c = |\vec{c}|$;

$\vec{c}^0 = \dfrac{\vec{c}}{c}$ — единичный вектор нормали к плоскости орбиты;

$p = \dfrac{c^2}{\mu}$ — фокальный параметр;

$\vec{v}_r$, $\vec{v}_n$ — радиальная и трансверсальная компоненты скорости;

$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_n$;

u — аргумент широты;

Ω — долгота восходящего узла;

$\vec{k} = \{\cos\Omega, \sin\Omega, 0\}$ — единичный вектор линии узлов.

Большая полуось: $a = \dfrac{1}{\dfrac{2}{r} - \dfrac{v^2}{\mu}}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{p} = \left(\frac{\partial a}{\partial \vec{v}}\right)^T = \frac{2a^2}{\mu}\vec{v}} \tag{13.33}$$

Период орбиты: $P = 2\pi \dfrac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{p} = \left(\frac{\partial P}{\partial \vec{v}}\right)^T = 3\frac{aP}{\mu}\vec{v}} \tag{13.34}$$

<u>Эксцентриситет</u>: $e = \sqrt{1 + \frac{c^2}{\mu^2}h}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{p} = \left(\frac{\partial e}{\partial \vec{v}}\right)^T = \frac{1}{\mu e}\left(p\vec{v} - \frac{r^2}{a}\vec{v}_n\right)} \tag{13.35}$$

<u>Радиус перицентра</u>: $r_\pi = a(1-e)$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{p} = \left(\frac{\partial r_\pi}{\partial \vec{v}}\right)^T = \frac{r^2\vec{v}_n - r_\pi^2\vec{v}}{\mu e}} \tag{13.36}$$

<u>Радиус апоцентра</u>: $r_\alpha = a(1+e)$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{p} = \left(\frac{\partial r_\alpha}{\partial \vec{v}}\right)^T = \frac{r_\alpha^2\vec{v} - r^2\vec{v}_n}{\mu e}} \tag{13.37}$$

<u>Наклонение</u>: $\cos i = \frac{c_z}{c}$,

$c_z = xv_y - yv_x$, $c^2 = \vec{r}\times\vec{v}\cdot\vec{c} = \vec{c}\times\vec{r}\cdot\vec{v}$

$$\Rightarrow -\sin i\frac{\partial i}{\partial \vec{v}} = \frac{1}{c}\{-y, x, 0\} - \frac{c_z}{c^3}(\vec{c}\times\vec{r})^T. \tag{13.38}$$

Умножим (13.38) на $\vec{r}$, $\vec{v}$:

$$\sin i\frac{\partial i}{\partial \vec{v}}\vec{r} = \sin i\frac{\partial i}{\partial \vec{v}}\vec{v} = 0 \Rightarrow \frac{\partial i}{\partial \vec{v}} \text{ направлена вдоль } \vec{c}$$

$$\Rightarrow -\sin i\frac{\partial i}{\partial \vec{v}} = \xi\vec{c}^{\,0}.$$

Для нахождения ξ умножим (13.38) на $\vec{c}^{\,0}$ с учетом (3.25) (см. главу 3):

$$\xi = \frac{1}{c}\left(-yc_x^0 + xc_y^0\right) = \frac{r}{c}\Big[-\left(\sin\Omega\cos u + \cos\Omega\sin u\cos i\right)\sin\Omega\sin i -$$
$$-\left(\cos i\cos\Omega\cos u - \sin\Omega\sin u\cos i\right)\cos\Omega\sin i\Big] = -\frac{r\cos u\sin i}{c}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{p} = \left(\frac{\partial i}{\partial \vec{v}}\right)^T = \frac{r\cos u}{c}\vec{c}^{\,0}} \tag{13.39}$$

<u>Долгота восходящего узла</u>: $\operatorname{tg}\Omega = -\frac{c_x}{c_y}$,

$$c_x = yv_z - zv_y = c\sin\Omega\sin i,\ c_y = zv_x - xv_z = -\cos\Omega\sin i \tag{13.40}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos^2\Omega}\frac{\partial\Omega}{\partial\vec{v}} = -\frac{1}{c_y}\{0, -z, y\} + \frac{c_x}{c_y^2}\{z, 0, -x\} =$$
$$= \frac{1}{c\cos\Omega\sin i}\left(\{0, -z, y\} - \operatorname{tg}\Omega\{z, 0, -x\}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial\Omega}{\partial\vec{v}} = \frac{1}{c\sin i}\{-z\sin\Omega,\ -z\cos\Omega,\ x\sin\Omega + y\cos\Omega\}. \tag{13.41}$$

Умножим (13.41) на $\vec{r}$, $\vec{v}$ с учетом (13.40):

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\vec{v}}\vec{r} = \frac{1}{c\sin i}\left(-xz\sin\Omega - yz\cos\Omega + xz\sin\Omega + yz\cos\Omega\right) = 0,$$
$$\frac{\partial\Omega}{\partial\vec{v}}\vec{v} = \frac{1}{c\sin i}\left(-zv_x\sin\Omega - zv_y\cos\Omega + xv_z\sin\Omega + yv_z\cos\Omega\right) =$$
$$= \frac{1}{c\sin i}\left(-c_y\sin\Omega + c_x\cos\Omega\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial\Omega}{\partial\vec{v}} \text{ направлена вдоль } \vec{c}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial\Omega}{\partial\vec{v}} = \eta\vec{c}^{\,0}. \tag{13.42}$$

Для нахождения η умножим (13.41) на $\vec{c}^{\,0}$ с учетом (3.25) (см. главу 3):

$$\eta = \frac{1}{c\sin i}\left[-zc_x^0\sin\Omega - zc_y^0\cos\Omega + \left(x\sin\Omega + y\cos\Omega\right)c_z^0\right] = \frac{\vec{c}^{\,0}\cdot\vec{k}\times\vec{r}}{c\sin i}. \tag{13.43}$$

Вектор $\vec{k}\times\vec{r}$ ортогонален плоскости орбиты

$\Rightarrow$ $\vec{k}\times\vec{r}=\vec{c}^{\,0} r\sin u$ в силу определения $\vec{c}^{\,0}$ и u (см. рис. 3.5)
$\Rightarrow$ соотношения (13.42), (13.43) дают

$$\boxed{\vec{p}=\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\vec{v}}\right)^T=\frac{\vec{c}^{\,0}\cdot\vec{k}\times\vec{r}}{c\sin i}\vec{c}^{\,0}} \tag{13.44}$$

14. ОГРАНИЧЕНИЯ НА НАПРАВЛЕНИЕ ТЯГИ

14.1. Вводные замечания

Оптимальное управление электрореактивной (малой) тягой (ЭРТ) в общем случае требует сложного управления ориентацией космического аппарата (КА) в режиме трехосной стабилизации. В то же время солнечные батареи должны быть направлены на Солнце в течение всего времени работы ЭРТ. Это ведет к усложнению конструкции КА и системы управления ориентацией.

Упрощение системы управления ориентацией и режима стабилизации КА может снизить стоимость миссии, однако накладывает ограничения на направление тяги. В данной главе рассматривается оптимизация перелетов с малой тягой при наличии ограничений на направление тяги.

14.2. Обозначения и используемые в главе соотношения

Обозначим:

$m=m(t)$, $m_0=m(t_0)$ — текущая и начальная масса КА;

$m_p=m_p(t)=m_0 - m$ — масса рабочего тела, израсходованного к моменту t;

$\dot{m}=\dfrac{dm}{dt}\leqslant 0$;

$\dot{m}_p=\dfrac{dm_p}{dt}=-\dot{m}\geqslant 0$ — расход рабочего тела в единицу времени;

u — скорость истечения;

W_e — эффективная мощность;

$\vec{\alpha}=\vec{\alpha}(t)$ — вектор реактивного ускорения,

$$\alpha=\left|\vec{\alpha}\right|=\frac{\dot{m}_p u}{m}, \tag{14.1}$$

$$\vec{\alpha}^{\,0}=\begin{cases}\vec{\alpha}/\alpha & \text{– единичный вектор направления ненулевой тяги;}\\ \vec{0} & \text{– для нулевой тяги}\end{cases} \tag{14.2}$$

$\vec{\alpha}_m$, $\vec{\alpha}_m^{\,0}$, α_m — оптимальные значения $\vec{\alpha}$, $\vec{\alpha}^{\,0}$, α;

$\vec{p}_v$ — базис-вектор Лоудена.

Уравнения движения:

$$\dot{\vec{r}} = \vec{v}, \dot{\vec{v}} = \vec{f}_v + \vec{\alpha}, \tag{14.3}$$

где $\vec{f}_v = \vec{f}_v(\vec{r}, \vec{v})$ — ускорение, вызванное внешними силами.

Минимизируемый функционал задачи:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f^0 dt. \tag{14.4}$$

Ограничение на величину тяги может быть записано в виде

$$\vec{\alpha}^T \vec{\alpha} = \alpha^2, \tag{14.5}$$

где α дается соотношением (14.1).

14.3. Общее ограничение типа равенства

Рассмотрим ограничение на направление тяги, заданное уравнением

$$\vec{g} = \vec{g}\left(\vec{r}, \vec{v}, t, \vec{\alpha}^0\right) = \vec{0}. \tag{14.6}$$

Если $\vec{g}$ явно зависит от времени, целесообразно добавить уравнение

$$\dot{t} = 1, \tag{14.7}$$

делающее систему автономной (см. главу 12)
$\Rightarrow$ согласно (14.3)–(14.7) гамильтониан системы равен

$$H = p_0 f_0 + \vec{p}_r^T \vec{v} + \vec{p}_v^T \vec{f}_v + \vec{p}_v^T \vec{\alpha} + \frac{\lambda_\alpha}{2}\left(\vec{\alpha}^T \vec{\alpha} - \alpha^2\right) + \vec{\lambda}_g^T \vec{g} + p_t, \tag{14.8}$$

где λ_α, $\vec{\lambda}_g$, p_t — сопряженные переменные, соответствующие уравнениям (14.5), (14.6), (14.7). Сопряженные переменные p_t, $\vec{p}_r$, $\vec{p}_v$ в (14.8) удовлетворяют уравнениям

$$\dot{p}_t = -\frac{\partial H}{\partial t} = -\lambda_g^T \dot{\vec{g}}, \tag{14.9}$$

$$\dot{\vec{p}}_r^T = -\frac{\partial H}{\partial \vec{r}} = -\vec{p}_v^T \frac{\partial \vec{f}_v}{\partial \vec{r}} - \vec{\psi}_r^T, \; \dot{\vec{p}}_v^T = -\frac{\partial H}{\partial \vec{v}} = -\vec{p}_r^T - \vec{p}_v^T \frac{\partial \vec{f}_v}{\partial \vec{v}} - \vec{\psi}_v^T, \tag{14.10}$$

где

$$\vec{\psi}_r = \left(\frac{\partial \vec{g}}{\partial \vec{r}}\right)^T \vec{\lambda}_g, \; \vec{\psi}_v = \left(\frac{\partial \vec{g}}{\partial \vec{v}}\right)^T \vec{\lambda}_g. \tag{14.11}$$

Значение $\vec{\alpha}_m^0$ вектора (14.2), доставляющее максимум (14.8):

$$\vec{\alpha}_m^0 = \begin{cases} \arg\max\limits_{\vec{g}=\vec{0}} \vec{p}_v^T \vec{\alpha}^0, & \max\limits_{\vec{g}=\vec{0}} \vec{p}_v^T \vec{\alpha}^0 > 0, \\ \vec{0}, & \max\limits_{\vec{g}=\vec{0}} \vec{p}_v^T \vec{\alpha}^0 \le 0 \end{cases} \tag{14.12}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\alpha}_m^0 = \frac{\vec{p}_g}{p_g} = \vec{p}_g^0, \tag{14.13}$$

где $\vec{p}_g$ — проекция $\vec{p}_v$ на множество, заданное (14.6) (см. Приложение Б), $p_g = \left|\vec{p}_g\right|$; если $\vec{p}_g = \vec{0}$, то $\vec{\alpha}_m^0 = \vec{0}$.

Предположим, что $\vec{\alpha}_m^0$ каким-то образом найдено, и рассмотрим матрицу

$$P = \vec{\alpha}_m^0 \vec{\alpha}_m^{0T}. \tag{14.14}$$

Согласно определению, данному в Приложении Б, матрица (14.14) проецирует вектор $\vec{p}_v$ на множество, заданное (14.6), т. е.

$$\vec{p}_g = P \vec{p}_v. \tag{14.15}$$

Пусть функция f_0 такова, что

$$\frac{\partial f_0}{\partial \vec{\alpha}} = h \vec{\alpha}^T, \quad h = h\left(\vec{r}, \vec{v}, t, \vec{\alpha}\right) \tag{14.16}$$

$\Rightarrow$ на оптимальном значении $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}_m$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \vec{\alpha}}\right)^T = p_0 h \vec{\alpha}_m + \vec{p}_v + \lambda_\alpha \vec{\alpha}_m + \frac{1}{\alpha_m}\left(I - \vec{\alpha}_m^0 \vec{\alpha}_m^{0T}\right) G^T \vec{\lambda}_g = \vec{0}, \tag{14.17}$$

где $G = \dfrac{\partial \vec{g}}{\partial \vec{\alpha}^0}$, I — единичная матрица. Умножая (14.17) слева на матрицу (14.14), получим

$$\vec{\alpha}_m = -\frac{\vec{p}_g}{\lambda_\alpha + p_0 h} \tag{14.18}$$

$\Rightarrow$ согласно (14.13) $\lambda_\alpha + p_0 h < 0$. Подставляя (14.14), (14.15), (14.18) в (14.17), найдем

$$\left(I - \vec{\alpha}_m^0 \vec{\alpha}_m^{0T}\right)\left(\vec{p}_v + \frac{1}{\alpha} G^T \vec{\lambda}_g\right) = \vec{0}. \qquad (14.19)$$

Матрица $I - \vec{\alpha}_m^0 \vec{\alpha}_m^{0T}$ проецирует любой вектор на плоскость, ортогональную $\vec{\alpha}_m^0$ $\Rightarrow$ (14.19) возможно лишь при

$$\vec{p}_v + \frac{1}{\alpha} G^T \vec{\lambda}_g = x \vec{\alpha}_m^0, \qquad (14.20)$$

где x — неизвестный скалярный множитель.

Случай ИРТОМ (см. (13.13), (13.14)):

$$p_0 = -1,\ f_0 = \frac{\alpha^2}{2W_e} \qquad (14.21)$$

$\Rightarrow$ $h = \dfrac{1}{W_e}$ в (14.17), (14.18).

В случае ИРТОМ величина тяги не ограничена $\Rightarrow$ (14.5) не используется $\Rightarrow$ $\lambda_\alpha = 0$ в (14.16)–(14.18) $\Rightarrow$ в силу (14.18)

$$\boxed{\vec{\alpha}_m = W_e \vec{p}_g} \qquad (14.22)$$

Соотношения (14.14), (14.15), (14.22) дают оптимальную величину тяги:

$$\boxed{\alpha_m = W_e \vec{\alpha}_m^{0T} \vec{p}_g} \qquad (14.23)$$

Импульсная тяга или случай ПСИОР (см. (13.20), (13.22)):

$$f_0 = \dot{m}_p, \qquad (14.24)$$

$$0 \leqslant \dot{m}_p \leqslant \gamma,\ u = \text{const} \qquad (14.25)$$

$\Rightarrow$ согласно (14.24) в этом случае также выполняется соотношение (14.16) с $h = 0$.

Соотношение (14.13) дает оптимальный вектор тяги:

$$\boxed{\vec{\alpha}_m = \alpha_m \frac{\vec{p}_g}{p_g}} \qquad (14.26)$$

где α_m находится из (14.1) при условиях (14.25).

Согласно (14.13)–(14.15), $\vec{p}_g^T \vec{\alpha} = p_g \alpha$ $\Rightarrow$ гамильтониан равен

$$H = \varkappa' \dot{m}_p + \vec{p}_r^T \vec{v} + \vec{p}_v^T \vec{f}_v + \frac{\lambda_\alpha}{2}\left(\vec{\alpha}_m^T \vec{\alpha}_m - \alpha^2\right) + \vec{\lambda}_g^T \vec{g} + p_t, \qquad (14.27)$$

где

$$\varkappa' = \varkappa'(t) = p_0 + \frac{p_g u}{m}. \qquad (14.28)$$

Аналогично тому, как это было сделано в п. 12.5 для $\varkappa$ (см. (12.52), можно показать, что

$$\dot{\varkappa}' = \frac{\dot{p}_g u}{m}. \qquad (14.29)$$

Согласно (14.25), (14.27) $\max\limits_{\dot{m}_p} H$ достигается, если

$$\boxed{\begin{array}{lll} \varkappa' > 0 & \Rightarrow & \dot{m}_p = \gamma \text{ (максимальная тяга),} \\ \varkappa' < 0 & \Rightarrow & \dot{m}_p = 0 \text{ (нулевая тяга),} \\ \varkappa' = 0 & \Rightarrow & 0 \leqslant \dot{m}_p \leqslant \gamma \text{ (промежуточная тяга)} \end{array}} \qquad (14.30)$$

$\Rightarrow$ $\varkappa'$ — функция переключения при наличии ограничений на направление тяги (см. п. 12.5).

Вывод: Сравнение (14.22) с (13.15) и (14.26), (14.28)–(14.30) с (12.42), (12.49), (12.52), (12.50) показывает, что в оптимальном решении $\vec{p}_v$ заменяется на $\vec{p}_g$.

14.4. Общее ограничение типа неравенства

Рассмотрим ограничение на направление тяги, заданное неравенством

$$\vec{g} = \vec{g}\left(\vec{r}, \vec{v}, t, \vec{\alpha}^0\right) \geqslant 0. \qquad (14.31)$$

Если заданы двусторонние ограничения, они могут быть сведены к (14.31) разбиением каждого из них на два неравенства.

Пусть вектор $\vec{g}$ имеет размерность n, т. е.

$$\vec{g} = \left\{g_1, \ldots, g_n\right\}$$

$\Rightarrow$ (14.31) определяет пересечение множеств, заданных

$$g_i = g_i\left(\vec{r}, \vec{v}, t, \vec{\alpha}^0\right) \geqslant 0 \quad (i = 1, \ldots, n). \qquad (14.32)$$

Введем новое управление

$$\vec{\xi} = \{\zeta_1, ..., \zeta_n\}$$

и рассмотрим вектор

$$\vec{\theta} = \{\zeta_1^2, ..., \zeta_n^2\}. \qquad (14.33)$$

Неравенство (14.31) может быть заменено равенством

$$\vec{g} - \vec{\theta} = \vec{0} \qquad (14.34)$$

$\Rightarrow$ гамильтониан принимает вид

$$H = \varkappa' \dot{m}_p + \vec{p}_r^T \vec{v} + \vec{p}_v^T \vec{f}_v + \frac{\lambda_\alpha}{2}\left(\vec{\alpha}_m^T \vec{\alpha}_m - \alpha^2\right) + \vec{\lambda}_g^T \left(\vec{g} - \vec{\theta}\right) + p_t. \quad (14.35)$$

Дополнительное необходимое условие максимума (14.35):

$$\frac{\partial H}{\partial \vec{\xi}} = \vec{0}^T \qquad (14.36)$$

$\Rightarrow$ (14.35), (14.36) дают

$$\lambda_{gi} \zeta_i = 0 \quad (i = 1, ..., n), \qquad (14.37)$$

где λ_{gi} — компоненты вектора $\vec{\lambda}_g$.

Пусть для некоторого i ($1 \leqslant i \leqslant n$) выполняется строгое неравенство $g_i > 0$

$\Rightarrow$ согласно (14.33), (14.34) $\zeta_i \neq 0 \Rightarrow \lambda_{gi} = 0$ в (14.37).

В соответствии с леммой Б.1 Приложения Б, для нахождения $\vec{\alpha}_m^0$ необходимо проверить неравенство

$$\vec{g}\left(\vec{r}, \vec{v}, t, \vec{p}_v^0\right) \geqslant \vec{0}, \qquad (14.38)$$

где

$$\vec{p}_v^0 = \frac{\vec{p}_v}{\left|\vec{p}_v\right|}. \qquad (14.39)$$

Если выполняется (14.38), то

$$\vec{\alpha}_m^0 = \vec{p}_v^0. \qquad (14.40)$$

Если (14.38) не выполняется, то $\vec{\alpha}_m^0$ дается в (14.13) и принадлежит границе множества, задаваемого неравенством (14.31). Эта граница определяется следующим образом:

k компонентов вектора $\vec{g}$ равны нулю ($1 \leqslant k \leqslant n$);

остальные $n - k$ компонентов вектора $\vec{g}$ положительны

$\Rightarrow$ на границе ограничение (14.31) может быть записано в виде

$$\vec{g}' = \vec{g}'\left(\vec{r}, \vec{v}, t, \vec{\alpha}^0\right) = \vec{0}, \qquad (14.41)$$

$$\vec{g}'' = \vec{g}''\left(\vec{r}, \vec{v}, t, \vec{\alpha}^0\right) > \vec{0}, \qquad (14.42)$$

где $\vec{g}'$, $\vec{g}''$ — некоторые k- и ($n - k$)-мерные подвекторы $\vec{g}$.

Как показано выше, компоненты вектора $\vec{\lambda}_g$, соответствующие ограничениям (14.42), равны нулю

$\Rightarrow$ достаточно рассмотреть ограничения типа равенства (14.41), для которого задача решена в п. 14.3.

Таким образом, в случае ограничений типа неравенства оптимальное направление тяги также дается (14.13), поскольку, если выполняется (14.38), то $\vec{p}_g = \vec{p}_v$.

14.5. Алгоритм нахождения оптимального направления тяги при ограничениях типа неравенства

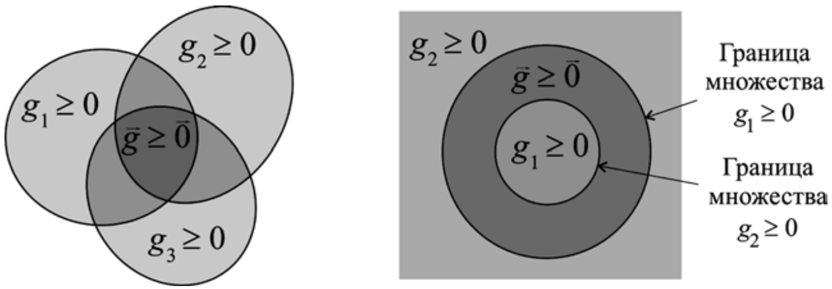
На практике нахождение вектора $\vec{g}'$ для заданного $\vec{p}_v$ может столкнуться с трудностями. Предположим, что для любой пары g_i, g_j одновременное выполнение равенств

$$g_i = 0, \; g_j = 0 \qquad (14.43)$$

возможно либо для конечного числа значений $\vec{\alpha}^0$, либо невозможно (такое предположение реалистично, поскольку $\vec{\alpha}^0$ определяется двумя независимыми скалярными переменными). Это означает, что границы любой пары множеств, заданных (14.32), либо пересекаются в конечном числе точек (рис. 14.1*а*), либо не пересекаются (рис. 14.1*б*).

Согласно леммам Б.1 и Б.2 Приложения Б вектор $\vec{\alpha}_m^0$ либо задается (14.40) (если выполняется (14.38)), либо является единичным вектором проекции $\vec{p}_v$ на одно из множеств, заданных (14.32) (если $k = 1$), либо является решением уравнений (14.43) (если $k \geqslant 2$). Таким образом, вектор $\vec{\alpha}_m^0$ может быть найден с помощью следующих шагов:

1°. Проверяется неравенство (14.38), и если оно выполняется, то $\vec{\alpha}_m^0 = \vec{p}_v^0$.



а *б*

Рис. 14.1

2°. Если (14.38) не выполняется, то определяются проекции $\vec{p}_{gi}^{(1)}$, $\vec{p}_{gi}^{(2)}$, ... вектора $\vec{p}_v$ на множества $g_i=0$ ($i=1, ..., n$) и для всех $\vec{p}_{gi}^{(\sigma)} \neq \vec{0}$ ($\sigma=1, 2, ...$), удовлетворяющих неравенству

$$\vec{g}\left(\vec{r}, \vec{v}, t, \vec{p}_{gi}^{(\sigma)0}\right) \geqslant \vec{0}, \tag{14.44}$$

оптимальное направление тяги задается следующим образом:

$$\vec{\alpha}_m^0 = \arg\max_{i,\sigma} \vec{p}_v^T \vec{p}_{gi}^{(\sigma)0}. \tag{14.45}$$

3°. Если ни один из векторов $\vec{p}_{gi}^{(\sigma)} \neq \vec{0}$ не удовлетворяет (14.44), то для всех пар $i, j=1, ..., n$, $i \neq j$ находятся решения $\vec{\alpha}_\sigma^0$ ($\sigma=1, ..., M$) уравнений (14.43) и

$$\vec{\alpha}_m^0 = \arg\max_{\sigma} \vec{p}_v^T \vec{\alpha}_\sigma^0.$$

4°. Если все $\vec{p}_{gi}^{(\sigma)} = \vec{0}$ ($i=1, ..., n$, $\sigma=1, 2, ...$) то $\vec{\alpha}_m^0 = \vec{0}$.

Согласно результатам Приложения Б, предложенная процедура нахождения оптимального направления тяги может быть упрощена в следующих случаях:

1. $n = 1$, т. е. $\vec{g} = g_1$ — скаляр. В этом случае $\vec{\alpha}_m^0 = \vec{p}_{g1}^0$, где $\vec{p}_{g1}$ — абсолютная проекция $\vec{p}_v$ на множество $g_1=0$.

2. Проекция $\vec{p}_{gi}$ вектора $\vec{p}_v$ на множество $g_i=0$ является абсолютной и удовлетворяет (14.44). Тогда $\vec{\alpha}_m^0 = \vec{p}_{gi}^0$ (см. лемму Б.3 Приложения Б).

3. Существует единственная (т. е. абсолютная) проекция $\vec{p}_{gj}$ вектора $\vec{p}_v$ на каждое из множеств $g_j=0$ ($j=1, ..., n$). В этом случае существует единственный вектор $\vec{p}_{gi}^0$, удовлетворяющий (14.44), и $\vec{\alpha}_m^0 = \vec{p}_{g1}^0$, или такого вектора не существует и $\vec{\alpha}_m^0$ — решение уравнений (14.43) (см. лемму Б.4 Приложения Б).

14.6. Линейное ограничение типа равенства

Линейное ограничение типа равенства имеет вид

$$B\vec{\alpha}^0 = \vec{c}, \tag{14.46}$$

где $B = B\left(\vec{r}, \vec{v}, t\right)$ — $n\times 3$-матрица, $\vec{c} = \vec{c}\left(\vec{r}, \vec{v}, t\right)$ — n-мерный вектор. Уравнение (14.46) может быть записано в виде

$$\vec{b}_i^T \vec{\alpha}^0 = c_i \quad (i=1, ..., n), \tag{14.47}$$

где $\vec{b}_i^T$, c_i — строки матрицы B и компоненты вектора $\vec{c}$.

$\vec{\alpha}^0$ — единичный вектор $\Rightarrow$ (14.47) возможно только при $\left|c_i\right| \leqslant \left|\vec{b}_i\right|$.

Пусть rank $B=n \leqslant 3$; рассмотрим разные значения n:

1) $n=1$: (14.46) задает окружность на единичной сфере;

2) $n=2$: (14.46) задает две точки на единичной сфере, являющиеся пересечениями двух окружностей;

3) $n=3$: это возможно, только если $B^{-1}\vec{c}$ — единичный вектор; в этом случае (14.46) определяет точку на единичной сфере.

Рассмотрим $n \leqslant 2$; равенство (14.20) принимает вид

$$\vec{p}_v + \frac{1}{\alpha} B^T \vec{\lambda}_g = x\vec{\alpha}_m^0. \tag{14.48}$$

Умножая (14.48) на матрицу B с учетом (14.46), получим

$$\vec{\lambda}_g = -\alpha\left(BB^T\right)^{-1}\left(B\vec{p}_v - x\vec{c}\right). \tag{14.49}$$

Подставляя (14.49) в (14.48), найдем

$$P_0\vec{p}_v + xB^T\left(BB^T\right)^{-1}\vec{c} = x\vec{\alpha}_m^0, \tag{14.50}$$

где

$$P_0 = I - B^T\left(BB^T\right)^{-1}B\,. \qquad (14.51)$$

Матрица (14.51) проецирует любой вектор на множество, ортогональное B (т. е. является проективной матрицей). Легко проверить, что

$$P_0^T = P_0^2 = P_0\,,\; BP_0 = P_0B^T = 0\,. \qquad (14.52)$$

Возводя (14.50) в квадрат и используя (14.52) и равенство $\left|\vec{\alpha}^0\right| = 1$, получим

$$x = \pm\sqrt{\frac{\vec{p}_v^{\,T} P_0 \vec{p}_v}{1-\vec{c}^{\,T}\left(BB^T\right)^{-1}\vec{c}}}\,. \qquad (14.53)$$

Обозначим

$$\vec{p} = P_0\vec{p}_v\,,\; p = \left|\vec{p}\right|,\; \vec{p}^{\,0} = \frac{\vec{p}}{p}. \qquad (14.54)$$

Согласно (14.52), (14.54),

$$p = \sqrt{\vec{p}_v^{\,T} P_0 \vec{p}_v} \qquad (14.55)$$

$\Rightarrow$ соотношения (14.50), (14.53)–(14.55) дают

$$\vec{\alpha}_m^0 = \pm\sqrt{1-\vec{c}^{\,T}\left(BB^T\right)^{-1}\vec{c}}\cdot\vec{p}^{\,0} + B^T\left(BB^T\right)^{-1}\vec{c}\,. \qquad (14.56)$$

Знак в (14.56) выбирается из условия $\max \vec{p}_v^{\,T}\vec{\alpha}^0$. Согласно (14.54), (14.55), $\vec{p}_v^{\,T}\vec{p}^{\,0} = p > 0 \Rightarrow$ с учетом (14.12) получим

$$\boxed{\vec{\alpha}_m^0 = \sqrt{1-\vec{c}^{\,T}\left(BB^T\right)^{-1}\vec{c}}\cdot\vec{p}^{\,0} + B^T\left(BB^T\right)^{-1}\vec{c}} \qquad (14.57)$$

если $\vec{p}_v^{\,T}\vec{\alpha}_m^0 > 0$ и $\vec{\alpha}_m^0 = \vec{0}$ если $\vec{p}_v^{\,T}\vec{\alpha}_m^0 \leqslant 0$.

Оптимальная величина тяги дается в (14.23) для случая ИРТОМ и в (14.1) с учетом (14.30) для случая ПСИОР.

Рассмотрим случай $n = 1$ (т. е. B — строка $\vec{b}_1^{\,T}$ и $\vec{c}$ — скаляр c_1).

Тогда $\vec{\alpha}$ принадлежит поверхности кругового конуса с осью, направленной вдоль вектора $\vec{b}_1 \operatorname{sgn} c_1$. Обозначим $\vec{b}^{\,0} = \vec{b}_1 / \left|\vec{b}_1\right|$

$\Rightarrow$ в силу (14.51), (14.54)

$$\vec{p} = \left(I - \vec{b}^{\,0}\vec{b}^{\,0T}\right)\vec{p}_v = \vec{b}^{\,0}\times\left(\vec{p}_v\times\vec{b}^{\,0}\right). \qquad (14.58)$$

Соотношение (14.57) принимает вид

$$\vec{\alpha}_m^0 = \vec{p}^{\,0}\sin\varphi + \vec{b}^{\,0}\cos\varphi\,, \qquad (14.59)$$

где $\cos\varphi = \left|c_1\right| / \left|\vec{b}_1\right|$ (рис. 14.2).

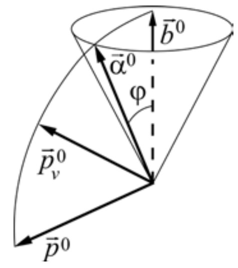


Рис. 14.2

14.7. Линейное ограничение типа неравенства

Линейное ограничение типа неравенства имеет вид

$$B\vec{\alpha}^0 \geqslant \vec{c}\,, \qquad (14.60)$$

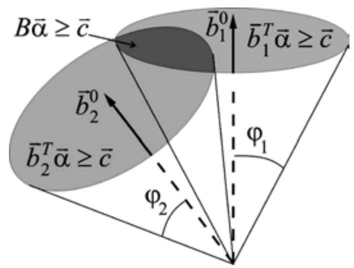


Рис. 14.3

где $B = B\left(\vec{r},\vec{v},t\right)$ — $n\times 3$-матрица, $\vec{c} = \vec{c}\left(\vec{r},\vec{v},t\right)$ — n-мерный вектор. Неравенство (14.60) может быть записано в виде

$$\vec{b}_i^{\,T}\vec{\alpha}^0 \geqslant c_i \quad (i = 1,\ldots,n)\,, \qquad (14.61)$$

где $\vec{b}_i^{\,T}$, c_i — строки матрицы B и компоненты вектора $\vec{c}$.

Каждое из неравенств (14.61) задает сегмент единичной сферы и (14.60) определяет пересечение этих сегментов (рис. 14.3).

Определим

$$\vec{b}_i^{\,0} = \frac{\vec{b}_i}{\left|\vec{b}_i\right|},\;\; B_{ij} = \begin{bmatrix}\vec{b}_i\\ \vec{b}_j\end{bmatrix},\;\; c_{ij} = \begin{bmatrix}c_i\\ c_j\end{bmatrix}, \qquad (14.62)$$

$$\vec{p}_i = \vec{b}_i^{\,0}\times\left(\vec{p}_v\times\vec{b}_i^{\,0}\right),\;\; \vec{p}_i^{\,0} = \frac{\vec{p}_i}{\left|\vec{p}_i\right|}, \qquad (14.63)$$

$$P_{ij} = I - B_{ij}^T\left(B_{ij}B_{ij}^T\right)^{-1}B_{ij}\,,\;\; \vec{p}_{ij} = P_{ij}\vec{p}_v\,,\;\; \vec{p}_{ij}^{\,0} = \frac{\vec{p}_{ij}}{\left|\vec{p}_{ij}\right|}, \qquad (14.64)$$

где $i, j = 1, \ldots, n$. Если вектор $\vec{p}_v$ неколлинеарен ни одному из векторов $\vec{b}_i$, то вектор $\vec{\alpha}_m^0$ может быть найден с помощью алгоритма, описанного в п. 14.5, где $\vec{p}_{gi}$ достигается на векторе

$$\vec{\alpha}_i^0 = \vec{p}_i^0 \sin\varphi_i + \vec{b}_i^0 \cos\varphi_i, \quad \cos\varphi_i = \frac{|c_i|}{|\vec{b}_i|}, \tag{14.65}$$

и решение уравнений (14.43) дается соотношением

$$\vec{\alpha}_{ij}^0 = \sqrt{1 - \vec{c}_{ij}^T \left(B_{ij} B_{ij}^T\right)^{-1} \vec{c}_{ij}} \cdot \vec{p}_{ij}^0 + B_{ij}^T \left(B_{ij} B_{ij}^T\right)^{-1} \vec{c}_{ij}, \tag{14.66}$$

где $i, j = 1, \ldots, n$.

14.8. Линейное однородное ограничение типа равенства

Линейное однородное ограничение типа равенства имеет вид

$$B\vec{\alpha} = \vec{0}, \tag{14.67}$$

где $B = B(\vec{r}, \vec{v}, t)$ — $n \times 3$-матрица. Единичный вектор $\vec{\alpha}^0$ заменен на $\vec{\alpha}$ в (14.67) для удобства. Возможны два случая:

1) rank $B = 1 \Rightarrow$ (14.67) определяет плоскость;

2) rank $B = 2 \Rightarrow$ (14.67) определяет прямую линию, т. е. направление тяги задано и требуется найти только величину тяги.

В рассматриваемом случае $\vec{c} = \vec{0}$ в (14.46) $\Rightarrow$ (14.57) принимает вид

$$\vec{\alpha}_m^0 = \vec{p}^0$$

$\Rightarrow$ согласно (14.13) $\vec{p} = \vec{p}_g$ $\Rightarrow$ согласно (14.15), (14.54) $P = P_0$, т. е. с учетом (14.51) матрица P в (14.15) дается соотношением

$$\boxed{P = I - B^T \left(BB^T\right)^{-1} B} \tag{14.68}$$

Матрица (14.68) проецирует <u>любой</u> вектор на множество, определяемое (14.67), т. е. является <u>проективной матрицей</u>.

В общем случае матрица (14.68) не может быть представлена в виде (14.14).

14.9. Линейное однородное ограничение типа неравенства

Линейное однородное ограничение типа неравенства может быть представлено в виде

$$B\vec{\alpha} \geqslant \vec{0}, \tag{14.69}$$

где $B = B(\vec{r}, \vec{v}, t)$ — $n \times 3$-матрица. Неравенство (14.69) задает пересечение полупространств, каждое из которых определяется неравенством

$$\vec{b}_i^T \vec{\alpha} \geqslant 0 \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{14.70}$$

где $\vec{b}_i^T$ — строки матрицы B (рис. 14.4).

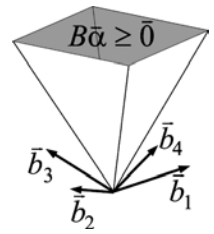


Рис. 14.4

Согласно алгоритму, описанному в п. 14.5, оптимальное направление тяги $\vec{\alpha}_m^0$ дается одним из векторов $\vec{p}_i^0$ или $\vec{p}_{ij}^0$ $(i, j = 1, \ldots, n)$, заданных (14.63), (14.64); $\vec{p}_{ij}^0$ также является решением уравнений (14.43). Для любого $i = 1, \ldots, n$ существует единственный вектор $\vec{p}_i^0$ $\Rightarrow$ согласно лемме Б.4 Приложения Б, если $\exists\, i$: $B\vec{p}_i^0 \geqslant \vec{0}$, то $\vec{\alpha}_m^0 = \vec{p}_i^0$.

<u>Вывод</u>. При ограничениях (14.69) оптимальная тяга направлена вдоль $\vec{p}_v$ (если $B\vec{p}_v \geqslant \vec{0}$) или ортогональна одному из векторов $\vec{b}_i$ или двум векторам $\vec{b}_i, \vec{b}_j$ или равна нулю (если $\vec{p}_v^T \vec{\alpha} \leqslant 0$ для любого $\vec{\alpha}$, удовлетворяющего (14.69)).

14.10. Матрицы B, P_0 и P для линейного ограничения типа равенства

Матрица BB^T в (14.51), (14.68) вырожденна, если $R = \text{rank } B < n$. Рассмотрим матрицы B, P_0, P для двух значений R:

1. $R = 1 \Rightarrow$ для любого n матрица B может быть заменена матрицей

$$B = \vec{b}^T, \tag{14.71}$$

где $\vec{b}^T$ — любая ненулевая строка исходной матрицы B

$\Rightarrow \left(BB^T\right)^{-1} = 1/b^2$, $b = |\vec{b}|$ $\Rightarrow$ (14.51), (14.68) дают

$$P_0 = P = I - \frac{\vec{b}\vec{b}^T}{b^2}. \tag{14.72}$$

2. $R = 2$; если $n = 2$, то

$$B=\begin{bmatrix}\vec{b}_1^{\,T}\\ \vec{b}_2^{\,T}\end{bmatrix}, \qquad (14.73)$$

где $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$ — линейно независимые векторы. Если $n>2$, то матрица B может быть сведена к виду (14.73), матрица BB^T невырожденна и P_0, P задаются в (14.51), (14.68).

Однако матрица P может быть упрощена следующим образом: если выполняются (14.67), (14.73), то $\vec{\alpha}_m^0=\vec{b}/b$, где $\vec{b}=\vec{b}_1\times\vec{b}_2$, $b=\left|\vec{b}\right|$ $\Rightarrow$ согласно (14.14)

$$P=\frac{\vec{b}\vec{b}^T}{b^2}. \qquad (14.74)$$

Заметим, что матрица (14.73) может быть заменена матрицей

$$B=I-\frac{\vec{b}\vec{b}^T}{b^2}. \qquad (14.75)$$

Таким образом, все линейные однородные ограничения типа равенства на направление тяги сводятся к двум случаям:

1) тяга ортогональна заданному вектору $\vec{b}=\vec{b}\left(\vec{r},\vec{v},t\right)$, и в этом случае матрицы B и P даются в (14.71), (14.72);

2) тяга направлена вдоль заданного вектора $\vec{b}=\vec{b}\left(\vec{r},\vec{v},t\right)$; тогда матрицы B и P даются в (14.73) или (14.75), (14.74).

14.11. Объединения множеств и смешанные ограничения

Объединения множеств

Все рассмотренные ограничения (14.6), (14.31), (14.46), (14.60), (14.67), (14.69) определяют пересечение множеств. Однако полученные результаты могут быть применены также к объединениям множеств $A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n$.

Рассмотрим пример: ограничение дано неравенством

$$\vec{b}^T\vec{\alpha}^0\geqslant c \quad \text{или} \quad -\vec{b}^T\vec{\alpha}^0\geqslant c, \qquad (14.76)$$

где $c>0$ (ограничение (14.76) соответствует, например, случаю двух противоположно направленных двигателей на борту КА). В этом случае вектор тяги лежит внутри кругового конуса, показанного на рис. 14.5*а*; рис. 14.5*б* показывает этот случай схематически.

Согласно (14.59)

$$\vec{\alpha}_m^0=\vec{p}^{\,0}\sin\varphi\pm\vec{b}^0\cos\varphi. \qquad (14.77)$$

Для оптимальности знак в (14.77) должен быть равен знаку $\vec{p}_v^{\,T}\vec{b}$.

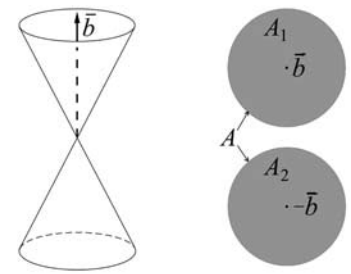


Рис. 14.5

Смешанные ограничения

Полученные результаты могут быть обобщены также на смешанные ограничения типа равенства и неравенства.

Рассмотрим пример: ограничения

$$\vec{b}_1^{\,T}\vec{\alpha}^0=c_1 \quad \text{и} \quad \vec{b}_2^{\,T}\vec{\alpha}^0\geqslant c_2 \qquad (14.78)$$

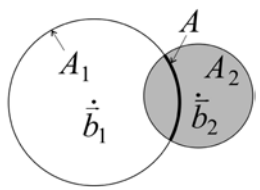


Рис. 14.6

(рис. 14.6). В этом случае оптимальное направление тяги является либо проекцией на множество $\vec{b}_1^{\,T}\vec{\alpha}^0=c_1$ (т. е. дается в (14.65) с $i=1$), либо одной из точек пересечения множеств $\vec{b}_1^{\,T}\vec{\alpha}^0=c_1$, $\vec{b}_2^{\,T}\vec{\alpha}^0=c_2$ (т. е. дается в (14.66) с $i=1, j=2$).

15. ОПТИМИЗАЦИЯ ПЕРЕЛЕТОВ С МАЛОЙ ТЯГОЙ

15.1. Постановка задачи и обозначения

Рассматривается перелет с электрореактивной тягой между двумя заданными положениями в пространстве за заданное время. Предполагается, что движение происходит в рамках задачи двух тел и тяга является идеально регулируемой ограниченной мощности (ИРТОМ, см. главу 13).

Задача заключается в нахождении вектора тяги как функции времени, минимизирующего расход рабочего тела.

Обозначим:

μ — гравитационный параметр притягивающего центра;

t — текущее время;

t_0, t_1 — моменты времени начала и конца перелета;

$T = t - t_0$, $T_1 = t_1 - t_0$;

$\vec{r}$, $\vec{v}$ — радиус-вектор и вектор скорости,

$\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0)$, $\vec{v}_0 = \vec{v}(t_0)$,

$r = |\vec{r}|$, $v = |\vec{v}|$,

$r_0 = r(t_0)$, $v_0 = v(t_0)$;

$\vec{x} = \{\vec{r}, \vec{v}\}$ — вектор состояния;

$\dot{r} = \dfrac{\vec{r} \cdot \vec{v}}{r}$ — радиальная скорость,

$\dot{r}_0 = \dot{r}(t_0)$;

$\varphi = \varphi(t)$ — угловая дальность, включающая полные обороты,

$\cos\varphi = \dfrac{\vec{r}_0 \cdot \vec{r}_1}{r_0 r_1}$;

a — большая полуось;

e — эксцентриситет;

$p = a(1 - e^2)$ — фокальный параметр;

$h = v^2 - \dfrac{2\mu}{r}$ — интеграл энергии;

$\vec{c} = \vec{r} \times \vec{v}$ — угловой момент (интеграл площадей);

$\vec{l} = -\mu \dfrac{\vec{r}}{r} + \vec{v} \times \vec{c}$ — интеграл Лапласа;

$c = |\vec{c}| = \sqrt{\mu p}$, $l = |\vec{l}| = \mu e$;

$\vec{\alpha} = \vec{\alpha}(t)$ — вектор реактивного ускорения (вектор тяги),

$\vec{\alpha}_0 = \vec{\alpha}(t_0)$,

$\alpha = |\vec{\alpha}|$;

W_e — эффективная мощность тяги (см. п. 13.1);

$m = m(t)$ — масса космического аппарата (КА),

$m_0 = m(t_0)$, $m_1 = m(t_1)$;

$m_p = m_0 - m$ — масса рабочего тела;

I — единичная матрица 3-го порядка.

15.2. Формализация задачи

Уравнение движения КА:

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}) + \vec{g}, \tag{15.1}$$

$$\vec{f}(\vec{x}) = \left\{\vec{v}, -\frac{\mu}{r^3}\vec{r}\right\}, \quad \vec{g} = \left\{\vec{0}, \vec{\alpha}\right\}. \tag{15.2}$$

Предположим, что заданы граничные условия:

$$\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0, \quad \vec{x}(t_1) = \vec{x}_1 \tag{15.3}$$

(случаи частично заданных граничных условий рассмотрены в п. 15.7).

Рассмотрим невозмущенное кеплеровское движение, описываемое уравнением

$$\dot{\vec{y}} = \vec{f}(\vec{y}). \tag{15.4}$$

Пусть $\vec{y} = \vec{y}(t)$ — решение уравнения (15.4) с заданными граничными условиями

$$\vec{y}(t_0) = \vec{y}_0, \quad \vec{y}(t_1) = \vec{y}_1. \tag{15.5}$$

Заметим, что если координаты в векторах состояния $\vec{y}_0$, $\vec{y}_1$ заданы, то скорости могут быть найдены путем решения задачи Ламберта (см. главу 7).

Представим решение уравнения (15.1) с граничными условиями (15.3) в виде

$$\vec{x} = \vec{y} + \vec{\xi} \tag{15.6}$$

и предположим, что условия (15.5) обеспечивают

$$\left\|\vec{\xi}\right\| \ll \left\|\vec{y}\right\| \tag{15.7}$$

(условие (15.7) может быть реализуемо в силу малости тяги). Линеаризуя уравнение (15.1) для $\vec{\xi}$, получим

$$\dot{\vec{\xi}} = F\vec{\xi} + \vec{g}\,, \tag{15.8}$$

$$F = \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ G & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \frac{\mu}{r^3}\left(3\frac{\vec{r}\vec{r}^T}{r^2} - I\right). \tag{15.9}$$

Граничные условия для $\vec{\xi}$:

$$\vec{\xi}\left(t_0\right) = \vec{x}_0 - \vec{y}_0 = \vec{\xi}_0\,, \quad \vec{\xi}\left(t_1\right) = \vec{x}_1 - \vec{y}_1 = \vec{\xi}_1\,. \tag{15.10}$$

Кеплеровская орбита, заданная вектором $\vec{y} = \vec{y}(t)$, называется <u>опорной орбитой</u> или <u>транспортирующей траекторией</u>. Матрицы (15.9) вычисляются на этой орбите.

Целевая функция для случая ИРТОМ записывается в виде

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} \frac{\alpha^2}{W_e}\,dt \tag{15.11}$$

(см. п. 13.4) $\Rightarrow$ используя (13.13), получим

$$m_1 = \frac{\tilde{W}_{e0}}{J + \tilde{W}_{e0}} m_0\,, \quad m_p = \frac{J}{J + \tilde{W}_{e0}} m_0\,, \tag{15.12}$$

$$\tilde{W}_{e0} = \frac{W_{e0}}{m_0}\,, \quad W_{e0} = W_e\left(t_0\right).$$

Заметим, что уравнение (15.8) является неавтономным, так как матрица F зависит от времени. Поэтому гамильтониан линеаризованной задачи имеет вид

$$H = -\frac{\alpha^2}{2W_e} + \vec{p}^T F\vec{\xi} + \vec{p}_v^T\vec{\alpha} + p_t\,, \tag{15.13}$$

где

$$\vec{p} = \left\{\vec{p}_r, \vec{p}_v\right\} \tag{15.14}$$

– вектор сопряженных переменных, $\vec{p}_v$ — <u>базис-вектор Лоудена</u> (см. главы 12, 13), p_t — сопряженная переменная для дополнительного уравнения $\dot{t} = 1$, делающего систему автономной.

15.3. Решение линеаризованной задачи

Решение уравнения (15.8) дается формулой Коши:

$$\vec{\xi}\left(t\right) = \Phi\left(t, t_0\right)\vec{\xi}_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi\left(t, \tau\right)\vec{g}\,d\tau, \tag{15.15}$$

где Φ — матрица изохронных производных, которая может быть представлена в виде

$$\Phi\left(t, t_0\right) = A^{-1}A_0\,, \tag{15.16}$$

и матрица $A = A\left(t\right)$ является общим решением сопряженного уравнения в вариациях:

$$\dot{A} = -AF\,, \quad A\left(t_0\right) = A_0 \tag{15.17}$$

(см. главу 11). Матрица A дается соотношениями (11.31), (11.33), где $\vec{r}$, $\vec{v}$ — компоненты вектора $\vec{y}$ (т. е. вычисляются на опорной орбите), матрица A^{-1} вычисляется в п. 11.9.

Как и в п. 11.5, разделим A на две 6×3-подматрицы:

$$A = \left[P \quad Q\right]. \tag{15.18}$$

Согласно (15.2), (15.16), (15.18), соотношение (15.15) принимает вид

$$\vec{\xi}\left(t\right) = A^{-1}A_0\vec{\xi}_0 + A^{-1}\int_{t_0}^{t} Q\vec{\alpha}\,d\tau. \tag{15.19}$$

Сопряженные переменные в (15.13) удовлетворяют уравнению

$$\dot{\vec{p}}^T = -\frac{\partial H}{\partial \vec{x}} = -\vec{p}^T F \tag{15.20}$$

$\Rightarrow$ так как A — общее решение уравнения (15.20), то

$$\vec{p} = A^T\vec{\beta}\,,$$

где $\vec{\beta}$ — постоянный вектор $\Rightarrow$ согласно (15.14), (15.18)

$$\vec{p}_v = Q^T\vec{\beta} . \tag{15.21}$$

Оптимальная тяга доставляет максимум функции (15.13) $\Rightarrow$

$$\frac{\partial H}{\partial\vec{\alpha}} = \vec{0}^T$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\alpha} = W_e\vec{p}_v = W_eQ^T\vec{\beta}} \tag{15.22}$$

(см. также главу 13). Определим

$$\vec{\Delta} = A_1\vec{\xi}_1 - A_0\vec{\xi}_0 , \tag{15.23}$$

$$S = S\left(t_0,t\right) = \int_{t_0}^{t} W_eQQ^T d\tau , \quad S_1 = S\left(t_0,t_1\right), \tag{15.24}$$

где $A_1 = A(t_1) \Rightarrow$ согласно (15.22)–(15.24) соотношение (15.19) для $t = t_1$ принимает вид

$$\vec{\Delta} = S_1\vec{\beta}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\beta} = S_1^{-1}\vec{\Delta}} \tag{15.25}$$

$\Rightarrow$ согласно (15.22)

$$\boxed{\vec{\alpha} = W_eQ^TS_1^{-1}\vec{\Delta}} \tag{15.26}$$

Подставляя (15.26) в (15.11) с учетом соотношений $\alpha^2 = \vec{\alpha}^T\vec{\alpha}$ и (15.24), получим

$$\boxed{J = \frac{1}{2}\vec{\Delta}^TS_1^{-1}\vec{\Delta}} \tag{15.27}$$

Из (15.19), (15.24), (15.26) найдем вектор $\vec{\xi} = \vec{\xi}\left(t\right)$:

$$\boxed{\vec{\xi} = A^{-1}\left(A_0\vec{\xi}_0 + SS_1^{-1}\vec{\Delta}\right)} \tag{15.28}$$

Тогда вектор $\vec{x} = \vec{x}\left(t\right)$ может быть найден из (15.6).

15.4. Вычисление матрицы *S*

Обозначим

$$B = QQ^T \tag{15.29}$$

$\Rightarrow$ согласно (11.31) (см. главу 11)

$$B_{ij} = \vec{b}_i^T\vec{b}_j \quad (i,j = 1,\ldots,6) ,$$

где векторы $\vec{b}_i$ даны в (11.33), (11.39)–(11.41). Матрица B имеет вид

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_{21} & B_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{33} & B_{34} & B_{35} & B_{36} \\ 0 & 0 & B_{43} & B_{44} & B_{45} & B_{46} \\ 0 & 0 & B_{53} & B_{54} & B_{55} & B_{56} \\ 0 & 0 & B_{63} & B_{64} & B_{65} & B_{66} \end{bmatrix}. \tag{15.30}$$

Используем векторы $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$ в (11.33) данные соотношением (11.52). Тогда ненулевые компоненты матрицы B равны:

$$B_{11} = -\frac{p}{e^2}\left(\frac{r^2}{a} - 2r + p\right), \ B_{12} = B_{21} = -\frac{1}{e^2}\sqrt{\frac{p}{\mu}}\left(r-p\right)r\dot{r} ,$$

$$B_{22} = \frac{\left(r-p\right)^2}{e^2}, \quad B_{33} = \frac{c^2}{e^2}\left(\frac{r^2}{a^2} + 2\frac{p}{r} - 3\frac{p}{a}\right),$$

$$B_{34} = B_{43} = \frac{c}{e^2}\left(\frac{r+p}{a}r - 2p\right)\dot{r}, \quad B_{35} = B_{53} = -2\frac{c^2}{e}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a}\right),$$

$$B_{36} = B_{63} = -2\frac{p}{e}\left[r\dot{r} - 3\mu\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a}\right)T\right],$$

$$B_{44} = -\frac{\mu}{e^2}\left[\frac{r^2}{a} - 2e^2r + 2\frac{p^2}{r} - \left(3+e^2\right)p\right], \quad B_{45} = B_{54} = 2\frac{c}{e}\dot{r} ,$$

$$B_{46} = B_{64} = 2\frac{c}{e}\left(r - p - 3\dot{r}T\right), \quad B_{55} = v^2 , \quad B_{56} = B_{65} = 2r\dot{r} - 3v^2T ,$$

$$B_{66} = 4r^2 - 12r\dot{r}T + 9v^2T^2 . \tag{15.31}$$

Рассмотрим интеграл

$$R_n = \int_{t_0}^{t} r^n dt$$

(см. также п. 11.8). Можно показать, что

$$R_{-3}=\frac{1}{p}\left(R_{-2}+\frac{\dot r-\dot r_0}{\mu}\right),\quad R_{-2}=\frac{\varphi}{c},\quad R_{-1}=\frac{T}{a}+\frac{r\dot r-r_0\dot r_0}{\mu},\quad R_0=T,$$

$$R_n=\frac{a}{n+1}\left[(2n+1)R_{n-1}-npR_{n-2}-\frac{r^{n+1}\dot r-r_0^{n+1}\dot r_0}{\mu}\right],\quad n=1,2,\ldots \tag{15.32}$$

Также рассмотрим интегралы

$$I_n=\int_{t_0}^{t} r^n\dot r\,dt=\begin{cases}\dfrac{r^{n+1}-r_0^{n+1}}{n+1}, & n=0,1,\pm2,\pm3,\ldots,\\[2mm] \ln\dfrac{r}{r_0}, & n=-1.\end{cases} \tag{15.33}$$

$$K_1=\int_{t_0}^{t}\varphi\,dt,\quad K_2=\int_{t_0}^{t}\varphi T\,dt,\quad K_3=\int_{t_0}^{t}\ln\frac{r}{r_0}\,dt \tag{15.34}$$

и зададим параметры

$$k_1=\frac{I_0-\dot r_0T}{p},\quad k_2=\mu\left(2R_{-3}-\frac{R_{-2}}{a}\right),\quad k_3=\frac{\sqrt{\mu}}{p^{3/2}}\left(1+e^2\right). \tag{15.35}$$

Определим матрицу

$$\tilde S=\frac{S}{W_{e0}}. \tag{15.36}$$

Постоянная мощность

Рассмотрим постоянную мощность:

$$W_e\equiv W_{e0}. \tag{15.37}$$

Ненулевые компоненты матрицы (15.36) могут быть найдены из (15.24), (15.29), (15.31), (15.37):

$$\tilde S_{11}=-\frac{p}{e^2}\left(\frac{R_2}{a}-2R_1+pT\right),\quad \tilde S_{12}=\tilde S_{21}=-\frac{1}{e^2}\sqrt{\frac{p}{\mu}}\left(I_2-pI_1\right),$$

$$\tilde S_{22}=\frac{p}{e^2}\left(\frac{R_2}{p}-2R_1+pT\right),\quad \tilde S_{33}=\frac{c^2}{e^2}\left(\frac{R_2}{a^2}+2pR_{-1}-3\frac{p}{a}T\right),$$

$$\tilde S_{34}=\tilde S_{43}=\frac{c}{e^2}\left(\frac{I_2+pI_1}{a}-2pI_0\right),$$

$$\tilde S_{35}=\tilde S_{53}=-2\frac{c^2}{e}\left(R_{-1}-\frac{T}{a}\right),\quad \tilde S_{36}=\tilde S_{63}=-2\frac{p}{e}\left(4I_1-3r\dot rT\right),$$

$$\tilde S_{44}=-\frac{\mu}{e^2}\left[\frac{R_2}{a}-2e^2R_1+2p^2R_{-1}-\left(3+e^2\right)pT\right],$$

$$\tilde S_{45}=\tilde S_{54}=2\frac{c}{e}I_0,\quad \tilde S_{46}=\tilde S_{64}=2\frac{c}{e}\left[4R_1-(3r+p)T\right],$$

$$\tilde S_{55}=2\mu R_{-1}-\frac{\mu}{a}T,\quad \tilde S_{56}=\tilde S_{65}=8I_1-\frac{3}{2}\frac{\mu T^2}{a}-6r\dot rT,$$

$$\tilde S_{66}=28R_2+3\frac{\mu T^3}{a}+18r\dot rT^2-24r^2T. \tag{15.38}$$

Солнечная энергия

Рассмотрим солнечную энергию с эффективной мощностью

$$W_e=W_{e0}\left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \tag{15.39}$$

(см. также п. 13.3). Ненулевые компоненты матрицы (15.36) могут быть найдены из (15.24), (15.29), (15.31), (15.39):

$$\tilde S_{11}=-\frac{p}{e^2}\left(\frac{T}{a}-2R_{-1}+pR_{-2}\right)r_0^2,\quad \tilde S_{12}=\tilde S_{21}=-\frac{1}{e^2}\sqrt{\frac{p}{\mu}}\left(I_0-pI_{-1}\right)r_0^2,$$

$$\tilde S_{22}=\frac{p}{e^2}\left(\frac{T}{p}-2R_{-1}+pR_{-2}\right)r_0^2,\quad \tilde S_{33}=\frac{c^2}{e^2}\left(\frac{T}{a^2}+2pR_{-3}-3\frac{p}{a}R_{-2}\right)r_0^2,$$

$$\tilde S_{34}=\tilde S_{43}=\frac{c}{e^2}\left(\frac{I_0+pI_{-1}}{a}-2pI_{-2}\right)r_0^2,$$

$$\tilde S_{35}=\tilde S_{53}=-2\frac{c^2}{e}\left(R_{-3}-\frac{R_{-2}}{a}\right)r_0^2,$$

$$\tilde S_{36}=\tilde S_{63}=-6\frac{p}{e}\left[k_1+\frac{I_{-1}}{3}-\left(R_{-3}-\frac{R_{-2}}{a}\right)\mu T+\frac{\sqrt{\mu}}{p^{3/2}}e^2K_1\right]r_0^2,$$

$$\tilde S_{44} = -\frac{\mu}{e^2}\left[\frac{T}{a} + 2p^2 R_{-3} - \left(3+e^2\right) pR_{-2} - 2e^2 R_{-1}\right] r_0^2\,,$$

$$\tilde S_{45} = \tilde S_{54} = 2\frac{c}{e} I_{-2}\, r_0^2\,,\ \tilde S_{46} = \tilde S_{64} = 2\frac{c}{e}\left(3\frac{T}{r} - pR_{-2} - 2R_{-1}\right) r_0^2\,,$$

$$\tilde S_{55} = k_2\, r_0^2\,,\ \tilde S_{56} = \tilde S_{65} = \left[6k_1 + 2I_{-1} - 3k_2 T + 3k_3 K_1\right] r_0^2\,,$$

$$\tilde S_{66} = \left[4\left(1 - 9\frac{r}{p} - 3I_{-1}\right)T + 9\left(2\frac{\dot r_0}{p} + k_2\right)T^2 + 36\frac{R_1}{p} - 18k_3K_2 + 12K_3\right] r_0^2\,. \tag{15.40}$$

15.5. Свойства решения линеаризованной задачи

Теорема 15.1. Матрица (15.29) вырожденна, тем не менее матрица $S = S(t, t+\Delta t)$ является невырожденной для любых значений t и $\Delta t > 0$.

Доказательство

Подматрица Q является 6×3-матрицей $\Rightarrow$ rank $QQ^T = 3 \Rightarrow$ матрица (15.29) вырожденна.

Допустим, что матрица S вырожденна $\Rightarrow \exists$ вектор $\vec s:\ S\vec s = 0$

$$\Rightarrow\ \vec s^{\,T} S \vec s = \int\limits_t^{t+\Delta t} W_e\, \vec s^{\,T} QQ^T \vec s\, dt = 0\,.$$

С другой стороны, $W_e > 0$ и $\vec s^{\,T} QQ^T \vec s$ — неотрицательная непрерывная функция времени $\Rightarrow Q^T \vec s \equiv \vec 0$ на интервале Δt

$$\Rightarrow\ \frac{d}{dt}\left(Q^T \vec s\right) = \dot Q^T \vec s \equiv \vec 0\,.$$

Соотношения (15.17), (15.9), (15.18) дают $\dot Q = -P\ \Rightarrow\ P^T \vec s = \vec 0$ $\Rightarrow\ A^T \vec s = \vec 0$, что невозможно, так как матрица A невырожденна.

Это противоречие доказывает, что S — невырожденная матрица и для $\forall \vec s : \vec s^{\,T} S \vec s > 0\ \Rightarrow S$ является положительно определенной.

Следовательно, обращение S в (15.25)–(15.28) всегда возможно.

Теорема 15.2. 1°. Оптимальная тяга может обращаться в нуль только в изолированных точках и в этих точках тяга меняет направление на противоположное, т. е. эти точки являются точками переключения.

2°. Если $r \geqslant r_{\min} > 0$, то число точек переключения конечно.

Доказательство (только для 1°)

Допустим, что $\vec\alpha = \vec 0$ на интервале $\Delta t > 0 \Rightarrow$ согласно (15.22) $\vec p_v = \vec 0$ на $\Delta t \Rightarrow\ \dot{\vec p}_v = \vec 0$ на $\Delta t \Rightarrow$ соотношения (15.21), (15.17), (15.9), (15.18) дают $Q^T \vec\beta = \vec 0$, $\dot Q^T \vec\beta = -P\vec\beta = \vec 0\ \Rightarrow\ A^T\vec\beta = \vec 0$ на Δt, что невозможно в силу невырожденности $A \Rightarrow$ тяга может обращаться в нуль только в изолированных точках.

Так как $\vec p_v = \dot{\vec p}_v = \vec 0$ невозможно, то $\dot{\vec p}_v \neq \vec 0$ при $\vec p_v = \vec 0$

$\Rightarrow$ точки нулевой тяги являются точками переключения.

15.6. Замечание о концевых смещениях опорной орбиты

Представим граничные векторы в виде

$$\vec\xi_0 = \left\{\vec\rho_0, \vec\eta_0\right\},\ \ \vec\xi_1 = \left\{\vec\rho_1, \vec\eta_1\right\}, \tag{15.41}$$

где подвекторы $\vec\rho$, $\vec\eta$ соответствуют координатам и скоростям. Координаты КА в граничных условиях могут быть одинаковыми для траектории перелета и для опорной орбиты (транспортирующей траектории) (т. е. в (15.3) и в (15.5)) $\Rightarrow$ в этом случае

$$\vec\rho_0 = \vec\rho_1 = \vec 0 \tag{15.42}$$

(рис. 15.1) $\Rightarrow$ вектор граничных условий (15.23) принимает вид

$$\vec\Delta = Q_1\vec\eta_1 - Q_0\vec\eta_0\,. \tag{15.43}$$

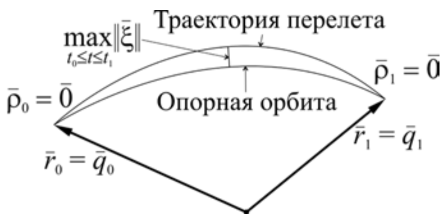


Рис. 15.1

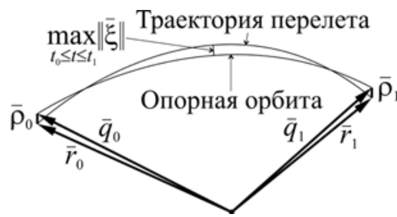


Рис. 15.2

Однако может оказаться целесообразным выбирать ненулевые векторы $\vec{\rho}_0$, $\vec{\rho}_1$, минимизирующие $\max\limits_{t_0 \leqslant t \leqslant t_1} \left\| \vec{\xi} \right\|$ ($\vec{\xi} = \vec{\xi}(t)$ дается в (15.28)) с целью повышения точности линеаризации (рис. 15.2).

15.7. Частично заданные граничные условия

Рассмотрим два примера частично заданных граничных условий:

1. Целью полета является пролет небесного тела с произвольной скоростью пролета

В этом случае $\vec{\rho}_0$, $\vec{\eta}_0$, $\vec{\rho}_1$ в (15.41) заданы и $\vec{\eta}_1$ может принимать любое значение $\Rightarrow$ условие трансверсальности имеет вид

$$\vec{\alpha}_1 = \vec{\alpha}\left(t_1\right) = \vec{0} \tag{15.44}$$

(см. п. 12.4) $\Rightarrow$ соотношения (15.26), (15.23), (15.44) дают

$$\vec{\eta}_1 = \left(Q_1^T S_1^{-1} Q_1\right)^{-1} Q_1^T S_1^{-1} \left(A_0 \vec{\xi}_0 - P_1 \vec{\rho}_1\right). \tag{15.45}$$

Если выполняется (15.42), то (15.45) принимает вид

$$\vec{\eta}_1 = \left(Q_1^T S_1^{-1} Q_1\right)^{-1} Q_1^T S_1^{-1} Q_0 \vec{\eta}_0 . \tag{15.46}$$

2. Энергия запуска задана, а направление запуска может выбираться произвольно

Рассмотрим запуск с Земли с заданной орбитальной энергией, равной на бесконечности $C_3 = v_\infty^2$ (см. п. 8.3), и произвольным направлением вектора $\vec{v}_\infty$.

Пусть $\vec{r}_0$, $\vec{V}_0$ — координаты и скорости Земли в момент t_0 и

$$\vec{y}_0 = \left\{\vec{q}_0, \vec{u}_0\right\},\ \ \vec{\xi}_0' = \left\{\vec{\rho}_0,\ \vec{\eta}_0'\right\} = \left\{\vec{r}_0 - \vec{q}_0,\ \vec{V}_0 - \vec{u}_0\right\} \tag{15.47}$$

$$\Rightarrow\ \ \vec{\xi}_0 = \vec{\xi}_0' + \left\{\vec{0}, \vec{v}_\infty\right\}, \tag{15.48}$$

$$\vec{v}_\infty \cdot \vec{v}_\infty = C_3 . \tag{15.49}$$

Условие трансверсальности имеет вид:

$$\vec{\alpha}_0 = \lambda \vec{v}_\infty , \tag{15.50}$$

где λ — неопределенный множитель $\Rightarrow$ соотношения (15.26), (15.23), (15.50) дают

$$\vec{v}_\infty = \left(\lambda I + Q_0^T S_1^{-1} Q_0\right)^{-1} Q_0^T S_1^{-1} \left(A_1 \vec{\xi}_1 - P_0 \vec{\rho}_0 - Q_0 \vec{\eta}_0'\right), \tag{15.51}$$

множитель λ может быть найден из (15.49) после подстановки туда (15.51).

15.8. Вектор тяги в подвижных координатах

Представим базис-вектор в заданной системе координат в виде

$$\vec{p}_v = \left\{p_1, p_2, p_3\right\}.$$

Орбитальные координаты: начало в центре масс КА, оси направлены вдоль радиуса-вектора, трансверсали и нормали к плоскости орбиты $\Rightarrow$ орты системы координат равны

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{r}}{r},\ \ \vec{e}_2 = \frac{\vec{c} \times \vec{r}}{cr},\ \ \vec{e}_3 = \frac{\vec{c}}{c}. \tag{15.52}$$

Умножая (15.21) скалярно на (15.52), с учетом (11.33), (11.52) получим

$$p_1 = \beta_3 \frac{p\dot{r}}{e} + \beta_4 \frac{c}{e}\left(\frac{p}{r} - 1\right) + \beta_5 \dot{r} + \beta_6 \left(2r - 3\dot{r}T\right),$$

$$p_2 = \beta_3 \frac{c}{e}\left(\frac{r}{a} - \frac{p}{r}\right) + \beta_4 \frac{r+p}{e}\dot{r} + \beta_5 \frac{c}{r} - 3\beta_6 \frac{c}{r} T ,$$

$$p_3 = \beta_1 \frac{cr\dot{r}}{\mu e} + \beta_2 \frac{p-r}{e} . \tag{15.53}$$

Тангенциальные координаты: начало в центре масс КА, оси направлены вдоль вектора скорости, нормали к нему в плоскости орбиты и по нормали к этой плоскости
$\Rightarrow$ орты системы координат равны

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{v}}{v},\ \ \vec{e}_2 = \frac{\vec{v} \times \vec{c}}{vc},\ \ \vec{e}_3 = \frac{\vec{c}}{c}. \tag{15.54}$$

Умножая (15.54) скалярно на (15.21), с учетом (11.33), (11.54) получим

$$p_1 = -2\beta_4 \frac{c^2}{\mu e v}\left(v^2 - \frac{\mu}{r}\right) - 2\beta_4 \frac{c\dot{r}}{ev} + \beta_5 v + \beta_6\left(2\frac{r\dot{r}}{v} - 3vT\right),$$

$$p_2 = -\beta_4 \frac{cr\dot{r}}{aev} + \beta_4 \frac{c^2 - (r\dot{r})^2}{erv} + 2\beta_6 \frac{c}{v}. \tag{15.55}$$

Третья компонента базис-вектора дана в (15.53).

15.9. Обеспечение требуемой точности

Предложенный метод оптимизации перелетов с малой тягой является приближенным из-за используемой линеаризации. Для обеспечения высокой точности метода интервал времени линеаризации должен быть коротким.

Разобьем интервал времени полета T на n подынтервалов с границами $t_0, t_1, ..., t_{n-1}, t_n$ (с заменой прежнего t_1 на t_n) и будем решать задачу для каждого подынтервала отдельно. Нижним индексом i и верхними индексами «–» или «+» будем обозначать значения параметров в момент t_i на i-м или $(i+1)$-м подынтервалах соответственно $(i=1, ..., n-1)$.

Значения (15.11), (15.27), (15.23), (15.24) на i-м подынтервале:

$$J_i = \frac{1}{2}\int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{\alpha^2}{W_e} dt = \frac{1}{2}\vec{\Delta}_i^T S_i^{-1} \vec{\Delta}_i, \tag{15.56}$$

$$\vec{\Delta}_i = A_i^- \vec{\xi}_i^- - A_{i-1}^+ \vec{\xi}_{i-1}^+, \tag{15.57}$$

$$S_i = S(t_{i-1}, t_i) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} W_e Q Q^T d\tau. \tag{15.58}$$

Функция W_e в (15.56), (15.58) имеет начальное значение $W_e(r_0, t_0) = W_{e0}$ для всех подынтервалов, матрица Q в (15.58) вычисляется на i-й опорной орбите $(i=1, ..., n)$.

Минимизируемый функционал всей задачи равен

$$J = \sum_{i=1}^{n} J_i, \tag{15.59}$$

i-я опорная орбита $(i=1, ..., n)$ задается векторами состояния

$$\vec{y}_i = \vec{y}_i(t) = \{\vec{q}_i, \vec{u}_i\}, \quad t_{i-1} \leqslant t \leqslant t_i,$$

$$\vec{y}_i^- = \vec{y}_i(t_i) = \{\vec{q}_i^-, \vec{u}_i^-\}, \quad \vec{y}_{i+1}^+ = \vec{y}_{i+1}(t_i) = \{\vec{q}_{i+1}^+, \vec{u}_{i+1}^+\}.$$

Предположим, что опорные орбиты образуют непрерывную кривую $\Rightarrow q_i^- = q_{i+1}^+$

$$\Rightarrow \Delta\vec{y}_i = \vec{y}_{i+1}^+ - \vec{y}_i^- = \{\vec{0}, \vec{u}_{i+1}^+ - \vec{u}_i^-\} = \{\vec{0}, \Delta\vec{u}_i\}. \tag{15.60}$$

Обозначим:

$$\vec{\xi}_i = \vec{\xi}_i^+,$$

$$\vec{\Xi} = \{\vec{\xi}_1, ..., \vec{\xi}_{n-1}\} \tag{15.61}$$

$\Rightarrow$ $\vec{\xi}_i^- = \vec{\xi}_i + \Delta\vec{y}_i$

$\Rightarrow$ соотношение (15.57) принимает вид

$$\begin{aligned} &\vec{\Delta}_i = A_i^- \vec{\xi}_i - A_{i-1}^+ \vec{\xi}_{i-1} + A_i^- \Delta\vec{y}_i \ \ (i=1, ..., n-1), \\ &\vec{\Delta}_n = A_n \vec{\xi}_n - A_{n-1}^+ \vec{\xi}_{n-1}. \end{aligned} \tag{15.62}$$

Вектор (15.61) может быть найден как $\vec{\Xi} = \arg\min J$

$$\Rightarrow \frac{\partial J}{\partial \vec{\Xi}} = \vec{0}^T. \tag{15.63}$$

Обозначим:

$$\begin{aligned} &C_i = A_i^{-T} S_i^{-1} A_i^-, \ D_i = C_i + A_i^{+T} S_{i+1}^{-1} A_i^+ \ \ (i=1, ..., n-1), \\ &E_i = A_{i-1}^{+T} S_i^{-1} A_i^- \ \ (i=2, ..., n-1) \end{aligned} \tag{15.64}$$

– матрицы 6-го порядка;

$$D = \begin{bmatrix} D_1 & -E_2 & 0 & . & . & . & 0 \\ -E_2^T & D_2 & -E_3 & . & . & . & . \\ 0 & -E_3^T & D_3 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & D_{n-3} & -E_{n-2} & 0 \\ . & . & . & . & -E_{n-2}^T & D_{n-2} & -E_{n-1} \\ 0 & . & . & . & 0 & -E_{n-1}^T & D_{n-1} \end{bmatrix} \tag{15.65}$$

— матрица порядка $6n-6$;

$$\vec{d}_1 = E_1^T \vec{\xi}_0 + E_2 \Delta\vec{y}_2 - C_1 \Delta\vec{y}_1,$$
$$\vec{d}_i = E_{i+1} \Delta\vec{y}_{i+1} - C_i \Delta\vec{y}_i \quad (i = 2, \dots, n-2), \tag{15.66}$$
$$\vec{d}_{n-1} = E_n \vec{\xi}_n - C_{n-1} \Delta\vec{y}_{n-1}$$

— 6-мерные векторы;

$$\vec{d} = \left\{\vec{d}_1, \dots, \vec{d}_{n-1}\right\} \tag{15.67}$$

— вектор размерности $6n-6$. Уравнение (15.63) с учетом (15.61), (15.62), (15.64)–(15.67) дает

$$\boxed{\vec{\Xi} = D^{-1}\vec{d}} \tag{15.68}$$

15.10. Вычислительная процедура, обеспечивающая требуемую точность

Предлагается следующая процедура с использованием подхода, описанного в 15.9:

1. Вычисляется вектор состояния опорной орбиты

$$\vec{y} = \vec{y}(t) = \left\{\vec{q}, \vec{u}\right\} \tag{15.69}$$

путем решения задачи Ламберта для заданных граничных положений $\vec{q}_0$, $\vec{q}_n$ и времени перелета T.

2. Время T делится на n подынтервалов (т. е. задаются моменты $t_1, \dots, t_{n-1}$) и определяются граничные условия

$$\vec{y}_i = \vec{y}(t_i) = \left\{\vec{q}_i, \vec{u}_i\right\}. \tag{15.70}$$

3. Вычисляются матрицы A_{i-1}^{+}, A_i^{-}, S_i для $i = 1, \dots, n$ и строятся матрица (15.65) и вектор (15.67).

4. Из (15.68) находится вектор (15.61) и вычисляются новые положения

$$\vec{q}_i' = \vec{q}_i + \vec{\rho}_i \quad (i = 1, \dots, n-1)$$

Одновременно для заданного множителя $0 < \sigma < 1$ вычисляются новые значения

$$\vec{q}_0' = \sigma\vec{q}_0, \quad \vec{q}_n' = \sigma\vec{q}_n$$

с целью обеспечения $\vec{\rho}_0 \to \vec{0}$, $\vec{\rho}_n \to \vec{0}$ в течение процедуры.

5. Вычисляются новые векторы состояния (15.70) опорных орбит между каждой парой $\vec{q}_{i-1}'$, $\vec{q}_i'$ ($i = 1, \dots, n$) путем решения задачи Ламберта n раз и находятся векторы (15.60).

Шаги 3–5 повторяются до тех пор, пока вектор (15.61) не станет достаточно малым. Тогда полагается $\vec{\rho}_0 = \vec{0}$, $\vec{\rho}_n = \vec{0}$.

15.11. Частично заданные граничные условия для случая разбиения времени на подынтервалы

Рассмотрим три примера частично заданных граничных условий в случае, когда время полета разбито на n подынтервалов.

1. <u>Скорость запуска может принимать любое значение</u>

$\Rightarrow$ векторы $\vec{\rho}_0$, $\vec{\rho}_n$, $\vec{\eta}_n$ заданы и вектор $\vec{\eta}_0$ не задан.

Включим $\vec{\eta}_0$ в вектор (15.61) $\Rightarrow$ расширенный вектор (15.61) имеет вид

$$\hat{\vec{\Xi}} = \left\{\vec{\eta}_0, \vec{\Xi}\right\}. \tag{15.71}$$

Определим

$$D_0 = Q_0^T S_1^{-1} Q_0, \quad E_0 = Q_0^T S_1^{-1} A_1^{-} \tag{15.72}$$

— матрицы 3×3 и 3×6,

$$\vec{d}_0 = -Q_0^T S_1^{-1} P_0 \vec{\rho}_0 + E_0 \Delta\vec{y}_1 \tag{15.73}$$

— 3-мерный вектор,

$$\hat{D} = \begin{bmatrix} D_0 & -E_0 & 0 & \cdots & 0 \\ -E_0^T & & & & \\ 0 & & D & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{bmatrix} \tag{15.74}$$

— матрица порядка $6n$ — 3,

$$\hat{\vec{d}} = \left\{\vec{d}_0, \vec{d}\right\} \tag{15.75}$$

— вектор размерности $6n-3$, где $\vec{\Xi}$, D, $\vec{d}$ заданы в (15.61), (15.65), (15.67) $\Rightarrow$ уравнение

$$\frac{\partial J}{\partial \hat{\vec{\Xi}}} = \vec{0}^T \tag{15.76}$$

с учетом (15.56), (15.59), (15.62) дает

$$\boxed{\hat{\vec{\Xi}} = \hat{D}^{-1}\hat{\vec{d}}} \tag{15.77}$$

2. <u>Скорость прибытия в конечную точку может принимать любое значение</u>

$\Rightarrow$ векторы $\vec{\rho}_0, \vec{\eta}_0, \vec{\rho}_n$ заданы и вектор $\vec{\eta}_n$ не задан.

Включим $\vec{\eta}_n$ в вектор (15.61) $\Rightarrow$ расширенный вектор (15.61) имеет вид

$$\hat{\vec{\Xi}} = \left\{\vec{\Xi}, \vec{\eta}_n\right\}. \tag{15.78}$$

Определим

$$D_n = Q_n^T S_n^{-1} Q_n, \quad E_n = A_{n-1}^{+T} S_n^{-1} P_n \tag{15.79}$$

— матрицы 3×3 и 6×3,

$$\vec{d}_n = -Q_n^T S_n^{-1} P_n \vec{\rho}_n \tag{15.80}$$

— 3-мерный вектор,

$$\hat{D} = \begin{bmatrix} & & & & 0 \\ & & & & \vdots \\ & & D & & 0 \\ & & & & -E_n \\ 0 & \cdots & 0 & -E_n^T & D_n \end{bmatrix} \tag{15.81}$$

— матрица порядка $6n-3$,

$$\hat{\vec{d}} = \left\{\vec{d}, \vec{d}_n\right\} \tag{15.82}$$

— вектор размерности $6n-3$, где $\vec{\Xi}$, D, $\vec{d}$ заданы в (15.61), (15.65), (15.67) $\Rightarrow$ согласно уравнению (15.76) с учетом (15.56), (15.59), (15.62) расширенный вектор (15.78) определяется из (15.77).

<u>Замечание</u>. Если скорости как запуска, так и прибытия могут принимать любые значения, то оптимальным является пассивный перелет (т. е. без действия тяги).

3. <u>Величины скоростей старта и (или) прибытия заданы, а направления скоростей могут принимать любые значения</u> (если начальное и (или) конечное тело являются планетами, то имеются в виду асимптотические скорости)

Пусть $j=0$ или $j=n$; обозначим:

$\vec{r}_j$, $\vec{V}_j$ — координаты и скорости начального ($j=0$) или конечного ($j=n$) небесного тела;

$\vec{w}_j$ — скорость старта ($j=0$) или прибытия ($j=n$),

$w_j = \left|\vec{w}_j\right|$ задана;

$$\vec{\xi}'_j = \left\{\vec{r}_j - \vec{q}_j, \vec{V}_j - \vec{u}_j\right\} \tag{15.83}$$

(см. п. 15.7)

$$\Rightarrow \quad \vec{\xi}_j = \vec{\xi}'_j + \left\{\vec{0}, \vec{w}_j\right\}; \tag{15.84}$$

$$\vec{w}_j \cdot \vec{w}_j = w_j^2. \tag{15.85}$$

Условия трансверсальности имеют вид

$$\vec{\alpha}_j = \lambda_j \vec{w}_j \quad (j = 0,1), \tag{15.86}$$

где λ_j — неопределенные множители. Определим матрицу

$$\hat{D} = \begin{bmatrix} \lambda_0 I + D_0 & -E_0 & 0 & \cdots & 0 \\ -E_0^T & & & & \vdots \\ 0 & & D & & 0 \\ \vdots & & & & -E_n \\ 0 & \cdots & 0 & -E_n^T & \lambda_n I + D_n \end{bmatrix} \tag{15.87}$$

и векторы

$$\hat{\vec{\Xi}} = \left\{\vec{w}_0, \vec{\Xi}, \vec{w}_n\right\}, \tag{15.88}$$

$$\hat{\vec{d}} = \left\{-E_0\left(\vec{\xi}'_0 - \Delta\vec{y}_1\right), \vec{d}', -Q_n^T S_n^{-1} A_n \vec{\xi}'_n\right\}, \tag{15.89}$$

где вектор $\vec{\Xi}$ и матрицы D, D_0, E_0, D_n, E_n задаются в (15.61), (15.65), (15.72), (15.79), $\vec{d}'$ в (15.89) — вектор (15.67) с $\vec{\xi}_0$, $\vec{\xi}_n$, замененными на $\vec{\xi}_0'$, $\vec{\xi}_n'$, заданными в (15.83).

Согласно уравнению (15.76) с учетом (15.56), (15.59), (15.62) расширенный вектор (15.88) определяется из (15.77).

Значения множителей λ_0, λ_n в (15.87) определяются таким образом, чтобы выполнялись условия (15.85).

Заметим, что если один из векторов $\vec{w}_0$, $\vec{w}_n$ задан, то соответствующие члены в (15.87)–(15.89) отсутствуют. Порядок матрицы (15.87) и размерность векторов (15.88), (15.89) равны $6n$, если не заданы направления обоих векторов $\vec{w}_0$, $\vec{w}_n$, и $6n-3$, если один из этих векторов задан.

15.12. Ограничения на направление тяги

Рассмотрим линейное однородное ограничение типа равенства

$$B\vec{\alpha}=\vec{0} \tag{15.90}$$

(см. главу 14). Согласно (14.15), (14.22)

$$\boxed{\vec{\alpha}=W_e P\vec{p}_v} \tag{15.91}$$

где

$$P=I-B^T\left(BB^T\right)^{-1}B \tag{15.92}$$

– проективная матрица (см. п. 14.8). Вектор $\vec{p}_v$ удовлетворяет уравнениям (14.10), где в силу (14.11), (14.49) для линейных ограничений

$$\left|\vec{\psi}_r\right|\sim\alpha\,,\quad\left|\vec{\psi}_v\right|\sim\alpha$$

$\Rightarrow$ так как метод транспортирующей траектории является приближенным, векторами $\vec{\psi}_r$, $\vec{\psi}_v$ в уравнениях (14.10) можно пренебречь $\Rightarrow$ вектор (15.14) удовлетворяет уравнению (15.20) $\Rightarrow$ $\vec{p}_v$ определяется соотношением (15.21) $\Rightarrow$ согласно (15.91)

$$\boxed{\vec{\alpha}=W_e PQ^T\vec{\beta}} \tag{15.93}$$

15. Оптимизация перелетов с малой тягой

Подстановка (15.93) в (15.19) показывает, что для нахождения оптимального решения можно использовать уравнения (15.25)—(15.28) с матрицей

$$\boxed{S=S\left(t_0,t\right)=\int_{t_0}^{t}W_eQPQ^T d\tau,\ S_1=S\left(t_0,t_1\right)} \tag{15.94}$$

16. ЭЛЕКТРОРЕАКТИВНАЯ ТЯГА: СПИРАЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ

16.1. Постановка задачи и основные допущения

Рассмотрим изменение орбитальной энергии космического аппарата (КА) электрореактивной тягой за минимальное время.

Задача заключается в нахождении параметров движения КА в течение изменения его орбитальной энергии

Принимаются следующие допущения:

- Расход рабочего тела в единицу времени и скорость истечения являются постоянными.
- Внешние силы включают только гравитационное притяжение центральной планеты с учетом ее сжатия.
- Начальная и (или) конечная орбиты являются круговыми.
- Оскулирующая орбита КА остается круговой с радиусом, изменяющимся под действием малой тяги.

Последнее предположение близко к реальности, если

реактивное ускорение ≪ гравитационного ускорения

(т. е. движение происходит в сильном гравитационном поле).

16.2. Время полета и радиус орбиты

Обозначим:

t_0, t — начальный и текущий моменты времени ($t \geqslant t_0$);
$\tau = t - t_0$ — время полета;
$r_0 = r(t_0)$, $r = r(t)$ — радиусы начальной и текущей орбит;
$v_0 = v(t_0)$, $v = v(t)$ — начальная и текущая скорости КА;
u — скорость истечения;
$\vec{\alpha}$ — вектор реактивного ускорения (тяги);
$m_0 = m(t_0)$, $m = m(t)$ — начальная и текущая масса КА;
$m_p = m_p(t)$ — израсходованная масса рабочего тела;

$\dot{m}_p = \dfrac{dm_p}{dt}$ — расход массы в единицу времени;

$$\dot{m} = \frac{dm}{dt} = -\dot{m}_p \quad (\dot{m} \leqslant 0). \tag{16.1}$$

Согласно допущениям, принятым в п. 16.1,

$$\boxed{\dot{m}_p = |\dot{m}| = \text{const}, \ u = \text{const}}$$

$$\Rightarrow \quad m_p = \dot{m}_p \tau, \ m = m_0 - \dot{m}_p \tau,$$

$$\alpha = |\vec{\alpha}| = \frac{\dot{m}_p u}{m} = \frac{\dot{m}_p u}{m_0 - \dot{m}_p \tau}, \tag{16.2}$$

$$\Delta v = u \ln \frac{m_0}{m} = u \ln \frac{m_0}{m_0 - \dot{m}_p \tau}. \tag{16.3}$$

Интеграл энергии:

$$v^2 = \frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a}$$

$\Rightarrow$ в силу реактивного ускорения:

$$2\vec{v} \cdot \vec{\alpha} = \frac{\mu}{a^2} \dot{a} \tag{16.4}$$

$$\Rightarrow \quad |\dot{a}| = \max, \text{ если } \begin{cases} \vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{v} & \text{для увеличения радиуса орбиты,} \\ \vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{v} & \text{для уменьшения радиуса орбиты} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{v} \cdot \vec{\alpha} = \pm v \alpha \tag{16.5}$$

(«+» для подъема и «–» для снижения).

Так как орбита круговая, то

$$a = r, \tag{16.6}$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{\mu}{r_0}}, \ v = \sqrt{\frac{\mu}{r}} \tag{16.7}$$

$\Rightarrow$ из (16.2), (16.4)–(16.7) получим следующее уравнение:

$$\pm 2\sqrt{\frac{\mu}{r}} \frac{\dot{m} u}{m_0 - \dot{m}_p \tau} = \frac{\mu}{r^2} \frac{dr}{dt}. \tag{16.8}$$

Интегрируя (16.8) с учетом (16.7), получим

$$\boxed{\tau = \frac{m_0}{\dot{m}_p} \left[1 - \exp\left(-\frac{|v - v_0|}{u} \right) \right]} \tag{16.9}$$

$$\boxed{m_p = \dot{m}_p \tau = m_0 \left[1 - \exp\left(-\frac{\left|v - v_0\right|}{u}\right)\right]} \tag{16.10}$$

$$\boxed{m = m_0 - m_p = m_0 \exp\left(-\frac{\left|v - v_0\right|}{u}\right)} \tag{16.11}$$

Сравнивая (16.3) и (16.10), найдем

$$\boxed{\Delta v = \left|v - v_0\right|} \tag{16.12}$$

Соотношения (16.9), (16.7) дают

$$\boxed{r = \frac{r_0}{\left[1 \pm \frac{u}{v_0} \ln\left(1 - \frac{\dot{m}_p \tau}{m_0}\right)\right]^2}} \tag{16.13}$$

где «+» для подъема и «−» для снижения.

16.3. Число оборотов и угловая дальность

Обозначим:
N — число оборотов КА за время τ (дробная величина);
φ — полная угловая дальность за время τ;
$\phi = \mathrm{mod}_{2\pi}\, \varphi$ — фазовый угол ($0 \leqslant \phi < 2\pi$);

$$n = \frac{\sqrt{\mu}}{r^{3/2}} \tag{16.14}$$

— среднее движение КА;

$$\eta_0 = \pm \frac{v_0}{u}, \; \eta = \pm \frac{v}{u} \tag{16.15}$$

(«+» для подъема и «−» для снижения)
$\Rightarrow$ так как $v_0 > v$ при подъеме и $v_0 < v$ при снижении (см. (16.7)) и согласно (16.12)

$$\eta - \eta_0 = -\frac{\left|v - v_0\right|}{u} = -\frac{\Delta v}{u}. \tag{16.16}$$

Поскольку оскулирующая орбита предполагается круговой, то

$$\varphi = 2\pi N = \int_{t_0}^{t} n\, dt\,. \tag{16.17}$$

Из (16.17), (16.14)

$$N = \frac{1}{2\pi} \int_{t_0}^{t} n dt = \frac{\sqrt{\mu}}{2\pi} \int_{t_0}^{t} \frac{dt}{r^{3/2}}. \tag{16.18}$$

Согласно (В.11) (см. Приложение В)

$$\boxed{N = \frac{u^3}{2\pi \mu \dot{m}_p} \left|L_3\right|} \tag{16.19}$$

Угловая дальность и фазовый угол равны

$$\boxed{\varphi = 2\pi N, \; \phi = 2\pi\left(N - \mathrm{int}\, N\right)} \tag{16.20}$$

16.4. Долгота восходящего узла

Обозначим:
$\Omega = \Omega(t)$ — долгота восходящего узла;
$\dot{\Omega} = \dfrac{d\Omega}{dt}$ — <u>прецессия восходящего узла</u>, т. е. вековое возмущение, обусловленное сжатием планеты;
$\Omega_0 = \Omega(t_0)$, $\dot{\Omega}_0 = \dot{\Omega}\left(t_0\right)$;
J_2 — коэффициент второй зональной гармоники;
R_e — экваториальный радиус Земли;
i — наклонение орбиты.

Прецессия восходящего узла для круговой орбиты (см. главу 5, уравнение (5.27)):

$$\dot{\Omega} = -\frac{3}{2} J_2 n \left(\frac{R_e}{r}\right)^2 \cos i \tag{16.21}$$

$\Rightarrow$ принимая во внимание (16.14), получим

$$\dot{\Omega} = \dot{\Omega}_0 \left(\frac{r_0}{r}\right)^{7/2} \tag{16.22}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta\Omega = \Omega - \Omega_0 = \dot{\Omega}_0 r_0^{7/2} \int_{t_0}^{t} \frac{dt}{r^{7/2}}. \qquad (16.23)$$

Из (16.7), (16.23) и (B.11) (см. Приложение B) найдем

$$\boxed{\Delta\Omega = \frac{\dot{\Omega}_0 u^7}{\dot{m}_p v_0^7} \left| L_7 \right|} \qquad (16.24)$$

16.5. Сравнение аналитических результатов с численным интегрированием

Целью этого анализа является оценка ошибок приближенных формул, полученных в пп. 16.2–16.4, т. е. вычисление разностей между приближенными и точными значениями.

Рассмотрим подъем КА с низкой круговой орбиты вокруг Земли и примем следующие значения:

$u = 15$ км/с,

$\alpha_0 = 5 \cdot 10^{-5}\, g_e$ ($g_e = 9{,}8066$ м/с^2),

$r_0 = 6771$ км (т. е. $h_0 = 400$ км).

Рисунки 16.1, 16.2 показывают ошибки и относительные ошибки как функции времени; также показано точное значение радиуса орбиты r.

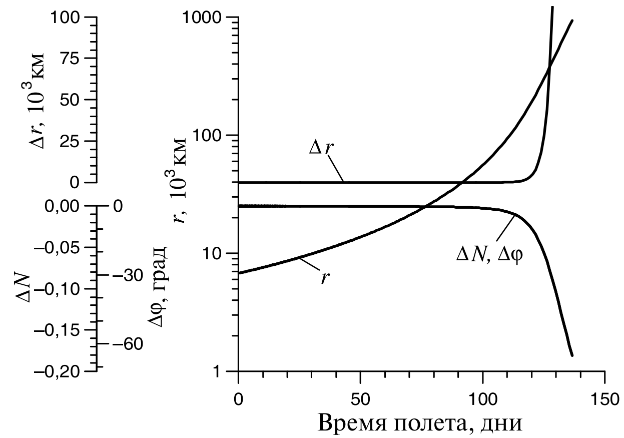


Рис. 16.1

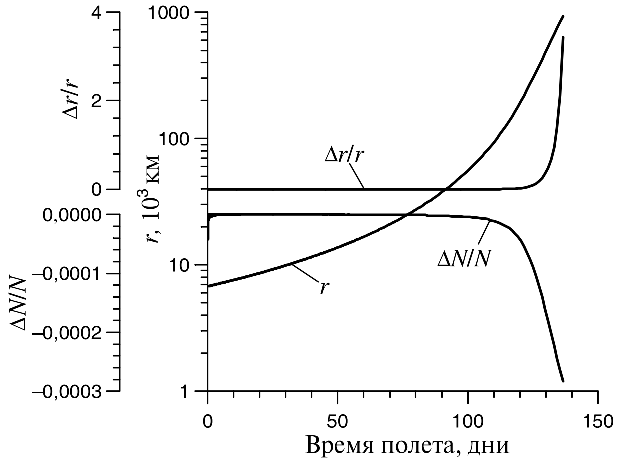


Рис. 16.2

Обозначим

$g = \dfrac{\mu}{r^2}$ — местное гравитационное ускорение.

Введем безразмерное реактивное ускорение

$$\tilde{\alpha} = \frac{\alpha}{g} = \frac{\alpha r^2}{\mu}, \ \tilde{\alpha}_0 = \frac{\alpha_0}{g_0} = \frac{\alpha_0 r_0^2}{\mu} \qquad (16.25)$$

Рисунок 16.3 показывает зависимость величины $\tilde{\alpha}$ от времени.

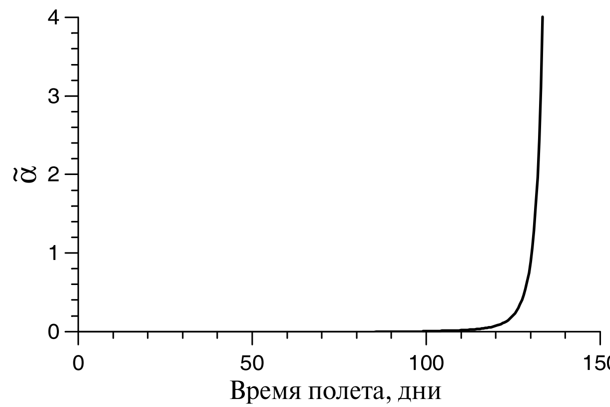


Рис. 16.3

Как видно из рис. 16.1—16.3, ошибки приблизительно пропорциональны величине $\tilde{\alpha}$.

Рисунки 16.4, 16.5 показывают зависимость ошибок и относительных ошибок от радиуса орбиты; время полета τ также показано.

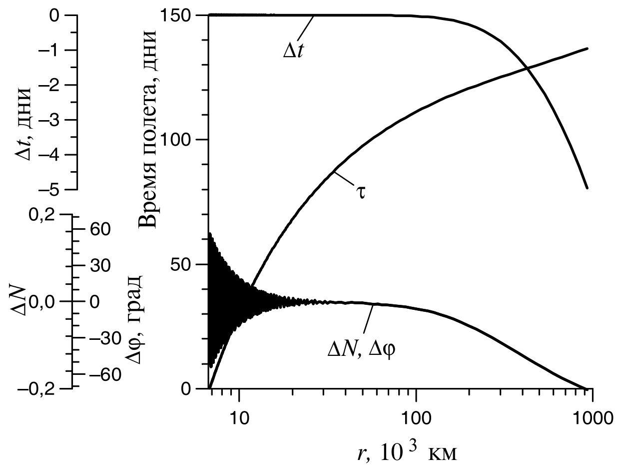


Рис. 16.4

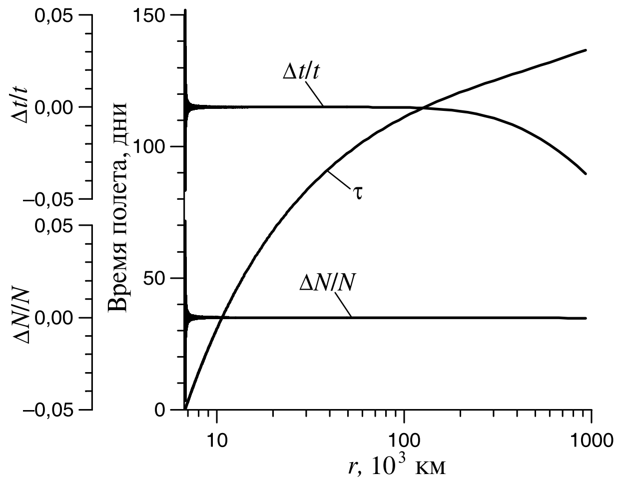


Рис. 16.5

На рис. 16.6, 16.7 приведена зависимость ошибок и относительных ошибок от большой полуоси; радиус орбиты *r* также показан.

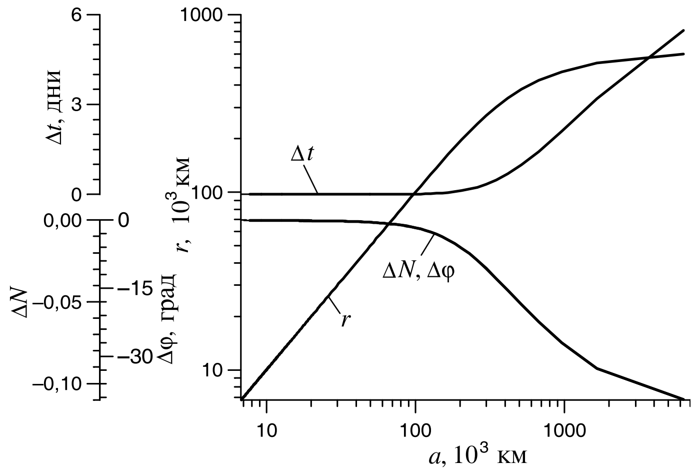


Рис. 16.6

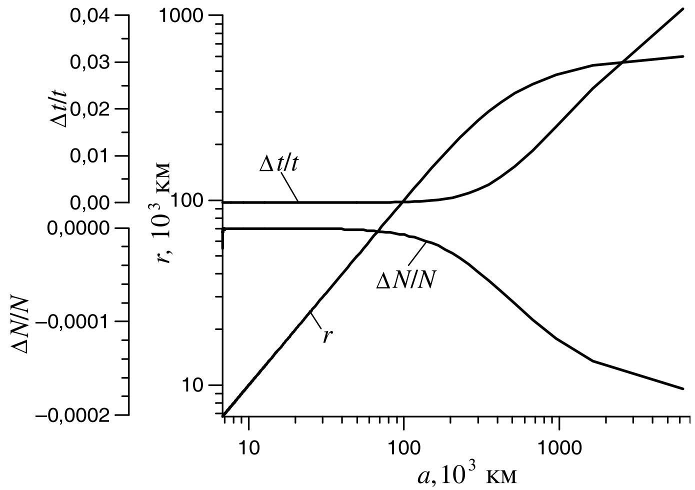


Рис. 16.7

16.6. Значения параметров на бесконечности

Рассмотрим подъем КА с круговой орбиты радиуса r_0 до выхода из сферы действия планеты. Обычно радиус сферы действия $R_S \gg r_0$

$\Rightarrow$ можно принять $r = \infty \;\Rightarrow\; v = \sqrt{\dfrac{\mu}{r}} = 0$

$\Rightarrow$ из (16.9) − (16.11) получим

$$\tau_\infty = \frac{m_0}{\dot m_p}\left[1 - \exp\left(-\frac{v_0}{u}\right)\right], \tag{16.26}$$

$$m_\infty = m_0 \exp\left(-\frac{v_0}{u}\right), \tag{16.27}$$

$$m_{p\infty} = m_0\left[1 - \exp\left(-\frac{v_0}{u}\right)\right]. \tag{16.28}$$

Обозначим $P_0 = 2\pi\dfrac{r_0^{3/2}}{\sqrt{\mu}}$ — период начальной круговой орбиты.

Пусть $v_0 \ll u \;\Rightarrow\; \exp\left(-\dfrac{v_0}{u}\right) \approx 1 - \dfrac{v_0}{u}$

$\Rightarrow$ из (16.26)−(16.28) с учетом (16.7), (16.25) получим

$$\boxed{\tau_\infty \approx \frac{P_0}{2\pi\tilde\alpha_0}} \tag{16.29}$$

$$\boxed{m_\infty \approx m_0 - \frac{\dot m_p P_0}{2\pi\tilde\alpha_0}} \tag{16.30}$$

$$m_{p\infty} \approx \frac{\dot m_p P_0}{2\pi\tilde\alpha_0} \tag{16.31}$$

Соотношение (16.12) дает

$$\boxed{\Delta v_\infty = v_0} \tag{16.32}$$

$$\left(\begin{array}{l}\text{Для импульсной тяги } \Delta v_{imp\infty} = \left(\sqrt{2} - 1\right)v_0. \\ \text{Превышение } \delta v = \Delta v_\infty - \Delta v_{imp\,\infty} \approx 0{,}586 v_0 \\ \text{– гравитационные потери}\end{array}\right)$$

Так как на бесконечности $v = 0$, то согласно (16.15) $\eta = 0$ $\Rightarrow$ соотношения (16.9), (В.7) дают

$$N_\infty = \frac{m_0 u^3}{2\pi\mu\dot m_p}\left(6\frac{m_\infty}{m_0} + \eta_0^3 - 3\eta_0^2 + 6\eta_0 - 6\right). \tag{16.33}$$

Из (16.27) получим

$$\frac{m_\infty}{m_0} = e^{-\frac{v_0}{u}} = e^{-\eta_0} \approx 1 - \eta_0 + \frac{\eta_0^2}{2} - \frac{\eta_0^3}{6} + \frac{\eta_0^4}{24} \tag{16.34}$$

$\Rightarrow$ соотношения (16.33), (16.34) с учетом (16.2) дают

$$N_\infty \approx \frac{m_0 u^3}{2\pi\mu\dot m_p}\frac{\eta_0^4}{4} = \frac{m_0 v_0^4}{8\pi\mu\dot m_p u} = \frac{\dfrac{\mu}{r_0^2}}{8\pi\mu\dfrac{\dot m_p u}{m_0}}$$

$\Rightarrow$ согласно (16.25)

$$\boxed{N_\infty \approx \frac{1}{8\pi\tilde\alpha_0}} \tag{16.35}$$

Аналогично из (16.24, В.7) получим

$$\Delta\Omega_\infty = \frac{\dot\Omega_0 m_0 u^7}{\dot m_p v_0^7}\Big(5040\frac{m_\infty}{m_0} + \eta_0^7 - 7\eta_0^6 + 42\eta_0^5 - 210\eta_0^4 + \\ + 840\eta_0^3 - 2520\eta_0^2 + 5040\eta_0 - 5040\Big), \tag{16.36}$$

$$\frac{m_\infty}{m_0} = e^{-\frac{v_0}{u}} = e^{-\eta_0} \approx 1 - \eta_0 + \frac{\eta_0^2}{2} - \frac{\eta_0^3}{6} + \frac{\eta_0^4}{24} - \frac{\eta_0^5}{120} + \frac{\eta_0^6}{720} - \\ - \frac{\eta_0^7}{5040} + \frac{\eta_0^8}{40320} \tag{16.37}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Delta\Omega_\infty \approx \frac{\dot{\Omega}_0 P_0}{16\pi\tilde{\alpha}_0}} \tag{16.38}$$

Замечание. Полученные формулы могут также использоваться для перехода из бесконечности на круговую орбиту радиуса r_0. В этом случае m_0 — масса КА на бесконечности; v_0, η_0, P_0, $\dot{\Omega}_0$, $\tilde{\alpha}_0$ — значения на конечной орбите.

16.7. Значения параметров на параболической орбите

Будем помечать параметры на параболической орбите индексом *par*. Согласно рис. 16.3 мы можем предположить, что $\tilde{\alpha}_{par} \sim 1$

$$\left(\begin{array}{l} \text{Точные вычисления показывают, что} \\ \left.\begin{array}{l} 10^{-5} g_e \leqslant \alpha_0 \leqslant 10^{-2} g_e \\ 10 \leqslant u \leqslant 50 \text{ км/с} \end{array}\right\} \Rightarrow 0{,}77 \leqslant \tilde{\alpha}_{par} \leqslant 0{,}8 \end{array} \right)$$

Примем для простоты

$$\tilde{\alpha}_{par} = 1\,. \tag{16.39}$$

Заметим, что параболическая скорость равна

$$v_{par} = \sqrt{2}v\,,$$

где v — круговая скорость в момент времени τ_{par}. Соотношения (16.2), (16.3), (16.12), (16.25), (16.39) дают

$$\tilde{\alpha}_{par} = \frac{\dot{m}_p u}{m_{par}} = \frac{\dot{m}_p u}{m_0}\exp\left(-\frac{|v - v_0|}{u}\right) = \frac{\mu}{r_{par}^2} \tag{16.40}$$

$$\Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{\mu}{r_{par}}} = \sqrt[4]{\frac{\mu\,\dot{m}_p u}{m_0}} \exp\left(-\frac{|v - v_0|}{4u}\right). \tag{16.41}$$

Предположим, что $|v - v_0| \ll 4u$

$$\Rightarrow \quad \exp\left(-\frac{|v - v_0|}{4u}\right) \approx 1\,. \tag{16.42}$$

С другой стороны,

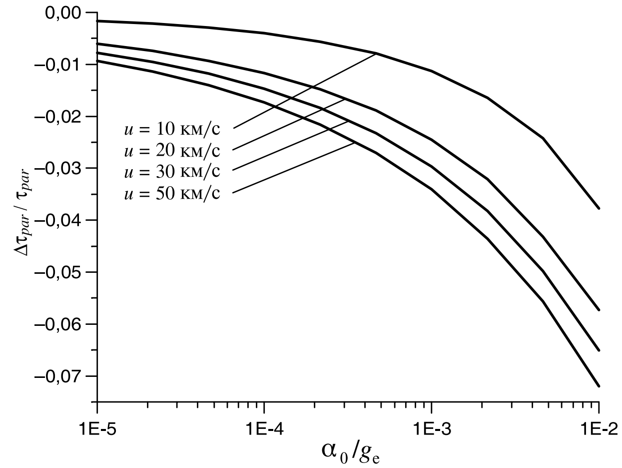


Рис. 16.8

$$\frac{\mu\dot{m}_p u}{m_0} = \left(\frac{\mu}{r_0}\right)^2 \frac{\dot{m}_p u}{m_0}\frac{r_0^2}{\mu} = v_0^4\tilde{\alpha}_0 \tag{16.43}$$

$\Rightarrow$ из (16.41)−(16.43) найдем

$$v \approx v_0\sqrt[4]{\tilde{\alpha}_0}\,, \quad \boxed{v_{par} \approx v_0\sqrt[4]{4\tilde{\alpha}_0}} \tag{16.44}$$

$\Rightarrow$ подставляя v из (16.44) в (16.9), получим

$$\boxed{\tau_{par} \approx \frac{m_0}{\dot{m}_p}\left\{1 - \exp\left[-\frac{v_0}{u}\left(1 - \sqrt[4]{\tilde{\alpha}_0}\right)\right]\right\}} \tag{16.45}$$

Рисунок 16.8 дает ошибку формулы (16.45) (приближенное минус точное значения) для $10^{-5}g_e \leqslant \alpha_0 \leqslant 10^{-2}g_e$ и $10 \leqslant u \leqslant 50$ км/с.

Введем эмпирическую поправку в (16.44) и (16.45):

$$\boxed{v_{par} \approx 0{,}86 v_0\sqrt[4]{4\tilde{\alpha}_0}} \tag{16.46}$$

$$\boxed{\tau_{par} \approx \frac{m_0}{\dot{m}_p}\left\{1 - \exp\left[-\frac{v_0}{u}\left(1 - 0{,}86\sqrt[4]{\tilde{\alpha}_0}\right)\right]\right\}} \tag{16.47}$$

Рисунок 16.9 показывает, что эта поправка уменьшает ошибку.

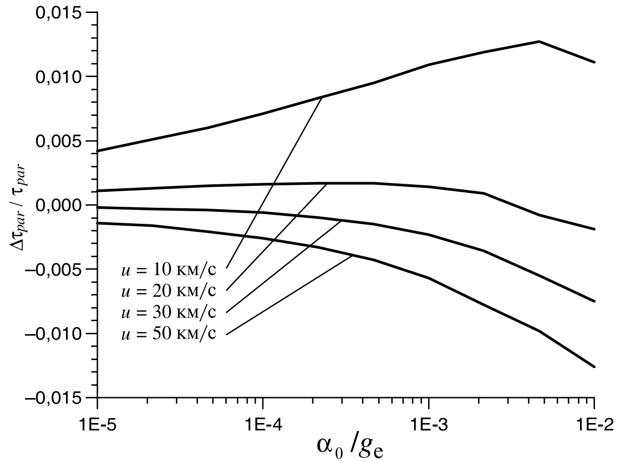


Рис. 16.9

Из (16.12), (16.13) найдем значения других параметров на моменты времени (16.45) и (16.47):

$$\boxed{m_{par} = m_0 \exp\left[-\frac{v_0}{u}\left(1 - c_1\sqrt[4]{\tilde{\alpha}_0}\right)\right]} \tag{16.48}$$

$$\boxed{\Delta v_{par} = v_0\left(1 - c_1\sqrt[4]{\tilde{\alpha}_0}\right)} \tag{16.49}$$

где $c_1 = 1$ для (16.45) и $c_1 = 0{,}86$ для (16.47),

$$\boxed{r_{par} = c_2\frac{r_0}{\sqrt{\tilde{\alpha}_0}}} \tag{16.50}$$

где $c_2 = 1$ для (16.45) и $c_2 = 1{,}35$ для (16.47).

Если $v_0 \ll u$, то

$$\exp\left[-\frac{v_0}{u}\left(1 - \sqrt[4]{\tilde{\alpha}_0}\right)\right] \approx 1 - \frac{v_0}{u}\left(1 - \sqrt[4]{\tilde{\alpha}_0}\right)$$

и формулы (16.45), (16.47) принимают вид, аналогичный (16.29):

$$\boxed{\tau_{par} \approx \frac{P_0}{2\pi\tilde{\alpha}_0}\left(1 - c_1\sqrt[4]{\tilde{\alpha}_0}\right)} \tag{16.51}$$

Замечание. Полученные формулы могут использоваться как для перехода с круговой на параболическую орбиту, так и с параболической на круговую. В случае снижения орбиты:

m_0 — масса КА на параболической орбите;

$v_0, P_0, \tilde{\alpha}_0$ — значения параметров на конечной круговой орбите.

16.6. Выводы

- Полученные формулы позволяют вычислять все параметры движения КА с малой тягой по спиральной орбите для следующих случаев:
  - изменение радиуса круговой орбиты;
  - переход с круговой орбиты на траекторию выхода из сферы действия;
  - переход с траектории, входящей в сферу действия, на круговую орбиту.
- Полученные формулы обеспечивают высокую точность при $\tilde{\alpha} \ll 1$. При $\tilde{\alpha} \sim 1$ точность может оказаться недостаточной.
- Формула (16.13) дает скорее большую полуось, чем реальное положение КА.

П р и л о ж е н и е А. **Сравнение двухимпульсных переходов между круговой и эллиптической орбитами**

Конечная орбита снаружи начальной

Соотношения (6.22) дают:

$$\frac{\Delta v_\pi - \Delta v_\alpha}{v_0} = \eta\,, \tag{A.1}$$

где

$$\eta = \sqrt{2}\left[\left(1-\xi_1\right)\sqrt{\frac{\xi_0}{\xi_1\left(1+\xi_1\right)}} + \frac{\xi_1-\xi_0}{\sqrt{\xi_1\left(\xi_0+\xi_1\right)}} - \frac{1-\xi_0}{\sqrt{1+\xi_0}}\right], \tag{A.2}$$

ξ_0, ξ_1 удовлетворяют (6.20). Как видно из (A.1), (A.2)

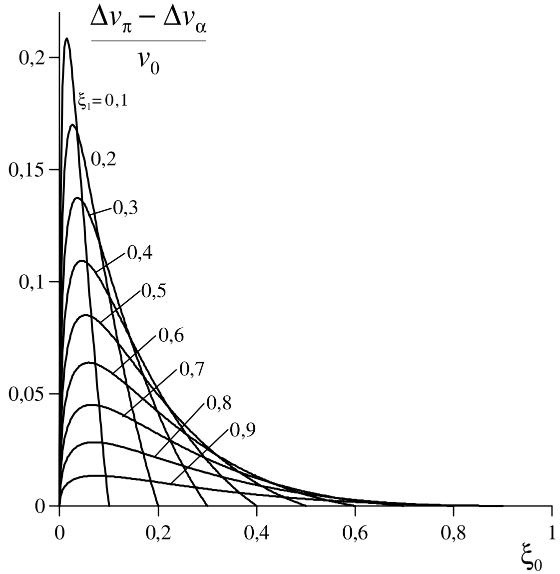
$\Delta v_\pi = \Delta v_\alpha$,

если $\xi_1 = \xi_0$ или $\xi_1 = 1$.

Рисунок A.1 показывает зависимость η от ξ_0 для различных значений ξ_1

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Delta v_\pi \geqslant \Delta v_\alpha} \tag{A.3}$$

для всех ξ_0, ξ_1, удовлетворяющих (6.20).



Р и с. А.1

Конечная орбита внутри начальной

Соотношения (6.26) дают

$$\frac{\Delta v_\alpha - \Delta v_\pi}{v_0} = \eta, \tag{A.4}$$

где η задана в (A.2), ξ_0, ξ_1 удовлетворяют (6.24). Как видно из (A.2), (A.4),

$\Delta v_\pi = \Delta v_\alpha$,

если $\xi_0 = \xi_1$ или $\xi_1 = \xi_0$.

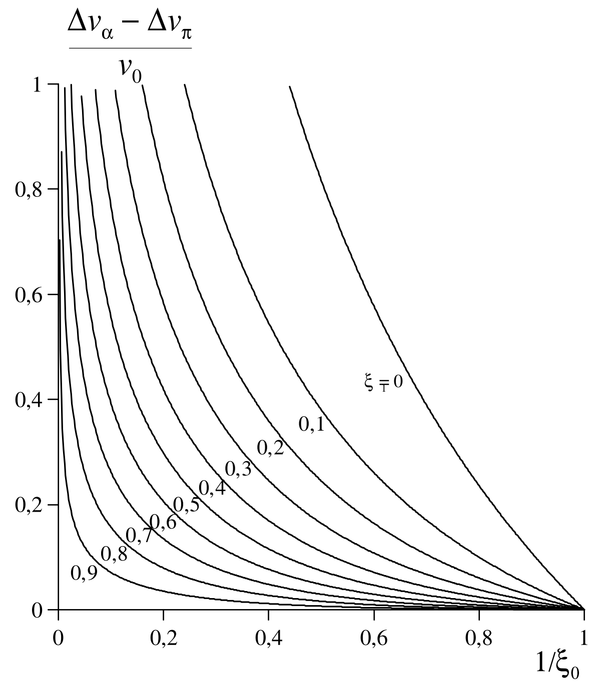
Рисунок A.2 показывает зависимость (A.4) от $1/\xi_0$ для различных значений ξ_1

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Delta v_\pi \leq \Delta v_\alpha} \tag{A.5}$$

для всех ξ_0, ξ_1, удовлетворяющих (6.24).

Начальная и конечная орбиты пересекаются

Соотношения (6.29), (6.30) дают



Р и с. А.2

$$\frac{\Delta v_\pi - \Delta v_\alpha}{\sqrt{2}v_0} = \sqrt{2} - \sqrt{1+\xi_0} + \sqrt{\frac{\xi_0}{\xi_1(1+\xi_1)}} + \sqrt{\frac{\xi_0\xi_1}{1+\xi_1}} - \sqrt{\frac{\xi_0+\xi_1}{\xi_1}} =$$
$$= \sqrt{2} - \sqrt{1+\xi_0} + \sqrt{\frac{\xi_0(1+\xi_1)}{\xi_1}} - \sqrt{\frac{\xi_0+\xi_1}{\xi_1}}. \tag{А.6}$$

Умножая и деля первый и второй члены (А.6) на $\sqrt{2}+\sqrt{1+\xi_0}$ и третий и четвертый члены (А.6) на $\sqrt{\xi_0(1+\xi_1)}+\sqrt{\xi_0+\xi_1}$, получим

$$\frac{\Delta v_\pi - \Delta v_\alpha}{\sqrt{2}v_0} = \frac{1-\xi_0}{\sqrt{2}+\sqrt{1+\xi_0}} - \frac{(1-\xi_0)\sqrt{\xi_1}}{\sqrt{\xi_0(1+\xi_1)}+\sqrt{\xi_0+\xi_1}} =$$
$$= (1-\xi_0)\frac{\sqrt{\xi_0(1+\xi_1)}+\sqrt{\xi_0+\xi_1}-\sqrt{2\xi_1}-\sqrt{\xi_1(1+\xi_0)}}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{1+\xi_0}\right)\left[\sqrt{\xi_0(1+\xi_1)}+\sqrt{\xi_0+\xi_1}\right]}. \tag{А.7}$$

В силу (6.28) $1-\xi_0 \geqslant 0$, $\sqrt{\xi_0+\xi_0\xi_1} \geqslant \sqrt{\xi_1+\xi_0\xi_1}$, $\sqrt{\xi_0+\xi_1} \geqslant \sqrt{2\xi_1}$,

$\Rightarrow$ числитель и знаменатель в (А.7) являются положительными

$$\Rightarrow \boxed{\Delta v_\pi \geqslant \Delta v_\alpha} \tag{А.8}$$

и $\Delta v_\pi = \Delta v_\alpha$ если $\xi_1 = \xi_0$ или $\xi_1 = 1$.

Приложение Б. Проекции на множества и их свойства

Рассмотрим векторное пространство с элементами $\vec{a}, \vec{b}, \ldots$ и с нормой $\|\vec{a}\| = a = \sqrt{\vec{a}^T\vec{a}}$ и метрикой $\rho(\vec{a}, \vec{b}) = \|\vec{a} - \vec{b}\|$. Верхним индексом «0» будем обозначать единичные векторы, т. е. $\vec{a}^0 = \vec{a}/a$.

<u>Определение</u>. Векторной проекцией (или просто проекцией) вектора $\vec{b}$ на $\vec{a}$ является вектор

$$\vec{b}_a = (\vec{b}^T\vec{a}^0)\vec{a}^0 = \vec{a}^0\vec{a}^{0T}\vec{b}, \tag{Б.1}$$

$\Rightarrow$ матрица

$$P = \vec{a}^0\vec{a}^{0T} \tag{Б.2}$$

проецирует любой вектор на $\vec{a}$, т. е.

$$\vec{b}_a = P\vec{b}, \tag{Б.3}$$

P — <u>проективная матрица</u>, обладающая свойствами:

$$P^T = P^2 = P. \tag{Б.4}$$

<u>Определение</u>. Проекция $\vec{b}_A$ вектора $\vec{b}$ на замкнутое векторное множество A — это проекция на такой вектор $\vec{a} \in A$, на котором достигается $d = \max \vec{b}^T\vec{a}^0$ (или $\min\|\vec{b} - \vec{a}^0\|$), если $d > 0$, и $\vec{b}_A = \vec{0}$, если $d \leqslant 0$.

Пусть $\vec{a}^0$ — единичный вектор вектора $\vec{b}_A$, если $\vec{b}_A \neq \vec{0}$, и $\vec{a}^0 = \vec{0}$, если $\vec{b}_A = \vec{0}$,

$\Rightarrow$ матрица (Б.2) проецирует $\vec{b}$ на A.

<u>Определение</u>. Ненулевую проекцию $\vec{b}_A$ будем называть также <u>абсолютной</u> проекцией на множество.

<u>Замечание</u>. Проекция на множество может не принадлежать этому множеству. Например, проекция на множество единичных векторов может не являться единичным вектором.

<u>Лемма Б.1</u>. а) Если $\exists\, x > 0$: $x\vec{b} \in A$, то $\vec{b}_A = \vec{b}$.

б) Если $x\vec{b} \notin A$ для $x > 0$, то $\vec{b}_A$ достигается на границе множества A.

<u>Доказательство</u>

а) Согласно определению проекции на множество, если $x\vec{b} \in A$, то $\max \vec{b}^T\vec{a}^0$ достигается для $\vec{a} = x\vec{b} \Rightarrow \vec{a}^0 = \vec{b}^0 \Rightarrow \vec{b}_A = \vec{a}^0\vec{a}^{0T}\vec{b} = \vec{b}$.

б) Допустим, что проекция $\vec{b}_A$ достигается на векторе $\vec{a}$, который является внутренней точкой множества $A \Rightarrow \vec{a}$ входит в A вместе с некоторой окрестностью $\Rightarrow$ существует вектор $\vec{a}_\varepsilon$ в этой окрестности, образующий меньший угол с $\vec{b}$, чем вектор $\vec{a}$, т. е. $\vec{b}^T\vec{a}^0 < \vec{b}^T\vec{a}_\varepsilon^0$, что противоречит определению проекции на множество.

Лемма Б.1 иллюстрируется рис. Б.1.

Определение. Проекция $\vec{b}_i$ вектора $\vec{b}$ на вектор $\vec{a}_i \in A$ $(i = 1, 2, ...)$ является локальной проекцией на A, если существует такая окрестность вектора $\vec{a}_i$, что для любого вектора $\vec{a}_\varepsilon$, принадлежащего A и этой окрестности,

$$\vec{b}^T\vec{a}_\varepsilon^0 \leqslant \vec{b}^T\vec{a}_i^0 \qquad (Б.5)$$

(Другими словами, на локальной проекции достигается локальный $\max \vec{b}^T\vec{a}_i^0$.)

Абсолютная и локальная проекции показаны на рис. Б.2.

Рассмотрим пересечение s множеств:

$$A = \bigcap_{j=1}^{s} A_j . \qquad (Б.6)$$

Лемма Б.2. Абсолютная проекция на пересечение множеств (Б.6) достигается либо на проекции (абсолютной или локальной) на одно из множеств, либо на пересечении границ по крайней мере двух множеств.

Доказательство

Если $\exists\, x > 0$ такой, что $x\vec{b} \in A$, тогда согласно лемме Б.1 $\vec{b}_A = \vec{b}$ и $\vec{b}_A$ — абсолютная проекция вектора $\vec{b}$ для каждого из множеств A_j.

Предположим, что $x\vec{b} \notin A$ для любого $x > 0 \Rightarrow$ согласно лемме Б.1 проекция $\vec{b}_A$ достигается на границе A, т. е. на границе одного (случай 1) или нескольких (случай 2) множеств A_j. Случай 2 соответствует утверждению леммы.

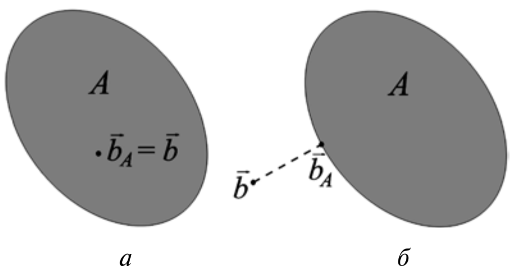


Рис. Б.1

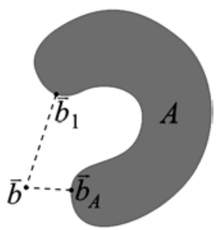


Рис. Б.2

Пусть вектор $\vec{a} \in A$, на котором достигается $\vec{b}_A$, принадлежит границе множества A_i $(1 \leqslant i \leqslant s)$ и является внутренней точкой других множеств $\Rightarrow \exists$ окрестность V вектора $\vec{a}$: $V \subset A_j, j \neq i$. Допустим, что $\vec{b}_A$ не является проекцией на A_i

$$\Rightarrow \quad \exists\ \vec{a}_\varepsilon \in A_i,\ \vec{a}_\varepsilon \in V :$$

$$\vec{b}^T\vec{a}_\varepsilon^0 > \vec{b}^T\vec{a}^0 . \qquad (Б.7)$$

С другой стороны, $\vec{a}_\varepsilon \in A \Rightarrow$ согласно (Б.7) $\vec{b}_A$ не достигается на $\vec{a}$. Это противоречие доказывает лемму.

Лемма Б.2 иллюстрируется рис. Б.3, где $\vec{b}_1$, $\vec{b}_{A1}$, $\vec{b}_{A2}$ — локальная проекция $\vec{b}$ на A_1 и абсолютные проекции $\vec{b}$ на A_1, A_2.

Лемма Б.3. Пусть абсолютная проекция $\vec{b}_{Ai}$ вектора $\vec{b}$ на множество A_i достигается на векторе $\vec{a}_i \in A$, где множество A является пересечением множеств $A_1, ..., A_s$. Тогда $\vec{b}_{Ai}$ — абсолютная проекция $\vec{b}$ на A.

Доказательство

Абсолютная проекция $\vec{b}$ на A_i достигается на векторе $\vec{a}_i$

$$\Rightarrow \quad \vec{b}^T\vec{a}^0 \leqslant \vec{b}^T\vec{a}_j^0 \qquad (Б.8)$$

для любого $\vec{a} \in A_j \Rightarrow$ (Б.8) выполняется для любого $\vec{a} \in A$, что доказывает лемму.

Лемма Б.4. Если существует единственная проекция вектора $\vec{b}$ на каждое из множеств $A_1, ..., A_s$, то:

1) Если $\exists\, A_i$ $(1 \leqslant i \leqslant s)$ такое, что проекция $\vec{b}_i$ вектора $\vec{b}$ на A_i достигается на $\vec{a}_i \in A$, то такое множество является единственным и $\vec{b}_A = \vec{b}_i$.

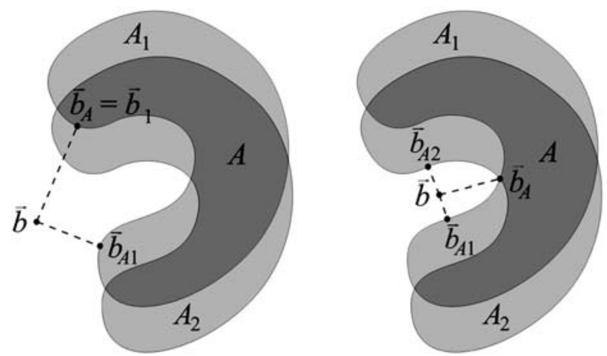


Рис. Б.3

2) Если среди множеств $A_1, ..., A_s$ нет ни одного, проекция вектора $\vec{b}$ на которое достигается на $\vec{a}_i \in A$, то проекция $\vec{b}$ на A достигается на пересечении по крайней мере двух множеств.

Доказательство

1) Проекция $\vec{b}_i$ на A_i является также проекцией вектора $\vec{b}$ на A согласно лемме Б.3. Допустим, что $\exists$ такое A_j ($j \neq i$), что проекция вектора $\vec{b}$ на A_j достигается на векторе $\vec{a}_j \in A$. Это возможно только при

$$\vec{b}^T \vec{a}_i^0 = \vec{b}^T \vec{a}_j^0 . \tag{Б.9}$$

Однако если $\vec{a}_j \in A$, то $\vec{a}_j \in A_i \Rightarrow$ (Б.9) противоречит единственности проекции на A_i.

2) Это утверждение следует из леммы Б.2.

Леммы Б.3 и Б.4 иллюстрируются рис. Б.4.

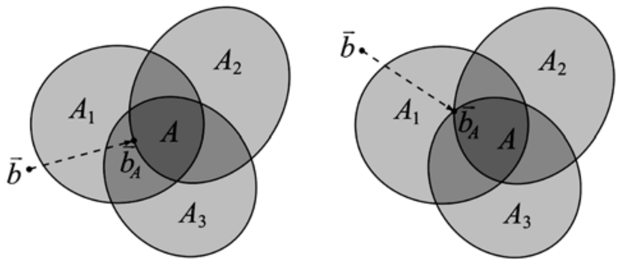


Рис. Б.4

Приложение В. Вычисление интеграла $\int\limits_{t_0}^{t} \frac{dt}{r^{n/2}}$

Обозначим

$$x = \frac{m}{m_0} = 1 - \frac{\dot{m}_p \tau}{m_0} . \tag{В.1}$$

Из (16.10), (16.15), (В.1) получим

$$\ln x = \eta - \eta_0 . \tag{В.2}$$

Рассмотрим неопределенные интегралы:

$$l_n = l_n(t) = m_0 \int (\eta_0 + \ln x)^n dx \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{В.3}$$

Вычисляя эти интегралы по частям, получим

$$l_n = m_0 x (\eta_0 + \ln x)^n - m_0 \int x d (\eta_0 + \ln x)^n =$$

$$= m (\eta_0 + \eta - \eta_0) - n m_0 \int (\eta_0 + \ln x)^{n-1} dx$$

$$\Rightarrow \boxed{l_0 = m_0 x = m, \ l_n = m \eta^n - n l_{n-1}} \tag{В.4}$$

Из (В.4) найдем l_n в другом виде:

$$l_n = m \left[\eta^n - n \eta^{n-1} + n(n-1) \eta^{n-2} - \ldots - (-1)^n n! \eta + (-1)^n n! \right] \tag{В.5}$$

(в (В.4), (В.5) произвольная постоянная игнорируется).

Рассмотрим определенный интеграл

$$L_n = m_0 \int\limits_{t_0}^{t} (\eta_0 + \ln x)^n dx \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) . \tag{В.6}$$

Согласно (В.4):

$$\boxed{\begin{aligned} L_0 &= l_0(t) - l_0(t_0) = m - m_0, \\ L_n &= l_n(t) - l_n(t_0) = m \eta^n - m_0 \eta_0^n - n L_{n-1} \end{aligned}} \tag{В.7}$$

Соотношения (16.7), (16.13), (16.15), (В.1), (В.6) дают

$$\int\limits_{t_0}^{t} \frac{dt}{r^{n/2}} = \frac{m_0}{r_0^{n/2} \eta_0^n \dot{m}_p} \int\limits_{x_0}^{x} (\eta_0 + \ln x)^n dx = \mp \frac{u^n L_n}{r_0^{n/2} \dot{m}_p \sqrt{(\mu / r_0)^n}} . \tag{В.8}$$

С учетом (В.1), (В.2) можно показать, что

<u>для нечетного *n*</u>:

$$L_n = \begin{cases} < 0, & \text{если } 0 < \eta < \eta_0 \text{ (ускорение)}, \\ > 0, & \text{если } \eta < \eta_0 < 0 \text{ (торможение)}, \end{cases} \tag{В.9}$$

<u>для четного *n*</u>:

$$L_n < 0\,. \tag{В.10}$$

Окончательно из (В.8)−(В.10) получим

$$\boxed{\int_{t_0}^{t} \frac{dt}{r^{n/2}} = \frac{u^n \left| L_n \right|}{\mu^{n/2} \dot{m}_p}} \tag{В.11}$$

Литература

Абалакин В. К., *Аксенов Е. П.*, *Гребенников Е. А.*, *Демин В. Г.*, Рябов Ю. А. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. М.: Наука, 1976.

Авдуевский В. С., *Бажинов И. К.*, *Белецкий В. В.*, *Ивашкин В. В.* и др. Основы теории полета космических аппаратов / Под ред. Г. С. Нариманова, М. К. Тихонравова. М.: Машиностроение, 1972.

Аким Э. Л., *Энеев Т. М.* Определение параметров движения космического аппарата по данным траекторных измерений // Космич. исслед. 1963. Т. 1. № 5.

Бажинов И. К., *Алешин В. И.*, *Почукаев В. Н.*, *Поляков В. С.* Космическая навигация. М.: Машиностроение, 1975.

Бахшиян Б. Ц., *Суханов А. А.* Об изохронных производных первого и второго порядка в задаче двух тел // Космич. исслед., 1978. Т. 16. № 4.

Брандин В. Н., *Васильев А. А.*, *Худяков С. Т.* Основы экспериментальной космической баллистики. М.: Машиностроение, 1974.

Брандин В. Н., *Разоренов Г. Н.* Определение траекторий космических аппаратов. М.: Машиностроение, 1978.

Белецкий В. В. Очерки о движении небесных тел. 2-е изд. М.: Наука, 1977.

Белецкий В. В., *Егоров В. А.* Разгон космического аппарата в сфере действия планеты // Космич. исслед. 1964. Т. 2. № 3.

Бэттин Р. Наведение в космосе. М.: Машиностроение, 1966.

Гродзовский Г. Л., *Иванов Ю. Н.*, *Токарев В. В.* Механика космического полета с малой тягой. М.: Наука, 1966.

Демин В. Г. Движение искусственного спутника в нецентральном поле тяготения. М.: Наука, 1968.

Ефимов Г. Б. Оптимальный разгон в центральном поле до гиперболических скоростей // Космич. исслед. 1970. Т. 8. № 1.

Ефимов Г. Б., *Охоцимский Д. Е.* Об оптимальном разгоне в центральном поле // Космич. исслед. 1965. Т. 3. № 6.

Ивашкин В. В. Оптимизация космических маневров при ограничениях на расстояния до планет. М.: Наука, 1977.

Ильин В. А., *Кузмак Г. Е.* Оптимальные перелеты космических аппаратов с двигателями большой тяги. М.: Наука, 1976.

Лейтман Дж. Введение в теорию оптимального управления. М.: Наука, 1968.

Лоуден Д. Ф. Оптимальные траектории для космической навигации. М.: Мир, 1966.

Охоцимский Д. Е. Исследование движения в центральном поле под действием постоянного касательного ускорения // Космич. исслед. 1964. Т. 2. № 6.

Охоцимский Д. Е. Динамика космических полетов. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1968.

Охоцимский Д. Е., Сихарулидзе Ю. Г. Основы механики космического полета. М.: Наука, 1990.
Платонов А. К. Оптимальные свойства корректирующих маневров при использовании двигателя с ограниченной тягой // Космич. исслед., 1967. Т. 5. № 2.
Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. 4-е изд. М.: Наука, 1983.
Суханов А. А. Универсальное решение задачи Ламберта // Космич. исслед., 1988. Т. 26. № 41.
Суханов А. А. Об изохронных производных в задаче двух тел // Космич. исслед. 1990. Т. 28. № 2.
Суханов А. А. Оптимизация перелетов с малой тягой // Космич. исслед. 1999. Т. 37. № 21.
Суханов А. А. Оптимизация межпланетных перелетов с малой тягой // Космич. исслед. 2000. Т. 38. № 6.
Суханов А. А., Прадо А. Ф. Б. де А. Модификация метода транспортирующей траектории // Космич. исслед. 2004. Т. 42. № 1.
Суханов А. А., Прадо А. Ф. Б. де А. Оптимизация перелетов при ограничениях на направление тяги. I // Космич. исслед. 2007. Т. 45. № 5.
Суханов А. А., Прадо А. Ф. Б. де А. Оптимизация перелетов при ограничениях на направление тяги. II // Космич. исслед. 2008. Т. 46. № 1.
Штифель Е., Шейфеле Г. Линейная и регулярная небесная механика. М.: Наука, 1975.
Эльясберг П. Е. Введение в теорию движения искусственных спутников Земли. М.: Наука, 1965.

Benney D. J. Escape from a Circular Orbit Using Tangential Thrust // Jet Propulsion. 1958. V. 28. Nr. 3.
Stumpf K. Himmelsmechanik. Bd. 1. Berlin, 1969.
Sukhanov A. A., Prado A. F. B. de A. Constant Tangential Low-Thrust Trajectories near an Oblate Planet // J. Guidance, Control, and Dynamics. 2001. V. 24. Nr. 4.
Tsien H. S. Takeoff from Satellite Orbit // Jet Propulsion. 1953. V. 23. P. 233–236.

Словарь английских терминов

Ниже приводятся английские значения терминов, используемых в пособии. Термины, перевод которых тривиален (такие, например, как интеграл энергии — integral of energy или гиперповерхность — hypersurface), как правило, не приводятся. Для терминов, написание которых отличается в Великобритании и США, дается американское написание.

апоцентр	apoapsis, apocenter
базис-вектор Лоудена	Lawden's primer vector
большая полуось	semimajor axis
вектор состояния	state vector
векторное произведение	cross production
гравитационный маневр	gravity assist maneuver, swinby
гравитационный параметр	gravitational parameter
двигатель малой тяги	thruster
жидкостно-реактивная тяга	chemical thrust
задача двух тел	two body problem
задача Ламберта	Lambert problem
закон всемирного тяготения	Newton's law of gravity
идеально регулируемая тяга	thrust with limited power (LP), power-limited thrust
истинная аномалия	true anomaly
коэффициент полезного действия	efficiency
критерий оптимальности	performance index, cost function, payoff function
малая тяга	low thrust
матрица изохронных производных	state transition matrix
метод наименьших квадратов	least square method, Least Squares
многообразие	manifold
множество	set
обратная матрица	inverse matrix
объединение множеств	union of sets
ограничение типа неравенства	inequality constraint
ограничение типа равенства	equality constraint
ошибки выведения	launch errors
перицентр	periapsis, pericenter
принцип максимума Понтрягина	Pontryagin's maximum principle
пролет (небесного тела)	flyby
радиус-вектор	position vector
расход массы в единицу времени	mass flow rate
реактивное движение	jet propulsion

реактивное ускорение	jet acceleration
сжатие (планеты)	oblateness
скалярное произведение	dot production
склеенные конические сечения	patched conics
скорость истечения	exhaust velocity
скорость на бесконечности	velocity at infinity, v-infinity, excess velocity
солнечная энергия (малой тяги)	solar power
сопряженное уравнение в вариациях	adjoint (costate) variational equation
среднее движение	mean motion
средняя аномалия	mean anomaly
сфера действия	sphere of influence
траекторные измерения	tracking data
транспонирование	transposition
транспонированная матрица	transposed matrix
тяга с постоянной скоростью истечения	constant exhaust velocity (CEV) thrust
угловая дальность	transfer angle
уравнение в вариациях	variational equation
условия трансверсальности	transversality conditions
фокальный параметр	semilatus rectum
функции Штумпфа	Stumpff functions
целевая функция	performance index, cost function, payoff function
эксцентрическая аномалия	eccentric anomaly
электрореактивная двигательная установка	electric propulsion
электрореактивный двигатель	thruster

055(02)2

Ротапринт ИКИ РАН
117997, Москва, Профсоюзная, 84/32

Подписано к печати 29.01.10

Заказ 2199 Формат 70×1081/32 Тираж 200 8,5 уч.-изд. л.